CAPÍTULO II

2. Análisis matricial de armaduras

2.1 Introducción

Una armadura es un tipo de estructura básica, construida a base de elementos estructurales, consta de un grupo de tirantes y puntales diseñados y conectados de tal manera que forman una estructura que actúa como una viga de gran peralte. Los elementos forman comúnmente uno o varios triángulos en un solo plano y están dispuestos en forma tal que las cargas externas se aplican en los nudos, por lo que teóricamente sólo causan tensión o compresión axial en los elementos, los cuales están conectados en sus nudos por medio de pasadores sin fricción, los que permiten que los extremos de los elementos giren libremente. En virtud de su peso ligero y su alta resistencia, las armaduras se usan con amplitud y sus aplicaciones son muy variadas, por ejemplo, para soportar puentes y tejados de edificios. Las armaduras modernas se construyen, al conectar los miembros, los que suelen ser de acero estructural, perfiles de aluminio o portales de madera, a escuadras de ensamble por medio de conexiones con pernos o soldadas.

Existen diversos métodos para analizar armaduras planas. El análisis de armaduras planas estáticamente determinadas se puede realizar por el método de los nodos, el cual consiste en la selección de un nodo con no más de dos fuerzas desconocidas actuando sobre él y, con la aplicación de las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas, determinar esas fuerzas desconocidas. Otro método es el de las secciones, el cual puede ser más conveniente cuando sólo se desea conocer las fuerzas en unos cuantos miembros específicos de la armadura; este método está relacionado con el corte de la armadura en

dos partes, el cual no comprenderá más de tres barras con fuerza desconocida. Del equilibrio de cuerpos rígidos se obtienen las fuerzas incógnitas.

Existen también diversos métodos para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas: el método de las fuerzas y el método de las rigideces.

En el método de las fuerzas se suprime un número suficiente de redundantes (reacciones o fuerzas internas o ambas) de la estructura hiperestática, de modo que se logre una estructura estable y estáticamente determinada. Se calculan los desplazamientos en la dirección de las redundantes canceladas. Las redundantes deben ser de una magnitud tal que fuercen a sus puntos de aplicación a volver a sus posiciones originales de deflexión nula. Se establece una ecuación para la condición de deflexión en cada redundante y éstas se despejan de las ecuaciones resultantes.

El método utilizado en este proyecto será el de las rigideces, cuya ventaja principal consiste en que puede utilizarse tanto en estructuras isostáticas como, principalmente, en estructuras estáticamente indeterminadas. El usuario no tiene que escoger las redundantes (como en el método de las fuerzas) y no tiene que especificar, ni siquiera saber, si la estructura es isostática o hiperestática. La secuela de cálculo se explicará detalladamente en los siguientes capítulos.

2.2 Desarrollo histórico

Desde los inicios de la historia, la ingeniería estructural ha sido parte esencial del esfuerzo humano. Sin embargo, no fue sino alrededor de la mitad del siglo XVII que los ingenieros empezaron a aplicar el conocimiento de la mecánica en el diseño de estructuras.

Se cree que un arquitecto italiano, Andrea Palladio (1518-1580), fue quién analizó y construyó las primeras armaduras. Sus extensas notas sobre arquitectura incluyen descripciones detalladas y dibujos de armaduras de madera bastante similares a las usadas actualmente.

En general, Galileo Galilei (1564-1642) se considera el iniciador de la teoría de las estructuras, en su libro titulado *Dos Ciencias Nuevas,* publicado en 1638, donde analizó la falla de algunas estructuras simples. Después de los trabajos de Galileo, el conocimiento del análisis estructural avanzó a paso rápido en la segunda mitad del siglo XVII y hacia el XVIII. Entre los investigadores notables de ese periodo se encuentran Robert Hooke (1635-1703), quién desarrolló la ley de las relaciones lineales entre la fuerza y la deformación de los materiales (ley de Hooke); Sir Isaac Newton (1642-1727), quien formuló las leyes de movimiento y desarrolló el cálculo; John Bernoulli (1667-1748), quién formuló el principio del trabajo virtual; Leonhard Euler (1707-1783), quién desarrolló la teoría de pandeo en columnas, y C.A. de Coulomb (1736-1806), quién presentó el análisis de la flexión en vigas elásticas.

En 1826, L.M. Navier (1785-1836) publicó un tratado sobre el comportamiento elástico de las estructuras, el cual se considera el primer libro sobre la teoría moderna de la resistencia de los materiales. El desarrollo sobre el análisis estructural y los métodos utilizados actualmente se desarrollaron rápidamente durante todo el resto del siglo XIX y la primera mitad del XX.

En cuanto al método matricial de las rigideces, G.A. Maney (1888-1947) desarrolló el método de la pendiente deflexión, que se considera como el precursor del método de las rigideces.

2.3 Formulación matricial por el método de las rigideces

2.3.1 Definición e idealización de las armaduras planas

Se dice que una armadura es plana si todos sus miembros y las cargas aplicadas se encuentran en un solo plano.

Para simplificar el análisis de las armaduras planas se hacen las siguientes hipótesis:

1. Los elementos de las armaduras están conectados por medio de pasadores sin fricción.
2. Los elementos de la estructura son rectos. (Si no lo fuesen, las fuerzas axiales ocasionarían en ellos momentos flexionantes).
3. Las deformaciones de una armadura cargada, causadas por los cambios en la longitud de los elementos individuales, no son de suficiente magnitud para ocasionar cambios apreciables en la forma y dimensiones generales de la armadura. Debe darse atención especial a las armaduras muy largas y flexibles.
4. Los elementos están dispuestos de manera que las cargas y las reacciones se aplican sólo en los nudos de las armaduras.

La razón para establecer estas hipótesis es obtener una armadura ideal, cuyos miembros sólo estén sujetos a fuerzas axiales. Un elemento sujeto sólo a fuerza axial está sometido a tensión o bien a compresión, pero no a flexión (ver Fig. 2.1.).

Las fuerzas obtenidas con base en esas hipótesis simplificadas son, en la mayoría de los casos, muy satisfactorias y se denominan fuerzas primarias. Las fuerzas causadas por condiciones no consideradas en el análisis de fuerzas primarias se denominan fuerzas secundarias.

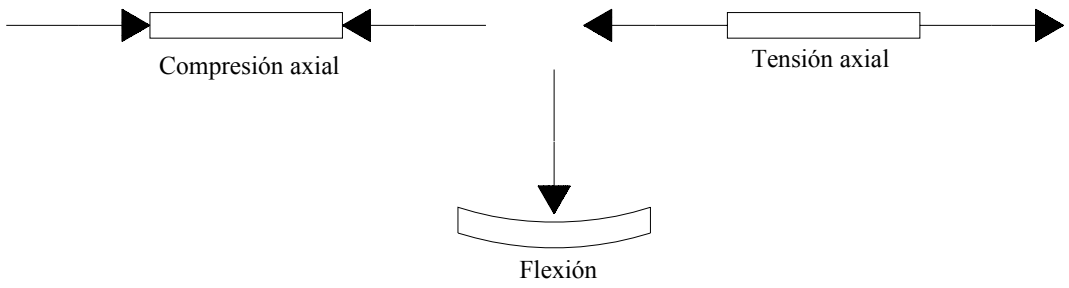

Fig. 2.1 Acciones en una barra

2.3.2 Rigidez y flexibilidad de una barra de armadura

Considérese una barra recta de armadura, cuyo módulo de elasticidad E y su sección transversal A son constantes en toda su longitud L (Fig. 2.2). Dicha barra está referida a los ejes $\bar{x}$ y $\bar{y}$. El sistema coordenado así definido se llama sistema local de coordenadas.

Esta barra está sometida a la acción de fuerzas internas $\overline{Fi}$ y $\overline{Fj}$, aplicadas en los nudos *i* y *j*, respectivamente; la acción de estas fuerzas provoca desplazamientos en los nudos, llamados $\overline{u_i}$ y $\overline{u_j}$, mostrados en la Fig. 2.2.

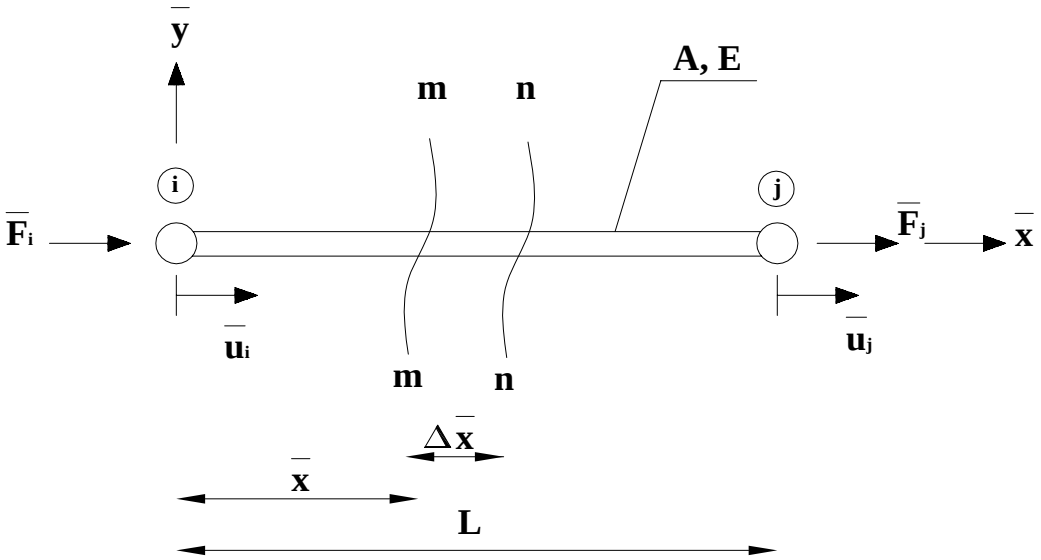

Fig. 2.2 Barra i- j de armadura en referencia local

L = Longitud de la barra.

A = Área de la sección transversal.

E = Módulo de elasticidad del material constitutivo de la barra.

i, j = Nudos inicial y final de la barra i – j, respectivamente.

$\bar{x}, \bar{y}$ = Sistema de coordenadas local para la barra.

$\overline{F_i}$, $\overline{F_j}$ = Fuerzas axiales aplicadas sobre los nudos i y j, respectivamente, en referencia local.

$\overline{u_i}$, $\overline{u_j}$ = Desplazamientos lineales nodales de los extremos i y j, respectivamente, en referencia local.

m, n = Elemento diferencial longitudinal de la barra.

Las fuerzas aplicadas $\overline{Fi}$ y $\overline{Fj}$, en el interior de la barra, originan la fuerza interna $\overline{F}(\bar{x})$, tal como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la barra (Fig. 2.3), para la que se han realizado varios cortes transversales.

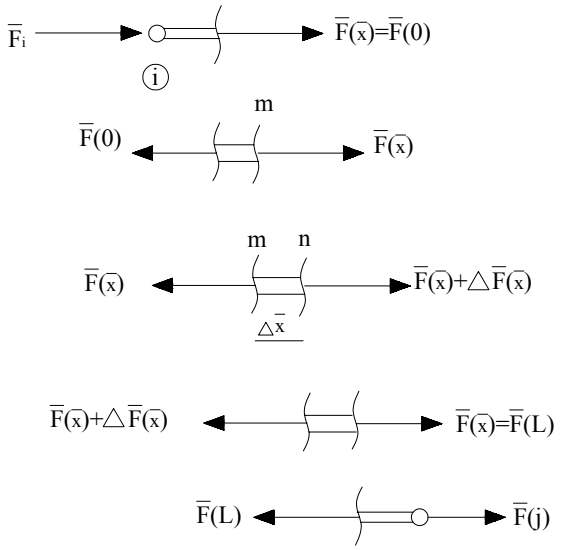

Fig. 2.3 Diagramas de cuerpo libre de la barra

Condiciones de equilibrio nodal:

Nudo i: $\overline{Fi} + \overline{F}(0) = 0$ ó $\boxed{\overline{F}(0) = -\overline{F_i}}$ (1)

Nudo j: $-\overline{F}(L) + \overline{F}j = 0$ ó $\boxed{\overline{F}(L) = \overline{F_j}}$ (2)

Condición de equilibrio del elemento diferencial de la barra:

$\Delta \overline{F}(\overline{x}) = 0$, lo que implica:

$$\overline{F}\left(\overline{x}\right) = cte = \overline{N} \tag{3}$$

Relación cinemática:

$$\overline{\varepsilon}(x) = \frac{d\overline{u}}{d\overline{x}} \tag{4}$$

$\overline{\varepsilon}$ (x) = Deformación axial unitaria de la barra.

$\overline{u}$ $(\overline{x})$ = Desplazamiento lineal para cualquier sección transversal de la barra.

Ecuación constitutiva: De la ley de Hooke es:

$$\overline{\sigma}(\overline{x}) = E\,\overline{\varepsilon}(x) \tag{5}$$

donde

$$\overline{\sigma}(\overline{x}) = \frac{\overline{N}}{A} \tag{6}$$

por lo que, de (5) y (6) resulta:

$$\frac{\overline{N}}{A} = E\,\frac{d\overline{u}}{d\overline{x}} \tag{7}$$

Considerando (3), la derivación de (7) da:

$$\frac{d^2\overline{u}}{d\overline{x}^2} = 0 \tag{8}$$

cuya integración sucesiva es:

$$\bar{u}\ (\bar{x}) + a_0 \bar{x} + a_1 = 0 \tag{9}$$

siendo a_0 y a_1 constantes de integración, las cuales se obtienen a partir de las siguientes:

Condiciones de borde:

$$\text{Si } \bar{x} = 0 \rightarrow \bar{u}\,(\bar{x}) = \overline{u_i} \tag{10}$$

$$\text{Si } \bar{x} = L \rightarrow \bar{u}\,(\bar{x}) = \overline{u_j} \tag{11}$$

Con lo cual, de (9) con (10) y (11) son:

$$a_1 = -\ \overline{u_i}\ ; \qquad a_0 = \frac{\overline{u_i} - \overline{u_j}}{L}$$

La consideración de estos resultados en la ecuación (9) da:

$$\bar{u}\ (\bar{x}) = \overline{u_i} - \frac{\overline{u_i} - \overline{u_j}}{L}\ \bar{x} = \left(1 - \frac{\bar{x}}{L} \right) \overline{u_i} + \frac{\bar{x}}{L}\ \overline{u_j} \tag{12}$$

lo que matricialmente expresado es:

$$\bar{u}\ (\bar{x}) = \left[\ 1 - \frac{\bar{x}}{L} \ \vdots \ \frac{\bar{x}}{L} \ \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u_i} \\ \overline{u_j} \end{array} \right\}$$

ó, simplemente :

$$\bar{u}\ (\bar{x}) = \left[\ \bar{\varphi}\ \right]_{(ij)} \left\{\ \bar{D}\ \right\}_{(ij)} \tag{13}$$

siendo

$$\left[\ \bar{\varphi}\ \right]_{(ij)} = \left[\ \overline{\varphi_i} \ \vdots \ \overline{\varphi_j}\ \right] = \left[1 - \frac{\bar{x}}{L} \ \vdots \ \frac{\bar{x}}{L} \right] \tag{14}$$

la función de forma, mientras que

$$\left\{ \overline{D} \right\}_{(ij)} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{u_i} \\ \cdots \\ \overline{u_j} \end{array} \right\}_{(ij)} \tag{15}$$

es el vector de desplazamientos nodales para la barra de armadura i-j.

La derivación de (13) da como resultado lo siguiente:

$$\frac{d\overline{u}}{d\overline{x}} = \frac{1}{L}(-\overline{u_i} + \overline{u_j}) \tag{16}$$

ó simplemente

$$\frac{d\overline{u}}{d\overline{x}} = \frac{1}{L}\overline{d} \tag{17}$$

siendo $\overline{d}$ la deformación total de la barra, esto es:

$$\overline{d} = \overline{u_j} - \overline{u_i} \tag{18}$$

La consideración de (17) en (7) da:

$$\overline{N} = \frac{EA}{L}\overline{d} \tag{19}$$

Se entiende por rigidez axial de una barra el valor de la fuerza axial que le produce una deformación (elongación) unitaria, por lo que, si en (19) $\overline{d} = 1$, entonces:

$$\overline{k} = \frac{EA}{L} \tag{20}$$

siendo $\overline{k}$ la rigidez de la barra. En contraposición, se define la flexibilidad de una barra como el valor de la deformación debida a una acción (fuerza axial) unitaria. Entonces, si $\overline{N} = 1$ en (19), se tiene que la flexibilidad de la barra $\overline{f}$ es:

$$\overline{f} = \frac{L}{EA} = \overline{k}^{-1} \tag{21}$$

2.3.3 Matriz de rigidez local de una barra de armadura

Un miembro de una armadura sólo está sujeto a fuerzas axiales, las cuales se pueden determinar a partir de los desplazamientos de los extremos de ese miembro en la dirección del eje centroidal del mismo. Por lo tanto, solo se necesita considerar dos grados lineales de libertad y las fuerzas correspondientes en los extremos para los miembros de armaduras planas.

Ya que suele ser conveniente deducir las relaciones básicas de fuerzas-desplazamientos en términos de fuerzas y desplazamientos en las direcciones longitudinal y perpendicular de los miembros, se define un sistema de coordenadas locales para cada miembro de la armadura.

De (3) con (1) y (2) resulta que $\overline{F_i} = -\overline{N}$ y $\overline{F_j} = \overline{N}$, con lo cual, de (19) con (18), da:

$$\overline{F_i} = \frac{EA}{L}\left(\overline{u_i} - \overline{u_j}\right) \quad \text{y} \quad \overline{F_j} = -\frac{EA}{L}\left(\overline{u_i} - \overline{u_j}\right) \tag{22}$$

lo que matricialmente puede expresarse como

$$\begin{Bmatrix} \overline{F_i} \\ \overline{F_j} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{u_i} \\ \overline{u_j} \end{Bmatrix}$$

o simplemente:

$$\left\{ \overline{F} \right\}_{(ij)} = \left[\overline{k} \right]_{(ij)} \left\{ \overline{D} \right\}_{(ij)} \tag{23}$$

donde el vector de acciones nodales es

$$\left\{ \overline{F} \right\}_{(ij)} = \begin{Bmatrix} \overline{F_i} \\ \overline{F_j} \end{Bmatrix}_{(ij)} \tag{24}$$

mientras que la matriz de rigidez axial local para la barra i-j es:

$$\left[\ \overline{k}\ \right]_{(ij)} = \begin{bmatrix} \overline{k_{ii}} & \overline{k_{ij}} \\ \overline{k_{ji}} & \overline{k_{jj}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

con:

$$\overline{k_{ii}} = \overline{k_{jj}} = \frac{EA}{L} \tag{26}$$

$$\overline{k_{ij}} = \overline{k_{ji}} = -\frac{EA}{L} \tag{27}$$

Las ecuaciones (26) y (27) son, respectivamente, las rigideces axiales directa y cruzada de la barra de la armadura, siendo $\left\{\ \overline{D}\ \right\}$ el vector de desplazamientos de la barra definido según la ecuación (15).

En consecuencia, de (25) con (26) y (27) es

$$\left[\ \overline{k}\ \right]_{(ij)} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

cuyo determinante es nulo, esto es:

$$\det\left[\ \overline{k}\ \right]_{(ij)} = \left[\ \overline{k}\ \right]_{(ij)} = 0$$

Entonces, la matriz de rigidez local de la barra de armadura es una matriz singular, lo que significa que no existe su inversa.

Como consecuencia de lo anterior, siempre será posible conocer las acciones nodales $\overline{F_i}$ y $\overline{F_j}$ si se conocen los desplazamientos nodales $\overline{u_i}, \overline{u_j}$, pero estos últimos no pueden expresarse u obtenerse sí son conocidas dichas acciones nodales.

La interpretación física implica que la barra en consideración se comporta como un sistema cinemáticamente variable, lo que implica que la barra sufre un movimiento de

cuerpo rígido, esto es, una traslación indefinida, por lo que, para encontrar una solución, se requiere de la especificación de las condiciones de borde.

2.3.4 Matriz de rigidez global para una barra de armadura

Considérese el arreglo triangulado de la armadura de la Fig. 2.4 referido al sistema global de coordenadas x, y.

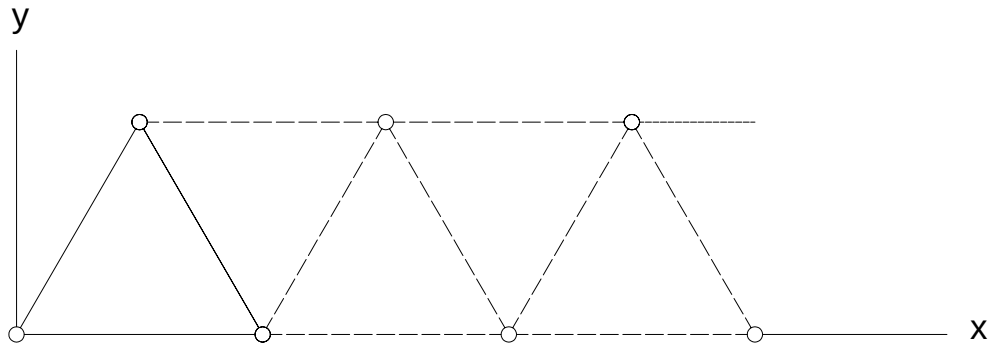

Fig. 2.4 Armadura

Debido a que una barra de armadura cualquiera requiere de su referencia respecto al sistema global de coordenadas para así describir el movimiento de la barra en el plano, es necesario introducir los desplazamientos nodales $\overline{v_i}$ y $\overline{v_j}$ en dirección de $\overline{y}$, así como las fuerzas nodales nulas en dirección $\overline{y}$.

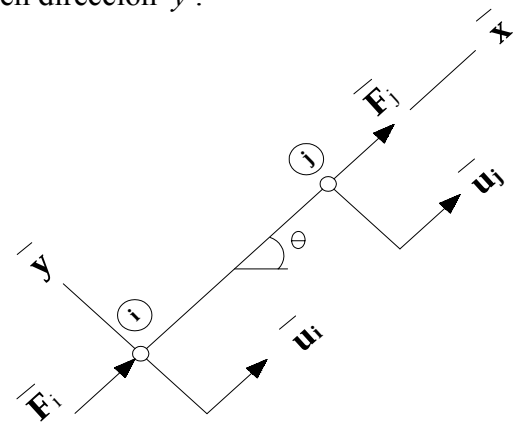

Fig. 2.5 Cantidades de estado en referencia local

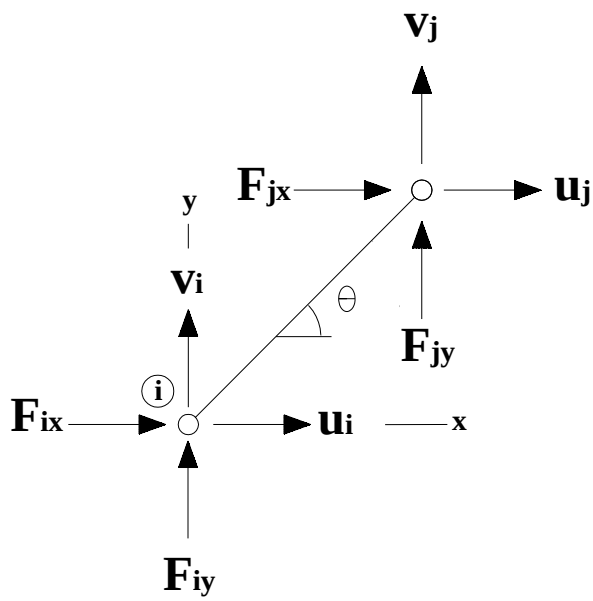

Fig. 2.6 Cantidades de estado en referencia global

Según (23) con (24) a (28), en referencia local es $\begin{Bmatrix} \overline{F_i} \\ \overline{F_j} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{u_i} \\ \overline{u_j} \end{Bmatrix}$, la que, ante la consideración de los desplazamientos $\overline{v_i}$ y $\overline{v_j}$ según el eje $\overline{y}$ y las fuerzas nulas, también según el eje $\overline{y}$, puede ampliarse como a continuación:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F_i} \\ 0 \\ \overline{F_j} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{u_i} \\ \overline{v_i} \\ \overline{u_j} \\ \overline{v_j} \end{Bmatrix} \tag{29}$$

ó, simplemente,

$$\left\{ \overline{F} \right\}_{(ij)} = \left[\overline{k} \right]_{(ij)} \left\{ \overline{D} \right\}_{(ij)} \tag{30}$$

donde, ahora $\left[\overline{k} \right]_{(ij)}$ es:

$$\left[\ \bar{k}\ \right]_{(ij)} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

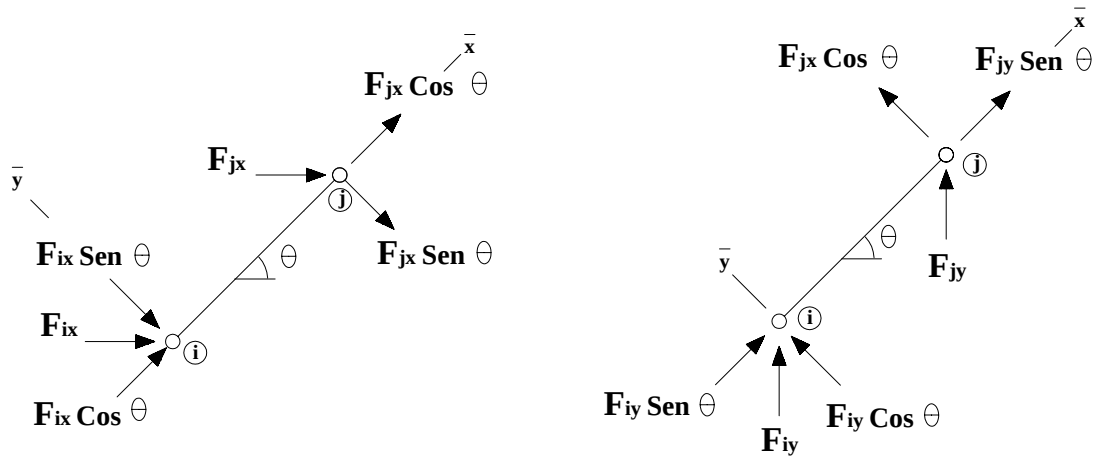

Fig. 2.7 Fuerzas internas y desplazamientos nodales en referencia local y global

La suma de las proyecciones sobre $\bar{x}$ de F_{ix} y F_{iy} debe ser igual a $\overline{F_i}$, es decir, $\overline{F_i} = F_{ix}Cos\theta + F_{iy}Sen\theta$, mientras que la suma de las proyecciones de ellas mismas sobre el eje $\bar{y}$ debe ser nula: $0 = -F_{ix}Sen\theta + F_{iy}Cos\theta$. De manera análoga, para el nudo j se obtiene $\overline{F_j} = F_{jx}Cos\theta + F_{jy}Sen\theta$ y $0 = -F_{jx}Sen\theta + F_{jy}Cos\theta$.

La expresión matricial de estos resultados es:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F_i} \\ 0 \\ \overline{F_j} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} Cos\theta & Sen\theta & 0 & 0 \\ -Sen\theta & Cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cos\theta & Sen\theta \\ 0 & 0 & -Sen\theta & Cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} \tag{32}$$

ó simplemente:

$$\left\{ \overline{F} \right\}_{(ij)} = \left[T \right]_{(ij)} \left\{ F \right\}_{(ij)} \tag{33}$$

siendo $\left\{ \overline{F} \right\}_{(ij)}$ el vector de acciones nodales en referencia local, $\left\{ F \right\}_{(ij)}$ el vector de acciones nodales en referencia global, y la matriz de transformación:

$$\left[T \right]_{(ij)} = \begin{bmatrix} \left[T \right]_{(ii)} & \left[T \right]_{(ij)} \\ \left[T \right]_{(ji)} & \left[T \right]_{(jj)} \end{bmatrix} \tag{34}$$

donde:

$$\left[T \right]_{(ii)} = \left[T \right]_{(jj)} = \begin{bmatrix} Cos\theta & Sen\theta \\ -Sen\theta & Cos\theta \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\left[T \right]_{(ij)} = \left[T \right]_{(ji)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[0 \right] \tag{36}$$

o bien

$$\left[T \right]_{(ij)} = \begin{bmatrix} Cos\theta & Sen\theta & 0 & 0 \\ -Sen\theta & Cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cos\theta & Sen\theta \\ 0 & 0 & -Sen\theta & Cos\theta \end{bmatrix} \tag{37}$$

Esta matriz de transformación, dada por la ecuación (37), es una matriz ortogonal, esto es:

$$\left[T \right]^{-1} = \left[T \right]^{T} \tag{38}$$

La premultiplicación de la ecuación (33) por $\left[T \right]^{T}$ es:

$$\left[T \right]^{T}_{(ij)} \left\{ \overline{F} \right\}_{(ij)} = \left[T \right]^{T}_{(ij)} \left[T \right]_{(ij)} \left\{ F \right\}_{(ij)}$$

de donde:

$$\left\{ F \right\}_{(ij)} = \left[T \right]^{T}_{(ij)} \left\{ \overline{F} \right\}_{(ij)} \tag{39}$$

debido a que, conforme a (38), es:

$$\left[\ T\ \right]^{T}_{(ij)}\ \left[\ T\ \right]_{(ij)} = \left[\ T\ \right]^{-1}_{(ij)}\ \left[\ T\ \right]_{(ij)} = \left[\ I\ \right]$$

siendo $\left[\ I\ \right]$ la matriz identidad.

De manera análoga a la ecuación (33), se tiene para los desplazamientos nodales que:

$$\left\{\ \overline{D}\ \right\}_{(ij)} = \left[\ T\ \right]_{(\mathrm{ij})}\ \left\{\ \mathrm{D}\ \right\}_{(\mathrm{ij})} \tag{40}$$

La sustitución de las ecuaciones (33) y (40) en la ecuación (30) da:

$$\left[\ T\ \right]_{(ij)}\ \left\{\ F\ \right\}_{(ij)} = \left[\ \overline{k}\ \right]_{(ij)}\ \left[\ T\ \right]_{(ij)}\ \left\{\ D\ \right\}_{(ij)}$$

cuya premultiplicación por $\left[\ T\ \right]^{T}_{(ij)}$ da:

$$\left\{\ F\ \right\}_{(ij)} = \left[\ k\ \right]_{(ij)}\ \left\{\ D\ \right\}_{(ij)} \tag{41}$$

donde:

$$\left[\ k\ \right]_{(ij)} = \left[\ T\ \right]^{T}_{(ij)}\ \left[\ \overline{k}\ \right]_{(ij)}\ \left[\ T\ \right]_{(ij)} \tag{42}$$

es la matriz de rigidez de la barra en referencia global, cuyo valor es:

$$\left[\ k\ \right]_{(ij)} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} Cos^2\theta & Cos\theta\ Sen\theta & -Cos^2\theta & -Cos\theta\ Sen\theta \\ Cos\theta\ Sen\theta & Sen^2\theta & -Cos\theta\ Sen\theta & -Sen^2\theta \\ -Cos^2\theta & -Cos\theta\ Sen\theta & Cos^2\theta & Cos\theta\ Sen\theta \\ -Cos\theta\ Sen\theta & -Sen^2\theta & Cos\theta\ Sen\theta & Sen^2\theta \end{bmatrix} \tag{43}$$

y la cual es una matriz simétrica que puede escribirse como:

$$\left[\ k\ \right]_{(ij)} = \begin{bmatrix} \left[\ k_{ii}\ \right] & \left[\ k_{ij}\ \right] \\ \left[\ k_{ji}\ \right] & \left[\ k_{jj}\ \right] \end{bmatrix} \tag{44}$$

donde

$$\left[\ k_{ii}\ \right] = \left[\ k_{jj}\ \right] = \begin{bmatrix} Cos^2\theta & Cos\theta\ Sen\theta \\ Cos\theta\ Sen\theta & Sen^2\theta \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$\left[\ k_{ij}\ \right] = \left[\ k_{ji}\ \right] = -\left[\ k_{ii}\ \right] = -\left[\ k_{jj}\ \right] \tag{46}$$

Como se observa, la matriz de rigidez de la barra de armadura, tanto en referencia local como en referencia global, es simétrica.

Las submatrices $\lfloor\ k_{ii}\ \rfloor$ y $\lfloor\ k_{jj}\ \rfloor$ reciben el nombre de submatrices de rigidez directa por que relacionan las acciones nodales con los desplazamientos nodales de un mismo nudo, mientras que las submatrices $\lfloor\ k_{ij}\ \rfloor$ y $\lfloor\ k_{ji}\ \rfloor$ reciben el nombre de submatrices de rigidez cruzada por que relacionan las acciones internas de un nudo con los desplazamientos nodales del otro nudo de la barra *ij*. Lo anterior puede fácilmente deducirse si en la ecuación (41) se toma en consideración la ecuación (44), esto es:

$$\begin{Bmatrix} \{\ F\ \}_i \\ \{\ F\ \}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\ k_{ii}\ \right] & \left[\ k_{ij}\ \right] \\ \left[\ k_{ji}\ \right] & \left[\ k_{jj}\ \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ D\ \}_i \\ \{\ D\ \}_j \end{Bmatrix} \tag{47}$$

o bien:

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} Cos^2\theta & Cos\theta\ Sen\theta & -Cos^2\theta & -Cos\theta\ Sen\theta \\ Cos\theta\ Sen\theta & Sen^2\theta & -Cos\theta\ Sen\theta & -Sen^2\theta \\ -Cos^2\theta & -Cos\theta\ Sen\theta & Cos^2\theta & Cos\theta\ Sen\theta \\ -Cos\theta\ Sen\theta & -Sen^2\theta & Cos\theta\ Sen\theta & Sen^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{48}$$

Por otra parte, de la ecuación (2) con (3), considerando la ecuación (48), resulta:

$$\overline{N} = \overline{F_j} = \frac{EA}{L}\left[\left(u_j - u_i\right)\ Cos\theta + \left(v_j - v_i\right)\ Sen\theta\right] \tag{49}$$

Esta ecuación permite determinar la fuerza axial de la barra *ij* en referencia local en función de los desplazamientos nodales referidos al sistema global de coordenadas.

2.3.5 Matriz de rigidez estructural de una armadura

Para ilustrar el procedimiento de la construcción de la matriz de rigidez estructural para una armadura, se considerará una armadura sencilla compuesta de sólo tres elementos (Fig. 2.8).

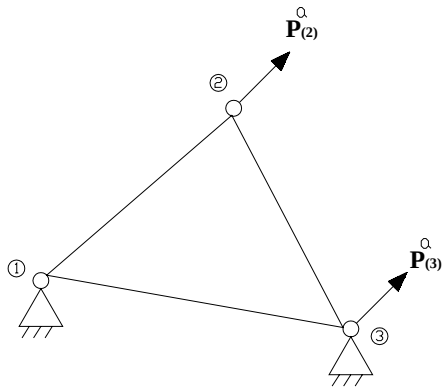

Fig. 2.8 Armadura simple compuesta de tres elementos

La compatibilidad de los desplazamientos en las articulaciones está garantizada si simplemente se usan las mismas variables de desplazamientos para las conexiones así como para los nudos de las barras. Entonces, automáticamente los desplazamientos transversales a una conexión son iguales.

Para establecer el equilibrio, considérese, por ejemplo, el diagrama de cuerpo libre del nudo 1 mostrado en la Fig. 2.9.

Para determinar la matriz de rigidez estructural de esta armadura, deben primero establecerse las condiciones de equilibrio que, en términos generales, son:

$$\begin{Bmatrix} \{P^a\}_{(1)} \\ \{P^a\}_{(2)} \\ \{P^a\}_{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{R\}_{(1)} \\ \{R\}_{(2)} \\ \{R\}_{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\}_{(1)} \\ \{F_2\}_{(2)} \\ \{0\}_{(3)} \end{Bmatrix}_{(12)} + \begin{Bmatrix} \{0\}_{(1)} \\ \{F_2\}_{(2)} \\ \{F_3\}_{(3)} \end{Bmatrix}_{(23)} + \begin{Bmatrix} \{F_1\}_{(1)} \\ \{0\}_{(2)} \\ \{F_3\}_{(3)} \end{Bmatrix}_{(13)} \tag{50}$$

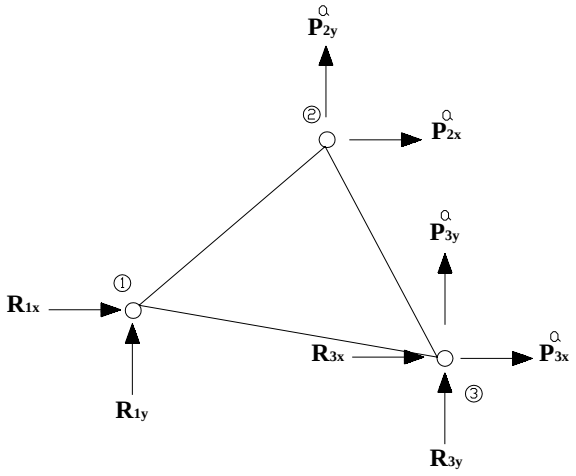

Fig. 2.9 Diagrama de cuerpo libre de la armadura simple

El vector de acciones nodales aplicadas es:

$$\left\{ P^a \right\} = \begin{Bmatrix} \{P^a\}_{(1)} \\ \{P^a\}_{(2)} \\ \{P^a\}_{(3)} \end{Bmatrix}$$

El vector de componentes de reacción es:

$$\left\{ R \right\} = \begin{Bmatrix} \{R_1\} \\ \{R_2\} \\ \{R_3\} \end{Bmatrix}$$

El vector de acciones nodales internas es:

$$\left\{ F \right\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\}_{(1)} \\ \{F_2\}_{(2)} \\ \{F_3\}_{(3)} \end{Bmatrix}$$

De la ecuación (50), considerando (47), resulta entonces:

$$\begin{Bmatrix} \{P^a\}_{(1)} \\ \{P^a\}_{(2)} \\ \{P^a\}_{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{R\}_{(1)} \\ \{R\}_{(2)} \\ \{R\}_{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}]_{(12)} \ \{D\}_{(1)} + [k_{12}]_{(12)} \ \{D\}_{(2)} \\ [k_{21}]_{(12)} \ \{D\}_{(1)} + [k_{22}]_{(12)} \ \{D\}_{(2)} \\ \{0\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{0\} \\ [k_{22}]_{(23)} \ \{D\}_{(2)} + [k_{23}]_{(23)} \ \{D\}_{(3)} \\ [k_{32}]_{(23)} \ \{D\}_{(2)} + [k_{33}]_{(23)} \ \{D\}_{(3)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} [k_{11}]_{(13)} \ \{D\}_{(1)} + [k_{13}]_{(13)} \ \{D\}_{(3)} \\ \{0\} \\ [k_{31}]_{(13)} \ \{D\}_{(1)} + [k_{33}]_{(13)} \ \{D\}_{(3)} \end{bmatrix}$$

cuya factorización para $\{D\}_{(1)}$, $\{D\}_{(2)}$ y $\{D\}_{(3)}$ da:

$$\begin{Bmatrix} \{P^a\}_{(1)} \\ \{P^a\}_{(2)} \\ \{P^a\}_{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{R\}_{(1)} \\ \{R\}_{(2)} \\ \{R\}_{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}]_{(12)} + [k_{11}]_{(31)} & [k_{12}]_{(12)} & [k_{13}]_{(13)} \\ [k_{21}]_{(12)} & [k_{22}]_{(12)} + [k_{22}]_{(23)} & [k_{23}]_{(23)} \\ [k_{31}]_{(31)} & [k_{32}]_{(23)} & [k_{33}]_{(23)} + [k_{33}]_{(31)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_{(1)} \\ \{D\}_{(2)} \\ \{D\}_{(3)} \end{Bmatrix}$$

lo que simplemente puede escribirse como:

$$\{ P \} = [K] \{ D \} \tag{51}$$

donde el vector de acciones nodales externas es:

$$\{ P \} = \{ P^a \} + \{ R \} \tag{52}$$

La matriz de rigidez estructural de la armadura es:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix} \tag{53}$$

donde:

$$\left.\begin{array}{l}
\left[\ K_{11}\ \right]=\left[\ k_{11}\ \right]_{(12)}+\left[\ k_{11}\ \right]_{(13)} \\
\left[\ K_{12}\ \right]=\left[\ k_{12}\ \right]_{(12)} \\
\left[\ K_{13}\ \right]=\left[\ k_{13}\ \right]_{(13)} \\
\left[\ K_{21}\ \right]=\left[\ k_{21}\ \right]_{(12)} \\
\left[\ K_{22}\ \right]=\left[\ k_{22}\ \right]_{(12)}+\left[\ k_{22}\ \right]_{(23)} \\
\left[\ K_{23}\ \right]=\left[\ k_{23}\ \right]_{(23)} \\
\left[\ K_{31}\ \right]=\left[\ k_{31}\ \right]_{(31)} \\
\left[\ K_{32}\ \right]=\left[\ k_{32}\ \right]_{(23)} \\
\left[\ K_{33}\ \right]=\left[\ k_{33}\ \right]_{(23)}+\left[\ k_{33}\ \right]_{(13)}
\end{array}\right\} \tag{54}$$

mientras que el vector de desplazamientos nodales es:

$$\left\{\ D\ \right\}=\left\{\begin{array}{l}
\left\{\ D\ \right\}_{(1)} \\
\left\{\ D\ \right\}_{(2)} \\
\left\{\ D\ \right\}_{(3)}
\end{array}\right\} \tag{55}$$

La ecuación (51) recibe el nombre de relación de rigidez estructural debido a que ella relaciona al vector de acciones nodales externas con el vector de desplazamientos nodales por medio de la matriz de rigidez estructural de la armadura dada por la ecuación (53).

En consecuencia, de la ecuación (51), con las ecuaciones (53) y (55), se obtiene lo siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l}
\{P\}_{(1)} \\
\{P\}_{(2)} \\
\{P\}_{(3)}
\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc}
[K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\
[K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\
[K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}]
\end{array}\right]\left\{\begin{array}{l}
\{D\}_{(1)} \\
\{D\}_{(2)} \\
\{D\}_{(3)}
\end{array}\right\} \tag{56}$$

La matriz de rigidez estructural es una matriz simétrica como consecuencia de las propiedades de simetría de la matriz de rigidez de cada barra.

De las ecuaciones (54) se observa que las submatrices de la matriz de rigidez estructural de la armadura, pertenecientes a la diagonal principal, son iguales a las sumas de las matrices directas de rigidez de las barras concurrentes al nudo respectivo, mientras que las submatrices fuera de la diagonal principal son las matrices indirectas de la barra que conecta al nudo *i* con el nudo *j*.

Para una armadura de *n* nudos, la matriz de rigidez estructural es:

$$\left[\ K\ \right]=\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & \dots & [K_{1n}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & \dots & [K_{2n}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [K_{n1}] & [K_{n2}] & \dots & [K_{nn}] \end{bmatrix} \tag{57}$$

donde, en general, son:

$$\left[\ K_{ii}\ \right]=\sum_{(i)}\left[\ k_{ii}\ \right]_{(ij)} \qquad \text{para} \quad i=j; \tag{58}$$

$$\left[\ K_{ij}\ \right]=\left[\ k_{ij}\ \right]_{(ij)} \qquad \text{para} \quad \forall\ i\neq j; \tag{59}$$

La ecuación (58) indica que las submatrices de la diagonal principal son la suma de las rigideces directas $\left[\ k_{ii}\ \right]$ de las barras concurrentes al nudo *i*, mientras que la ecuación (59) significa que las submatrices de la matriz de rigidez estructural fuera de la diagonal principal son las matrices indirectas $\left[\ k_{ij}\ \right]$ de la barra que conecta al nudo *i* con el nudo *j*; en caso de que no exista barra de unión entre un nudo *i* y otro nudo *j*, la correspondiente matriz $\left[\ k\ \right]_{(ij)}=\left[\ 0\ \right]$, esto es, será una matriz nula.

2.3.6 Condiciones de borde

En los nudos de una armadura pueden estar prescritas fuerzas o desplazamientos externos. En lo general, si una fuerza está dada en un nudo, entonces la cantidad desconocida será el desplazamiento, y viceversa.

El vector de desplazamientos puede particionarse de la siguiente manera:

$$\left\{ D \right\} = \begin{Bmatrix} \{D_d\} \\ \{D_c\} \end{Bmatrix} \tag{60}$$

siendo $\left\{ D_d \right\}$ y $\left\{ D_c \right\}$ los vectores de desplazamientos desconocidos y conocidos, respectivamente.

De manera similar, el vector de acciones nodales externas puede particionarse como a continuación:

$$\left\{ P \right\} = \begin{Bmatrix} \{P_c\} \\ \{P_d\} \end{Bmatrix} \tag{61}$$

De la relación de rigidez (51), con las ecuaciones (60) y (61), resulta:

$$\begin{Bmatrix} \{P_c\} \\ \{P_d\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{dd}] & [K_{dc}] \\ [K_{cd}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_d\} \\ \{D_c\} \end{Bmatrix} \tag{62}$$

de donde:

$$\left\{ P_c \right\} = \left[K_{dd} \right] \left\{ D_d \right\} + \left[K_{dc} \right] \left\{ D_c \right\} \tag{63}$$

$$\left\{ P_d \right\} = \left[K_{cd} \right] \left\{ D_d \right\} + \left[K_{cc} \right] \left\{ D_c \right\} \tag{64}$$

En el caso especial en el que los desplazamientos conocidos sean nulos, como sucede ante la presencia de apoyos fijos, entonces las componentes del vector de

desplazamientos conocidos $\{ D_c \}$ son nulas, esto es, $\{ D_c \} = \{ 0 \}$, por lo que las ecuaciones (63) y (64) se simplifican a:

$$\{ P_c \} = [K^*] \{ D_d \} \tag{65}$$

$$\{ P_d \} = [K_{cd}] \{ D_d \} \tag{66}$$

donde:

$$[K^*] = [K_{dd}] \tag{67}$$

es la matriz de rigidez estructural reducida de la armadura.

De la ecuaciones (65) y (66) se tiene entonces que:

$$\{ D_d \} = [K^*]^{-1} \{ P_c \} \tag{68}$$

$$\{ P_d \} = [K_{cd}] [K^*]^{-1} \{ P_c \} \tag{69}$$