Capítulo 3

Dinámica Clásica para Sistemas Fermiónicos en Espacios No-Anticonmutativos.

En esta sección revisaremos brevemente la descripción de sistemas puramente fermiónicos (por lo que omitiremos todos los términos que impliquen variables bosónicas en las definiciones dadas en el capítulo 2) utilizando estructuras simplécticas análogas (1.8) y (1.10). Así tenemos que los paréntesis de Poisson vienen definidos por:

$$\{E_1, E_2\}_P = \left(\frac{\partial E_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial E_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_1}{\partial \pi^\alpha}\right), \tag{3.1}$$

$$\{O, E\}_P = -\left(\frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha}\right), \tag{3.2}$$

$$\{O_1, O_2\}_P = -\left(\frac{\partial O_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_1}{\partial \pi^\alpha}\right). \tag{3.3}$$

Uno de los aspectos que complica el análisis es que en este caso, las variables del espacio de configuración ya no son números complejos (que conmutan) sino números (variables) de Grassmann (que anticonmutan). Esto significa que si θ_1 y θ_2 son números de Grassmann ($\mathbf{G}$) entonces $\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1$ o bien, tomando el caso (3.3):

$$\{\theta_1, \theta_2\} = 0 \tag{3.4}$$

ya que de forma abreviada se tiene $\{A, B\} = AB + BA$, para cualquier A y B variables de Grassmann impares.

Ahora considere un sistema fermiónico con M grados de libertad. Este lo podemos expresar por medio de un vector de Grassmann θ_α, donde $\alpha = 1, ..., M$. En general, θ_α será una función dependiente del tiempo, es decir, $\theta_\alpha = \theta_\alpha(t)$. La dinámica viene dada por el siguiente Lagrangiano,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt[\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1,2}\theta_\alpha(t)\dot{\theta}_\alpha(t) - H(\theta_\alpha)], \tag{3.5}$$

donde $\dot{\theta}_\alpha(t) \equiv \frac{d\theta_\alpha(t)}{dt}$ y $H(\theta_\alpha)$ es el hamiltoniano dado por:

$$H(\theta_\alpha) = V(\theta_\alpha), \tag{3.6}$$

con $V(\theta_\alpha)$ un potencial escalar que sólo depende de variables de Grassmann.

La acción nos da las ecuaciones de movimiento (como ya se vió en el capítulo 2):

$$\dot{\theta}_\alpha = -i\frac{\partial V(\theta_\alpha)}{\partial\theta_\alpha}. \tag{3.7}$$

3.1. Mecánica Clasica Fermiónica No-Anticonmutativa

En esta sección nos concentraremos en el estudio de sistemas fermiónicos no-anticonmutativos. Para simplificar el análisis trabajaremos con variables de Grassmann complejas. Esto es, definimos η como una variable de Grassmann compleja no trivial si: $(\eta\theta)^* \neq \theta\eta \in \mathbf{G}\otimes\mathbf{G} = \mathbf{G_C}$, donde $\mathbf{G}$ es el campo de los números de Grassmann.

Considere la acción (2.15) de $\mathbf{G}_{2M}$:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt[\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}(\eta_\alpha^*\dot{\eta}_\alpha - \dot{\eta}_\alpha^*\eta_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{M}(\eta_\alpha^*\eta_\alpha V_2(q))]$$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt[\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}(\eta_\alpha^*\dot{\eta}_\alpha - \dot{\eta}_\alpha^*\eta_\alpha) - V(\eta_\alpha^*, \eta_\alpha)]. \tag{3.8}$$

3.1.1. Caso 1: las η_α son No-Anticonmutativas

Tomemos como estructura simpléctica la equivalente a (1.8) sólo que ahora las variables dinámicas son de Grassmann y los paréntesis estan definidos por (2.21, 2.22, 2.23); así $\omega_{\alpha\beta}$ quedaría como:

$$\begin{pmatrix} \{\eta_\alpha,\eta_\beta\}_P & \{\eta_\alpha,\eta^*_\beta\}_P \\ \{\eta^*_\alpha,\eta_\beta\}_P & \{\eta^*_\alpha,\eta^*_\beta\}_P \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

que para el caso particular que nos interesa quedaría:

$$\begin{pmatrix} \varrho_{\alpha\beta} & -2i\delta_{\alpha\beta} \\ -2i\delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

es decir consideremos que sólo las η_α son no-anticonmutativas:

$$\begin{aligned} \{\eta_\alpha,\eta_\beta\}_P &= \varrho_{\alpha\beta}, \\ \{\eta_\alpha,\eta^*_\beta\}_P &= -2i\delta_{\alpha\beta}, \\ \{\eta^*_\alpha,\eta^*_\beta\}_P &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando ahora la definición (1.3) para los paréntesis de Poisson y (1.14) para las ecuaciones de movimiento obtenenemos:

$$\dot{\eta}_\alpha = \{\eta_\alpha, H(\eta,\eta^*)\}_P \tag{3.11}$$

con: $H(\eta,\eta^*) = V(\eta,\eta^*) = \eta^*_\beta\eta_\beta V_2(q)$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\alpha &= \{\eta_i,\eta_j\}_P \tfrac{\partial\eta_\alpha}{\partial\eta_i}\tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial\eta_j} + \{\eta_i,\eta^*_j\}_P \tfrac{\partial\eta_\alpha}{\partial\eta_i}\tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial\eta^*_j} \\ &+ \{\eta_i,\eta^*_j\}_P \tfrac{\partial\eta_\alpha}{\partial\eta^*_i}\tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial\eta_j} + \{\eta^*_i,\eta^*_j\}_P \tfrac{\partial\eta_\alpha}{\partial\eta^*_i}\tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial\eta^*_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\alpha &= -\varrho_{ij}\delta_{\alpha i}(-\eta^*_\beta\delta_{\beta j}V_2(q)) + 2i\delta_{ij}(\delta_{\alpha i})(-\eta_\beta\delta_{\beta j}V_2(q)) \\ &\quad +2i\delta_{ij}(0)(-\delta_{\beta j}\eta^*_\beta V_2(q)) - (0)(0)(-\delta_{\beta j}\eta_\beta V_2(q)) \end{aligned}$$

Para finalmente obtener:

$$\dot{\eta}_\alpha = \varrho_{\alpha\beta}\eta^*_\beta V_2(q) - 2i\eta_\alpha V_2(q). \tag{3.12}$$

Ahora, las derivadas se deben realizar usando (2.3) pues son variables de Grassmann. Esto es, se deben considerar las reglas de derivación correspondientes:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial\eta_j} &= \tfrac{\partial(\eta^*_\beta)}{\partial\eta_j}(\eta_\beta V_2(q)) + (-1)^1(\eta^*_\beta)\tfrac{\partial(\eta_\beta V_2(q))}{\partial\eta_j} \\ &= -\eta^*_\beta\delta_{\beta j}V_2(q) \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j^*} &= \frac{\partial(\eta_\beta^*)}{\partial \eta_j^*}(\eta_\beta V_2(q)) + (-1)^1(\eta_\beta^*)\frac{\partial(\eta_\beta V_2(q))}{\partial \eta_j^*} \\ &= -\eta_\beta \delta_{\beta j} V_2(q).\end{aligned} \tag{3.14}$$

De forma análoga podemos calcular también para $\dot{\eta}_\alpha^*$

$$\dot{\eta}_\alpha^* = \{\eta_\alpha^*, H(\eta,\eta^*)\}_P \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_\alpha^* \quad = \quad & \{\eta_i,\eta_j\}_P \frac{\partial \eta_\alpha^*}{\partial \eta_i}\frac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j} + \{\eta_i,\eta_j^*\}_P \frac{\partial \eta_\alpha^*}{\partial \eta_i}\frac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j^*} \\ & + \{\eta_i,\eta_j^*\}_P \frac{\partial \eta_\alpha^*}{\partial \eta_i^*}\frac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j} + \{\eta_i^*,\eta_j^*\}_P \frac{\partial \eta_\alpha^*}{\partial \eta_i^*}\frac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j^*},\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_\alpha^* \quad = \quad & -\varrho_{\alpha\beta}(0)(-\eta_\beta^*\delta_{\beta j}V_2(q)) + 2i\delta_{ij}(0)(-\eta_\beta\delta_{\beta j}V_2(q)) \\ & +2i\delta_{ij}(\delta_{\alpha i})(-\delta_{\beta j}\eta_\beta^* V_2(q)) - (0)\delta_{\alpha i}(-\delta_{\beta j}\eta_\beta V_2(q)),\end{aligned} \tag{3.17}$$

llegando así a:

$$\dot{\eta}_\alpha^* = 2i\eta_\alpha^* V_2(q) + (0)\eta_\beta V_2(q) = 2i\eta_\alpha^* V_2(q). \tag{3.18}$$

Para $\mathbf{G}_2$ tenemos potenciales de la forma:

$$V(\eta,\eta^*) = \sum_{\alpha=1}^{N}(\eta_\alpha^*\eta_\alpha V_2(q)), \tag{3.19}$$

con $V(q)$ un potencial bosónico real. Para este caso con $V(q) = cte = \omega$, las ecuaciones de movimiento (3.12, 3.18) se reducen a:

$$i\dot{\eta}_\alpha = i\varrho_{\alpha\beta}\eta_\beta^* w + 2\eta_\alpha w \tag{3.20}$$

$$i\eta_\alpha^* = -2\eta_\alpha^* w \tag{3.21}$$

que son ya las ecuaciones de movimiento donde aparece un término de corrección $i\varrho_{ij}\eta_\beta^* w$ para η_α debidos a la no-anticunmutatividad de las mismas.

3.1.2. Caso 2 las η_α y las η_α^* son No-Anticonmutativas

Podemos ahora realizar el mismo cálculo utilizando ahora el análogo a la estructura simpléctica (1.10) entendiendo que los momentos canónicos conjugados de las variables

η_α simplemente son η^*_α. Así ahora tendríamos las relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned}
\{\eta_\alpha, \eta_\beta\}_P &= \varrho_{\alpha\beta}, \\
\{\eta_\alpha, \eta^*_\beta\}_P &= -2i\delta_{\alpha\beta}, \\
\{\eta^*_\alpha, \eta^*_\beta\}_P &= \varpi_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Con esto obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\eta}_\alpha = \{\eta_\alpha, H(\eta, \eta^*)\}_P \tag{3.22}$$

$$\dot{\eta}^*_\alpha = \{\eta^*_\alpha, H(\eta, \eta^*)\}_P \tag{3.23}$$

Donde nuevamente tenemos : $H(\eta, \eta^*) = \eta^*\eta V_2(q)$

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_\alpha &= \{\eta_i, \eta_j\}_P \tfrac{\partial \eta_\alpha}{\partial \eta_i} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j} + \{\eta_i, \eta^*_j\}_P \tfrac{\partial \eta_\alpha}{\partial \eta_i} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta^*_j} \\
&+ \{\eta_i, \eta^*_j\}_P \tfrac{\partial \eta_\alpha}{\partial \eta^*_i} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j} + \{\eta^*_i, \eta^*_j\}_P \tfrac{\partial \eta_\alpha}{\partial \eta^*_i} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta^*_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}^*_\alpha &= \{\eta_i, \eta_j\}_P \tfrac{\partial \eta^*_\alpha}{\partial \eta_i} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j} + \{\eta_i, \eta^*_j\}_P \tfrac{\partial \eta^*_\alpha}{\partial \eta_i} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta^*_j} \\
&+\{\eta_i, \eta^*_j\}_P \tfrac{\partial \eta^*_\alpha}{\partial \eta^*_i} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta_j} + \{\eta^*_i, \eta^*_j\}_P \tfrac{\partial \eta^*_\alpha}{\partial \eta^*_i} \tfrac{\partial H(\eta,\eta^*)}{\partial \eta^*_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_\alpha &= -\varrho_{\alpha\beta}\delta_{\alpha i}(-\eta^*_\beta \delta_{\beta j} V_2(q)) + 2i\delta_{ij}(\delta_{\alpha i})(-\eta_\beta \delta_{\beta j} V_2(q)) \\
&+2i\delta_{ij}(0)(-\delta_{\beta j}\eta^*_\beta V_2(q)) - (\varpi_{ij})(0)(-\delta_{\beta j}\eta_\beta V_2(q))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}^*_\alpha &= -\varrho_{\alpha\beta}(0)(-\eta^*_\beta \delta_{\beta j} V_2(q)) + 2i\delta_{ij}(0)(-\eta_\beta \delta_{\beta j} V_2(q)) \\
&+2i\delta_{ij}(\delta_{\alpha i})(-\delta_{\beta j}\eta^*_\beta V_2(q)) - (\varpi_{ij})\delta_{\alpha i}(-\delta_{\beta j}\eta_\beta V_2(q))
\end{aligned}$$

Para finalmente obtener:

$$\dot{\eta}_\alpha = \varrho_{\alpha\beta}\eta^*_\beta V_2(q) - 2i\eta_\alpha V_2(q), \tag{3.24}$$

$$\dot{\eta}^* = 2i\eta^*_\alpha V_2(q) + \varpi_{\alpha\beta}\eta_\beta V_2(q). \tag{3.25}$$

Donde, multiplicando por i:

$$i\dot{\eta}_\alpha = i\varrho_{\alpha\beta}(\eta^*_\beta V_2(q)) + 2\eta_\alpha V_2(q), \tag{3.26}$$

$$i\dot{\eta}^*_\alpha = -2\eta^*_\alpha V_2(q) + i\varpi_{\alpha\beta}\eta_\beta V_2(q), \tag{3.27}$$

que sustituyendo $V(q) = cte = \omega$, queda:

$$i\dot{\eta}_\alpha = i\varrho_{\alpha\beta}\eta^*_\beta w + 2\eta_\alpha w, \tag{3.28}$$

$$i\dot{\eta}^*_\alpha = -2\eta^*_\alpha w + i\varpi_{\alpha\beta}\eta_\beta w. \tag{3.29}$$

Aquí, observemos que en ambos casos la expresión obtenida para η_α es la misma, por tanto, es importante contrastar (3.21) con (3.29) ya que uno podría pensar que para obtener la ecuación para η^*_α basta con conocer la ecuación para η_α y calcular su complejo conjugado. Como se puede apreciar existe un término extra en las ecuaciones obtenidas para las η^*_α que las hace diferentes. Por esta razón es muy importante tener presente qué estructura simpléctica se está utilizando y la definición (1.3) al realizar los cálculos.