Capítulo 2

Dinámica Clásica para Sistemas Fermiónicos

El equivalente clásico para sistemas fermiónicos no fué posible encontrarlo hasta que se introdujo en la Física Clásica las variables de Grassmann, estas variables tienen la propiedad de ser anticonmutativas en vez de ser conmutativas como las manejadas tradicionalmente en la Mecánica Clásica (números reales). La anticonmutatividad de las variables de Grassmann genera ciertas modificaciones en el cálculo diferencial e integral y como consecuencia en la Mecánica. Estas modificaciones son precisamente el objeto de estudio del presente capítulo, [2, 3, 4, 13].

2.1. Variables de Grassmann

De manera general se presenta una revisión de las variables de Grassmann, así como de algunas de sus propiedades que resultan relevantes para la comprensión de este capítulo, [3, 4].

2.1.1. Definición de las álgebras de Grassmann

Sea ξ^a, con $a = 1, ..., N$ un conjunto de generadores para un álgebra con la propiedad de anticonmutar:

$$\xi^a \xi^b = -\xi^b \xi^a, \qquad (\xi^a)^2 = 0, \quad \text{para toda a, b} \tag{2.1}$$

Esta álgebra es denominada `álgebra de Grassmann` y se denota por $\mathbf{G}_N$. Ahora, para el límte formal $N \to \infty$, esta álgebra se denotará por $\mathbf{G}_\infty$.

Los elementos 1,ξ^a, $\xi^a\xi^b$,...,cuyos indices en los productos son todos diferentes, forman una base para $\mathbf{G}_\infty$. Si N es finito entonces la secuencia termina en el producto de los N generadores: $\xi^1\xi^2...\xi^N$ y hay solamente 2^N elementos base distintos. Bajo la adición y la multiplicación por un número complejo o real, los elementos de $\mathbf{G}_N$ forman un espacio vectorial lineal de 2^N dimensiones y los elementos de $\mathbf{G}_\infty$ forman un espacio vectorial de dimensión infinita. Como las álgebras sobre los números complejos $\mathbf{G}_N$ y $\mathbf{G}_\infty$ son asociativos pero no conmutativos (excepto los casos triviales $N = 0, 1$)

2.1.2. Cálculo Diferencial para Variables de Grassmann

A continuación mencionaremos algunas propiedades elementales del álgebra diferencial de polinomios ordinarios. Supongamos n variables que conmutan $x_1, ..., x_n$. Consideremos el álgebra polinomial $P[x_1, ..., x_n]$ sobre un campo $\Re$ o $\mathcal{C}$. Hay que notar que el álgebra polinomial es de dimensión infinita. Sobre esta álgebra queremos definir el álgebra diferencial exterior $\mathbf{G}^*$ con términos con coeficientes polinomiales; para hacer esto, introducimos objetos nuevos $dx_1, ..., dx_n$ y las siguientes reglas de multiplicación, [4]:

$$\begin{array}{l} \text{a) } x_i x_j = x_j x_i, \\ \text{b) } dx_i dx_j = -dx_j dx_i, \\ \text{c) } x_i(dx_j) = (dx_j)x_i \\ \text{d)asociatividad y distribuitividad} \end{array} \tag{2.2}$$

Definamos un operador d por:

$$d = \sum_{j=1}^{n} dx_j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

con $\frac{\partial}{\partial x_i}(dx_l) = 0$. Esto define un álgebra exterior consistente con d que satisface:

$$d^2 = 0$$

y si α tiene "grado r" y β tiene "grado s", entonces

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (-1)^{rs}\beta\alpha, \\ d(\alpha\beta) &= (d\alpha)\beta + (-1)^r \alpha(d\beta). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nótese que el álgebra diferencial es un álgebra de dimensión finita con coeficientes polinomiales.

2.2. Introduciendo las Variables de Grassmann en la Mecánica Clásica

La Mecánica Clásica de sistemas bosónicos y fermiónicos puede ser descrita por variables complejas (c numbers) y por variables de Grassmann. Cuando se toma el límite clásico $\hbar \to 0$ de la teoría cuántica de sistemas fermiónicos aparece la denominada *pseudomecánica* y lo interesante de estudiar ésta, es que puede ser útil para construir modelos nuevos y para desarrollar una mejor intuición de un límite particular de la teoría cuántica. Además, la pseudomecánica favorece al entendimiento profundo de la cuantización de las teorías de Fermi usando el método de la integral de Feynman con variables de Grassmann, [2]. También se usa en teoría de cuerdas donde el interés principal radica en el límite clásico, [14].

A lo largo de este capítulo se desarrolla la pseudomecánica a un nivel de álgebras de Lie y solamente se aborda el problema a nivel de los paréntesis de Poisson, dejando de lado por el momento el uso de los brackets de Dirac, los cuales después de ser cuantizados convierten sus variables de Grassman en los generadores del álgebra real de Clifford. Una deformación de Moyal para cuantizar sistemas de fermiones ha sido propuesta recientemente en [15].

2.2.1. Lagrangiano para sistemas Bosónicos y Fermiónicos

En esta sección, no nos ocuparemos por la obtención del Lagrangiano, simplemente tomaremos el ya definido en [2]:

$$L = \frac{1}{2}[p_B\dot{q}_B - q_B\dot{p}_B] + \frac{i}{2}[mwq_F\dot{q}_F + \frac{p_F\dot{p}_F}{mw}] - H(q_B, p_B; q_F, p_F). \tag{2.4}$$

Usando esta expresión podemos calcular de la definición clásica de la acción:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dtL, \tag{2.5}$$

la *pseudoacción* que regirá la dinámica de sistemas bosónicos y fermiónicos

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt[\frac{1}{2}[p_B\dot{q}_B - q_B\dot{p}_B] + \frac{i}{2}[mwq_F\dot{q}_F + \frac{p_F\dot{p}_F}{mw}] - H(q_B, p_B; q_F, p_F)], \tag{2.6}$$

donde las q_F denotan las coordenadas fermiónicas y son variables de Grassmann y las q_B denotan a las coordenadas bosónicas. Cabe resaltar que una consecuencia de la utilización de variables de Grassmann es el signo que existe en el término de la energía cinética para las variables fermiónicas, así como el hecho de que aparezcan términos que dependan de los términos de *m,w*. Como la parte bosónica no hace referencia a dichas constantes (*m,w*), resulta conveniente redefinir las variables fermiónicas:

$$\xi_1 = \sqrt{mw}q_F, \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{mw}}p_F, \tag{2.7}$$

con lo que obtenemos la expresión para la *acción pseudoclásica*:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt[\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1,2}\xi_\alpha\dot{\xi}_\alpha + p\dot{q} - H(q, p; \xi_\alpha)]. \tag{2.8}$$

Esta expresión está en forma **Hamiltoniana** con respecto a las variables bosónicas y en forma **Lagrangiana** respecto a las fermiónicas; lo cual significa que las ecuaciones de movimiento para las variables de Grassmann son de primer orden.

Ahora, como nos interesa el caso no relativista, tomemos particularmente un Hamiltoniano $H(q, p; \xi_\alpha)$ de la forma:

$$H(q, p; \xi_\alpha) = \frac{p^2}{2m} + V(q, \xi_\alpha) \tag{2.9}$$

que sustituyéndolo en (2.8)nos da:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt[\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1,2}\xi_\alpha\dot{\xi}_\alpha + p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V(q, \xi_\alpha)]. \tag{2.10}$$

Utilizando ahora la ecuación de Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{2.11}$$

y sustituyéndola en (2.10) llegamos a:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_i}^{t_f} dt[\tfrac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha\dot{\xi}_\alpha + m\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}\dot{q}^2 m - V(q,\xi_\alpha)] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt[\tfrac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha\dot{\xi}_\alpha + \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q,\xi_\alpha)] \end{aligned} \tag{2.12}$$

que se puede generalizar para cualquier número arbitrario N de grados de libertad:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt[\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\xi_\alpha\dot{\xi}_\alpha + \frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2 - V(q_i,\xi_\alpha)]. \tag{2.13}$$

Para el caso particular en el que $N = 2M$ podemos introducir variables de Grassmann complejas, definidas por:

$$\eta_{\frac{(\alpha+1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_\alpha + i\xi_{\alpha+1}), \qquad \eta^*_{\frac{(\alpha+1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_\alpha - i\xi_{\alpha+1}) \tag{2.14}$$

que al sustituirlas en la expresión para la acción (2.13)nos da:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt[\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}(\eta^*_\alpha\dot{\eta}_\alpha - \dot{\eta}^*_\alpha\eta_\alpha) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{q}_i^2 - V(q_i,\xi_\alpha)]. \tag{2.15}$$

Por otra parte, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción pseudo-clásica (2.13) se obtienen las ecuaciones de movimiento siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt}[m_i\dot{q}_i] + \frac{\partial V}{\partial q_i} \\ m_i\ddot{q}_i &= -\frac{\partial V}{\partial q_i} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{d}{dt}[\frac{i}{2}\xi_\alpha] + [\frac{i}{2}\dot{\xi}_\alpha - \frac{\partial V}{\partial\xi_\alpha}] \\ \dot{\xi}_\alpha &= -i\frac{\partial V}{\partial\xi_\alpha}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Sin embargo, para el presente trabajo no utilizaremos esta formulación Lagrangiana sino la Hamiltoniana debido a que ésta última formulación facilita el cálculo de las ecuaciones de movimiento para los casos No-Anticonmutativos. Cabe destacar que en [2] se utiliza la formulación Lagrangiana para obtener el correspondiente Hamiltoniano en variables bosónicas y fermiónicas, de ahí la importancia de su revisión en esta sección.

2.2.2. Formulación Hamiltoniana

Sabemos que para sistemas bosónicos y fermiónicos definidos por una acción de la forma:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i, \dot{q}_i; \theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha), \qquad i = 1, ..., n; \;\; \alpha = 1, ..., N \tag{2.17}$$

con θ_α variables de Grassmann, se puede escribir el Hamiltoniano:

$$H = \dot{q}_i p^i + \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - L \tag{2.18}$$

con las siguientes ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{p}^i &= -\tfrac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \tfrac{\partial H}{\partial p^i}, \\ \dot{\pi}^\alpha &= -\tfrac{\partial H}{\partial \theta^\alpha}, \quad \dot{\theta}_\alpha = -\tfrac{\partial H}{\partial \pi^\alpha}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde desde luego tenemos que los momentos conjugados vienen dados por:

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \pi^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha}. \tag{2.20}$$

A continuación veremos los cambios que sufre el paréntesis de Poisson para el caso en el que se utilizan además, variables de Grassmann (θ_α, π_α). Usando la notación E_i y O_i para variables dinámicas que son elementos pares e impares del álgebra de Grassmann, respectivamente, los paréntesis de Poisson quedan definidos como:

$$\{E_1, E_2\}_P = (\frac{\partial E_1}{\partial q_i}\frac{\partial E_2}{\partial p^i} - \frac{\partial E_2}{\partial q_i}\frac{\partial E_1}{\partial p^i}) + (\frac{\partial E_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial E_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_1}{\partial \pi^\alpha}), \tag{2.21}$$

$$\{O, E\}_P = (\frac{\partial O}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i} - \frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i}) - (\frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha}), \tag{2.22}$$

$$\{O_1, O_2\}_P = (\frac{\partial O_1}{\partial q_i}\frac{\partial O_2}{\partial p^i} + \frac{\partial O_2}{\partial q_i}\frac{\partial O_1}{\partial p^i}) - (\frac{\partial O_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_1}{\partial \pi^\alpha}). \tag{2.23}$$

Es importante hacer notar que la definición del paréntesis de Poisson dependerá del tipo de función que se esté utilizando, ya sea par o impar, por tanto, al realizar los cálculos correspondientes para dicho paréntesis se debe tener en cuenta esta observación al igual que las propiedades de derivación anteriormente mencionadas. Estos paréntesis de Poisson son parte del álgebra “graduada”de Lie (graded Lie algebra).

2.2.3. El Hamiltoniano para $\mathbf{G}_2$

Por simplicidad revisaremos el caso particular de dos variables de Grassmann ξ_1 y ξ_2 que generan el álgebra de Grassmann $\mathbf{G}_2 = \{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2\}$ para obtener su correspondiente Hamiltoniano [2], partiendo del hecho de que para este caso particular el Lagrangiano está dado por:

$$L = \frac{i}{2}(\xi_1\dot{\xi}_1 + \xi_2\dot{\xi}_2) + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V_1(\mathbf{q}) - \frac{i}{2}(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_1)V_2(\mathbf{q}), \tag{2.24}$$

que podemos reescribir en términos de las variables de Grassmann complejas:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2), \qquad \eta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2), \tag{2.25}$$

quedándonos el Lagrangiano como:

$$L = \frac{i}{2}(\eta^*\dot{\eta} - \dot{\eta}^*\eta) + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V_1(\mathbf{q}) - \eta^*\eta V_2(\mathbf{q}). \tag{2.26}$$

Para esta expresión, la ecuación de movimiento para η es:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^*} - \tfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^*} &= \tfrac{d}{dt}[\tfrac{-i}{2}\eta] - (\dot{\eta}\tfrac{i}{2} - \eta V_2(q)) = 0, \\ \dot{\eta} &= -i\eta V_2(q). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ahora, tomando el valor de $\dot{\eta}$, sacando su conjugado y sustituyéndolo en:

$$(\eta^*\dot{\eta} - \dot{\eta}^*\eta) = \eta^*(-i\eta V_2) - (i\eta^* V_2)\eta = -iV_2(\eta^*\eta + \eta^*\eta) = 0. \tag{2.28}$$

Donde la expresión entre paréntesis es igual a cero por tratrarse de variables de Grassmann.

Esto es relevante porque demuestra que el término correspondiente a la energía cinética T en las variables fermiónicas es cero; por tanto no existe tal energía cinética en el Hamiltoniano.

Ahora, si tomamos $V_2(\mathbf{q}) = w$, con w constante, entonces podemos reescribir el Lagrangiano:

$$L = \frac{i}{2}(\eta^*\dot{\eta} - \dot{\eta}^*\eta) + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V_1(\mathbf{q}) - \eta^*\eta w \tag{2.29}$$

de donde es claro que el Hamiltoniano correspondiente es :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_1 + w\eta^*\eta \tag{2.30}$$

ya que $L = T - V$ y $H = T + V$.