# Capítulo 1

# Dinámica Clásica No-Conmutativa

En una mecánica cuántica no-conmutativa los operadores de posición $\mathbf{x}_k$ se caracterizan por satisfacer una relación de no-conmutatividad, [10,11]:

$$[\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_j] = i\hbar\Theta_{ij}\hat{\mathbf{1}}. \tag{1.1}$$

Esto ha generado que los físicos se empezacen a cuestionar sobre los espacios fase clásicos no-conmutativos.

En este capítulo se revisarán las modificaciones que surgen en la mecánica clásica como consecuencia de usar un álgebra no-conmutativa generada por las coordenadas $x_k$, (ver [8,9]).

Para esta sección el punto de partida es una mecánica cuántica no conmutativa y para obtener una estructura simpléctica consistente con las relaciones de conmutación se utiliza el límite clásico $\hbar \to \infty$ dado por:

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{f}, \hat{g}] \to \{f, g\}_P. \tag{1.2}$$

en donde $\{f, g\}_P$ son los paréntesis de Poisson de f y g.

## 1.1. Estructura Simpléctica de Espacios No-Conmutativos

Partamos de un sistema de $N$ grados de libertad. El correspondiente espacio fase estará formado por $x_i$ y $p_i$ con $i = 1, ..., N$.

Dado que en los espacios fase las coordenadas y sus respectivos momentos canónicos congujados adquiren la misma jerarquía, podemos utilizar la notación $\zeta_\alpha$ con $\alpha = 1, \ldots, 2N$ (la cual será muy conveniente para los análisis del capítulo 3). Esta notación se debe de entender de la siguiente forma: $\zeta_1 = x_1, ..., \zeta_N = x_N,\ \zeta_{N+1} = p_1, ..., \zeta_{2N} = p_N$ o puesto en notación matricial queda como:

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_N \\ \zeta_{N+1} \\ \vdots \\ \zeta_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$$

mejor conocida como *notación simpléctica.*

En términos de las variables del espacio fase $\zeta_\alpha$ los paréntesis de Poisson adquieren la forma:

$$\{F, G\}_P = \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial G}{\partial \zeta_\beta}, \tag{1.3}$$

donde $\omega_{\alpha\beta} = \{\zeta_\alpha, \zeta_\beta\}_P$ se conoce como estructura o forma simpléctica. Se entiende que estamos utilizando la convención de suma de Einstein. La forma en que utilizaremos (1.3) es la siguiente:

$$\{F, G\}_P = \{x_i, x_j\}_P \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} + \{x_i, p_j\}_P \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_j} + \{p_i, x_j\}_P \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} + \{p_i, p_j\}_P \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial p_j}, \tag{1.4}$$

donde $F = F(x_i, p_j)$ y $G = G(x_i, p_j)$.

La estructura simpléctica $\omega_{\alpha\beta}$ se puede representar por una matriz anti-simétrica, no-singular y no-degenerada $2N \times 2N$ en términos de $x_i$ y $p_i$ como

$$\begin{pmatrix} \{x_i, x_j\}_P & \{x_i, p_j\}_P \\ \{p_i, x_j\}_P & \{p_i, p_j\}_P \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Esta notación permite visualizar fácilmente el procedimiento para la generalización a los espacios no conmutativos y más aún al caso de fermiones (como se verá en los capítulos 2, 3 y 4). La definición (1.3) tiene la ventaja de permitir, de forma clara y sencilla, la generalización de la definición de los paréntesis de Poisson para el caso de un álgebra no-conmutativa.

Por ejemplo, para el caso utilizado en los libros como el Goldstein, las generadores de la estructura simpléctica son:

$$\{x_i, x_j\}_P = 0, \quad \{x_i, p_j\}_P = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_P = 0, \tag{1.6}$$

que al sustituir en (1.4.) nos da

$$\{F, G\}_P = \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}.$$

Lo cual corresponde precisamente a la definición del paréntesis de Poisson:

$$\{F, G\}_P = \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_i}.$$

Esto correspondería a un espacio fase **conmutativo** y su estructura simpléctica queda como

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Para un espacio fase **no-conmutativo** sólo en las coordenadas, los generadores de la estructura simpléctica serían,[8,9]:

$$\{x_i, x_j\}_P = \Theta_{ij}, \quad \{x_i, p_j\}_P = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_P = 0,$$

donde $\Theta_{ij}$ es antisimétrico y tiene unidades de área. La estructura simpléctica queda con la forma

$$\begin{pmatrix} \Theta_{ij} & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

o más general, para una estructura en la que también los momentos no conmuten sería

$$\{x_i, x_j\}_P = \Theta_{ij}, \quad \{x_i, p_j\}_P = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_P = \beta_{ij}. \tag{1.9}$$

Lo cual nos genera la siguiente estructura

$$\begin{pmatrix} \Theta_{ij} & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & \beta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Visto de esta forma, parecería que la no-conmutatividad es una mera curiosidad matemática y que podemos dar vuelo a la imaginación para proponer diferentes estructuras simplécticas; sin embargo esto no es así. La justificación formal de los espacios no-conmutativos proviene de la mecánica cuántica.

En cuántica no-conmutativa se encuentran relaciones de conmutación como la siguiente:

$$[\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_j] = i\hbar\Theta_{ij}\hat{\mathbf{1}}, \quad [\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j] = i\hbar\delta_{ij}\hat{\mathbf{1}}, \quad [\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j] = i\hbar\beta_{ij}\hat{\mathbf{1}}, \tag{1.11}$$

donde $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{p}_j$ son los operadores cuánticos de posición y momento respectivamente y que de acuerdo con la cuantización a la Dirac, el límite clásico

$$\frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ] \rightarrow \{\ ,\ \}_P$$

corresponde precisamente a (1.9).

Más aún, siendo más formales, ahora se sabe que la cuantización a la Dirac es equivalente a una deformación $\hbar$-estrella del álgebra del espacio fase conmutativo $\mathcal{A}_0$ de tal forma que el álgebra de los operadores de Heisenberg es reemplazada por el álgebra de Moyal $\mathcal{A}_\hbar$ [12]:

$$\{x_i, x_j\}_\hbar = 0, \quad \{x_i, p_j\}_\hbar = i\hbar\delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_\hbar = 0,$$

donde $x_i$ y $p_i$ son las mismas observables clásicas pero ahora obedecen un producto de Moyal

$$(f \star_\hbar g)(u) = \exp[\frac{i}{2}\hbar\omega_{ab}\partial_a^{(1)}\partial_b^{(2)}]f(u_1)g(u_2)|_{u_1=u_2=u} \tag{1.12}$$

y

$$\{f, g\}_\hbar = f \star_\hbar g - g \star_\hbar f. \tag{1.13}$$

Así vemos que en realidad, la estructura simpléctica (1.9) surge de buscar que sea consistente con las relaciones de no-conmutatividad (1.11).

Sin embargo, gracias a (1.3) todos los cálculos a realizar en esta tesis se quedan a un nivel meramente del álgebra de Poisson, por lo que no es realmente necesario utilizar explícitamente tanto la definición (1.12) como la deformación (1.13) del paréntesis.

## 1.2. Ecuaciones de Movimiento en Espacios No-Conmutativos

Como bien sabemos, en la formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica, las ecuaciones de movimiento se calculan a través de:

$$\dot{\zeta} = \{\zeta, H\}_P, \tag{1.14}$$

donde $H = H(\zeta)$ es el Hamiltoniano. En particular tomemos

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + V(x_i). \tag{1.15}$$

Primero calculemos las ecuaciones de movimiento para la estructura simpléctica (1.8). Para este caso, es evidente que (1.3) queda definido como

$$\{F, G\}_P = \Theta_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} + (\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x_i}) \tag{1.16}$$

Así, calculando (1.14) utilizando (1.16) y (1.15) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i \quad &= \{x_i, H\}_P \quad = \{x_i, \tfrac{p_j^2}{2m} + V(x_j)\}_P \\ &\qquad\qquad\quad = \{x_i, \tfrac{p_j^2}{2m}\}_P + \{x_i, V(x_j)\}_P \end{aligned} \tag{1.17}$$

calculando por separado cada término tenemos que para el primero:

$$\{x_i, \frac{p_j^2}{2m}\}_P = \Theta_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial \frac{p_j^2}{2m}}{\partial x_l} + \frac{\partial x^i}{\partial x^k}\frac{\partial \frac{p_j^2}{2m}}{\partial p^k} - \frac{\partial x^i}{\partial p^k}\frac{\partial \frac{p_j^2}{2m}}{\partial x^k}$$

llegando así a

$$\{x^i, \frac{p_j^2}{2m}\}_P = \frac{p_i}{m}. \tag{1.18}$$

Para el segundo término

$$\{x_i, V(x_j)\}_P = \Theta_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial V(x_j)}{\partial x_l} + \frac{\partial x_i}{\partial x^k}\frac{\partial V(x_j)}{\partial p^k} - \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\frac{\partial V(x)}{\partial x^k}$$

lo cual nos arroja el resultado

$$\{x_i, V(x_j)\}_P = \Theta_{il}\frac{\partial V(x_j)}{\partial x_l}, \tag{1.19}$$

que sustituyendo todo junto nos da la ecuación de movimiento:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}_P = \frac{p_i}{m} + \Theta^{il}\frac{\partial V(x_j)}{\partial x_l}. \tag{1.20}$$

Por otra parte para los momentos:

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}_P = \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\frac{\partial V(x_j)}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial V(x_j)}{\partial x_k} = -\frac{\partial V(x_j)}{\partial x_i} \tag{1.21}$$

Que finalmente se puede reescribir como [8]:

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V(x_j)}{\partial x_i} + m\Theta_{il}\frac{\partial^2 V(x_j)}{\partial x_l \partial x_k}\dot{x}_k. \tag{1.22}$$

Estas resultan ser la nuevas ecuaciones de la segunda ley de Newton para la estructura (1.8).

Ahora, calculemos las ecuaciones de movimiento para la estructura simpléctica (1.10). Usando el Hamiltoniano ya definido en (1.15), se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_k = \quad \{x_k, H\}_P \quad &= \quad +\{x_i, x_j\}_P \tfrac{\partial x_k}{\partial x_i}\tfrac{\partial H}{\partial x_j} + \{x_i, p_j\}_P \tfrac{\partial x_k}{\partial x_i}\tfrac{\partial H}{\partial p_j} \\
&\quad -\{x_i, p_j\}_P \tfrac{\partial x_k}{\partial p_j}\tfrac{\partial H}{\partial x_i} + \{p_i, p_j\}_P \tfrac{\partial x_k}{\partial p_i}\tfrac{\partial H}{\partial p_j} \\
&\quad = \Theta_{ij}\delta_{ki}\tfrac{\partial H}{\partial x_j} + \delta_{ij}\delta_{ki}\tfrac{\partial H}{\partial p_j} \\
&\quad = \tfrac{p_k}{m} + \Theta_{kj}\tfrac{\partial V(x)}{\partial x_j}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_k = \quad \{p_k, H\}_P \quad &= \quad +\{x_i, x_j\}_P \tfrac{\partial p_k}{\partial x_i}\tfrac{\partial H}{\partial x_j} + \{x_i, p_j\}_P \tfrac{\partial p_k}{\partial x_i}\tfrac{\partial H}{\partial p_j} \\
&\quad -\{x_i, p_j\}_P \tfrac{\partial p_k}{\partial p_j}\tfrac{\partial H}{\partial x_i} + \{p_i, p_j\}_P \tfrac{\partial p_k}{\partial p_i}\tfrac{\partial H}{\partial p_j} \\
&= \quad -\delta_{ij}\delta_{kj}\tfrac{\partial H}{\partial x_i} + \beta_{ij}\delta_{ki}\tfrac{\partial H}{\partial p_j} \\
&= \quad -\delta_{ik}\tfrac{\partial V}{\partial x_i} + \beta_{kj}\tfrac{p_j}{m} \\
\dot{p}_k = \quad \{p_k, H\}_P \quad &= \quad -\tfrac{\partial V(x)}{\partial x_k} + \tfrac{1}{m}\beta_{kj}p_j
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Y finalmente se encuentran las ecuaciones de movimiento [9]:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_k = \quad &-\tfrac{\partial V(x)}{\partial x_k} + m\Theta_{kj}\tfrac{\partial^2 V(x)}{\partial x_l \partial x_j}\dot{x}_l \\
&+\beta_{kj}\dot{x}^j
\end{aligned} \tag{1.25}$$