

# Capítulo 4

## Dispersión Cromática

En el presente capítulo se presenta la solución de la ecuación de dispersión para pulsos individuales. En este caso el espectro de la señal es continuo, por lo que se utiliza la transformada de Fourier, mientras que en el caso de los trenes, el espectro es discreto, por lo que se utiliza la serie de Fourier. Se analizarán diferentes perfiles de pulsos y se discutirán las ventajas y desventajas de la utilización de tales perfiles.

### 4.1 Pulsos Gaussianos

La ecuación de propagación 3.1 permite estudiar la evolución de una señal a lo largo de una fibra óptica. Esta evolución está determinada principalmente por la constante de dispersión de la velocidad de grupo, anteriormente definida por  $\beta_2$ . En el capítulo anterior se ha resuelto la ecuación para el caso de una señal periódica (i.e. tren de pulsos), lo cual ha permitido establecer fácilmente la analogía entre los efectos de difracción y de dispersión para estructuras de este tipo. Sin embargo la analogía es válida para cualquier tipo de estructura, en particular para pulsos individuales, los cuales se analogan con el caso de la difracción en aperturas individuales, siempre que sea válida la aproximación de Fresnell. En el presente capítulo se presentará la solución de la

ecuación de dispersión para pulsos individuales y consecuentemente su evolución para diferentes perfiles de pulsos. Se comentará brevemente el fenómeno de modulación de fase.

En el dominio espectral, la ecuación 3.1 se escribe

$$2i \frac{\partial A_F}{\partial z} = -\omega^2 A_F \quad (4.1)$$

con solución general (por separación de variables):

$$A_F(z, \omega) = A_F(0, \omega) \exp \left\{ \frac{i}{2} \omega^2 z \right\} \quad (4.2)$$

Para encontrar la forma del pulso en cualquier punto de la fibra debe encontrarse la transformada inversa de Fourier de la función 4.2 que será

$$A(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_F(0, \omega) \exp \left\{ \frac{i}{2} \omega^2 z \right\} \exp \{-i\omega\tau\} d\omega$$

Para propósitos particulares se tomará como condición inicial (i.e. señal de entrada) el caso del pulso con perfil gaussiano

$$A(0, \tau) = e^{-(\tau/a_0)^2}.$$

De esta forma se obtiene el perfil del pulso en cualquier punto de la fibra que será

$$A(z, \tau) = \left[ \frac{1}{1 - iz} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2a_0^2(1 - iz)} \right\}.$$

En este caso se puede apreciar cómo el perfil del pulso se mantiene (i.e. sigue siendo gaussiano) sin embargo su amplitud decae con la distancia mientras que su ancho característico, definido por el valor de  $\tau$  donde  $A = A_0/e$ , aumenta. Se puede observar que el factor por el que el ancho (o duración del pulso) aumenta es de  $\sqrt{2}$  para una distancia de  $z = 1$  puesto que

$$|A(z, \tau)|^2 = \frac{1}{(1 + z^2)^{1/2}} \exp \left\{ \frac{-\tau^2}{a_0^2(1 + z^2)^{1/2}} \right\},$$

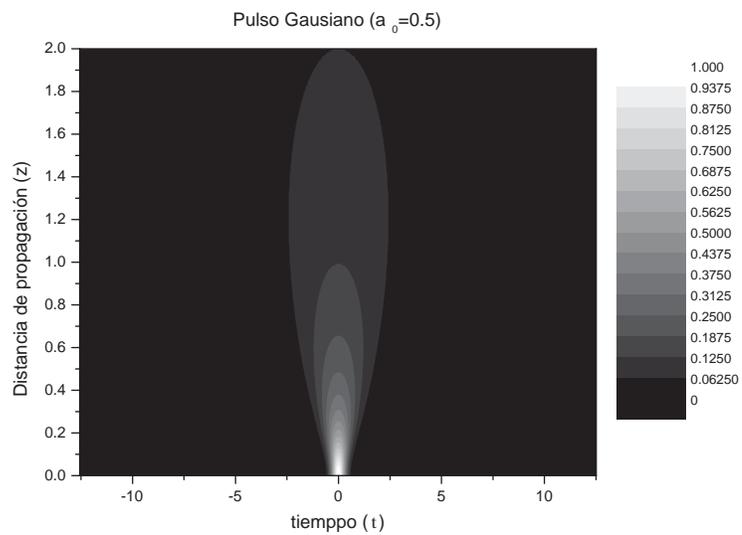


Figura 4.1: Dispersión de pulso gaussiano

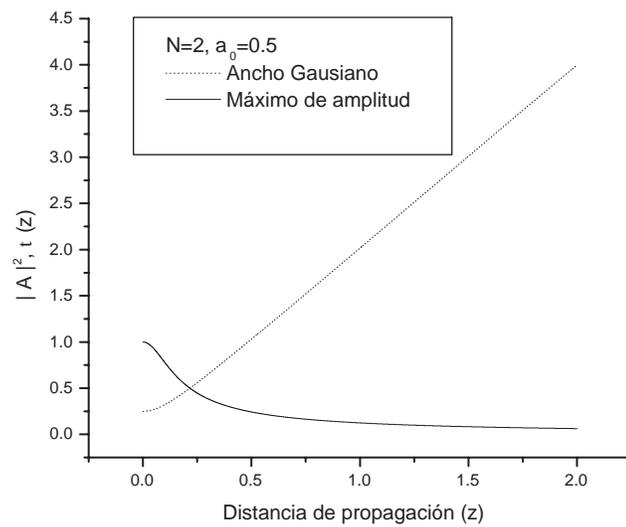
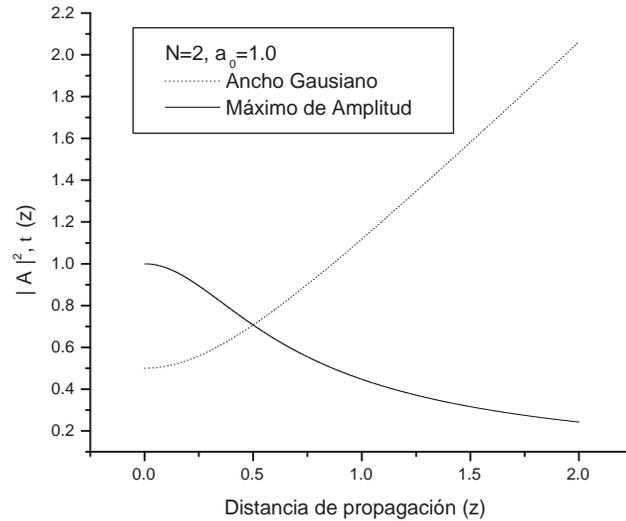
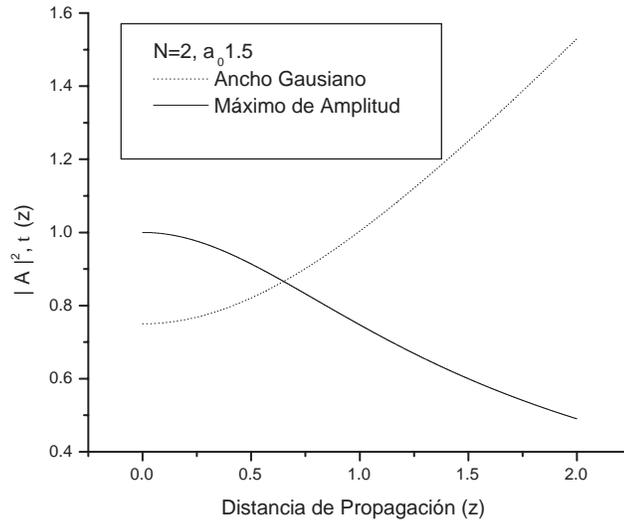


Figura 4.2: Pulso Gaussiano

Figura 4.3: Pulso gaussiano con  $a_0 = 1.0$ 

y que la amplitud decae por un factor igual. Este efecto se puede apreciar muy claramente en la gráfica 4.1 donde el parámetro  $\tau$  (duración) crece de manera parabólica en distancias pequeñas y para distancias mayores lo hace de manera lineal.

Si la duración (o anchura en el caso de difracción) inicial del pulso se incrementa puede observarse también el decaimiento, aun que más lento. En el caso anterior  $a_0 = 0.5$  la señal pierde la mitad de su potencia pico aproximadamente a  $z = 0.25$  de  $L_D$ , mientras que para el caso de  $a_0 = 1.0$  esto sucede más allá de  $z = 0.75$  y para  $a_0 = 1.5$  se da casi a dos veces la distancia de dispersión. Puede observarse también que la duración del pulso va aumentando mientras la potencia pico disminuye; esto se da por conservación de energía, el área bajo la curva representa la energía que porta el pulso. Esto implica que la utilización de dichos perfiles (pulsos) exige la instalación de estaciones de repetición, y que para mayores anchos iniciales, esta distancia podrá ser mayor. Para tener una idea realista de las distancias aquí obtenidas es importante calcular la distancia de dispersión. Para un  $\tau_0 = 1ps$ , la distancia de

Figura 4.4:  $N = 2$ ,  $a_0 = 1.5$ 

dispersión es aproximadamente entre  $40m$  y  $50m$ . Se puede tener una idea ahora de que las distancias a las que la información portada por pulsos individuales es irre recuperable es relativamente pequeña.

Es importante aclarar que la propagación de pulsos individuales se estudia debido a que reproduce la propagación de series o trenes de pulsos separados por un tiempo  $\tau \gg a_0$ , y por lo que los efectos de interferencia son despreciables. Mas adelante serán estudiados los trenes donde ambas cantidades son comparables y los efectos de interferencia son importantes.

Puesto que la propagación de pulsos individuales está sujeta a la dispersión cromática, sucede que los pulsos al propagarse grandes distancias sufren un cambio de fase a través de su propia anchura. Esto puede observarse fácilmente de la forma de  $A(z, \tau)$ , donde el argumento del número complejo es precisamente la fase del pulso y depende tanto de  $z$  como de  $\tau$ , este efecto se conoce como *chirp* o modulación de la frecuencia. Se mencionó con anterioridad en el presente trabajo que en diferentes regímenes de dis-

persión velocidad de grupo varía. En este caso los pulsos individuales tienen un cierto ancho de frecuencia, por lo que las diferentes componentes espectrales viajan a velocidades ligeramente diferentes. Es por esta razón por la que los pulsos sufren este chirp. Análogamente para difracción, el frente de onda originalmente plano, va deformándose en un frente esférico, al medir la fase en un plano perpendicular al eje de propagación se observará el cambio de fase.

Para ampliar la analogía entre dispersión y difracción se pueden introducir pulsos supergaussianos individuales, cuya forma matemática es la siguiente:

$$A(z, \tau) = \exp \left\{ -\frac{\tau^N}{2a_0^N} \right\}, \quad \text{para } N \text{ par, } N > 2; \quad (4.3)$$

en este caso, mientras  $N$  sea mayor el pulso será más parecido a un pulso rectangular del tipo del que se ha considerado en el capítulo 2. Para este tipo de pulsos no resulta útil la medida de anchura media como en el caso de pulsos gaussianos, puesto que pierden su perfil (i.e. ya no son supergaussianos). Es conveniente definir un ancho integral o RMS (*root mean square*) para observar su evolución, este se define por

$$\sigma = [\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2]^{1/2},$$

donde las cantidades  $\langle \tau^N \rangle$  están definidas por

$$\langle \tau^N \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\tau, z)|^2 \tau^N d\tau.$$

La dispersión de pulsos supergaussianos se análoga con la difracción en la rendija (o abertura rectangular de altura infinita). En dicho caso se conocen las llamadas zonas de Fresnel que son máximos y mínimos de intensidad que aparecen a lo largo del eje de propagación. Estas zonas aparecen gracias a la diferencia de fase de las ondas secundarias (principio de Huygens-Fresnel) que inciden en cierto punto de observación que será ubicado en el eje de propagación por conveniencia. En este caso el aumento

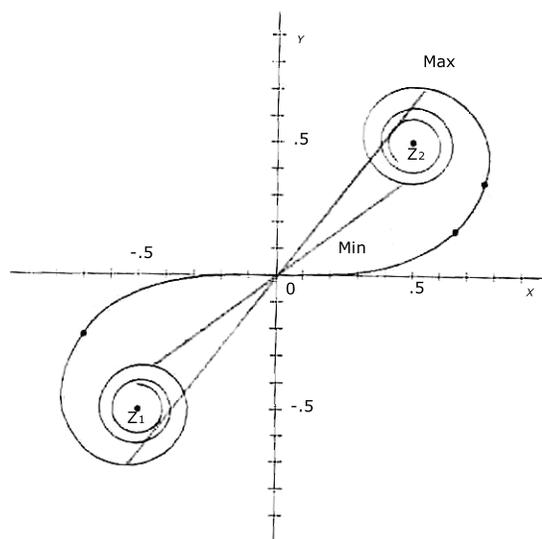


Figura 4.5: La espiral de Cornu ayuda a determinar la ubicación de las zonas de Fresnel.

de la distancia de observación equivale a el aumento de la anchura de la rendija, para distancias mayores a la longitud de la onda. En el caso análogo de dispersión las zonas de Fresnel aparecen a lo largo del eje de propagación y varían según el ancho inicial  $a_0$  del pulso supergausiano.

Para ilustrar las zonas de Fresnel se utiliza la espiral de Cornu [7], la cual proviene de la solución de las partes real e imaginaria de la integral de Fresnel (o integrales de Fresnel). Los puntos en la figura 4.5 representan los valores de las integrales. Se puede observar cómo los módulos de los puntos en la espiral alcanzan máximos y mínimos y en las gráficas de ancho e intensidad (4.7,4.8) se puede ver cómo la aparición de máximos y mínimos locales corresponde aproximadamente a la espiral de Cornu.

Para el pulso individual, el comportamiento del ancho integral  $\sigma$  es semejante al ancho de los pulsos gaussianos en el sentido de que crece parabólicamente al principio y después parece aumentar linealmente. Para el pulso supergausiano de orden 6 empieza a ser notable la similitud con el caso de aberturas rectangulares, ya que muy cerca de

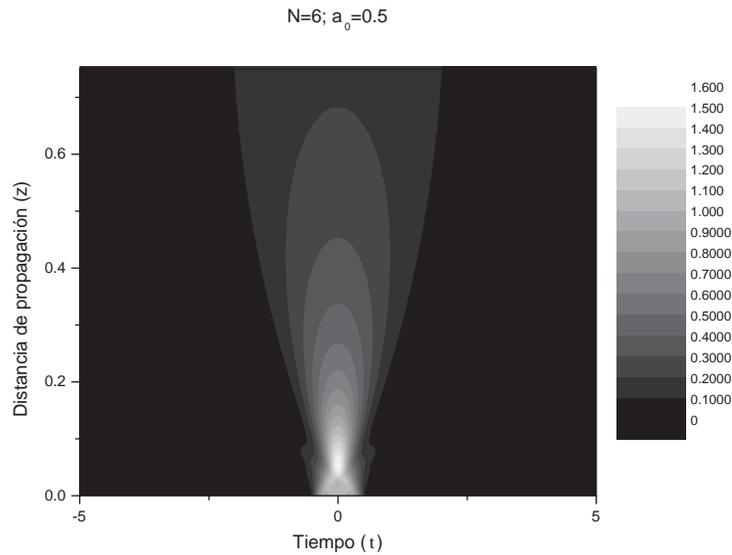


Figura 4.6: Pulso supergausiano de orden 6

$z = 0$  el pulso sufre un enfocamiento que puede identificarse con la primera zona de Fresnel.

Si el ancho inicial se aumenta, puede notarse cómo la distancia a la que aparece la primera zona de Fresnel aumenta, siendo aproximadamente  $z = 0.25$  para  $a_0 = 1.0$  y de  $z = 0.5$  para  $a_0 = 1.5$ . Esto, sin embargo, no soluciona el problema de las estaciones de repetición, ya que la intensidad de la señal decae monótonicamente después del máximo global y eventualmente será nula mientras que el ancho integral aumenta también monótonicamente y eventualmente será infinito.

Para el pulso supergausiano de orden 12 las zonas de Fresnel se hacen más evidentes aún. Para la anchura inicial  $a_0 = 0.5$  se pueden apreciar unas oscilaciones que se identifican con las primeras zonas de Fresnel.

Se ha observado que las zonas de Fresnel son más notorias cuanto mayor es el orden del pulso en uso. Es posible definir la profundidad de modulación como la diferencia

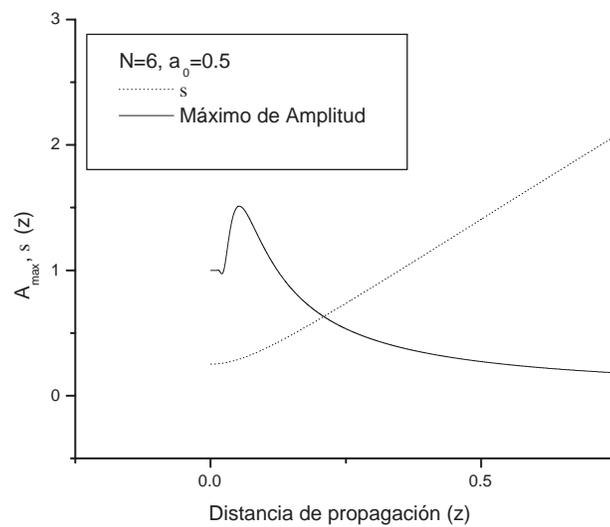


Figura 4.7:  $N = 6, a_0 = 0.5$

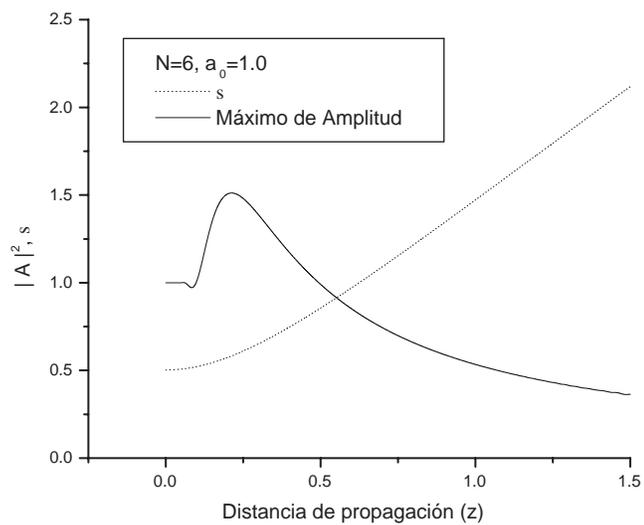


Figura 4.8:  $N = 6, a_0 = 1.0$

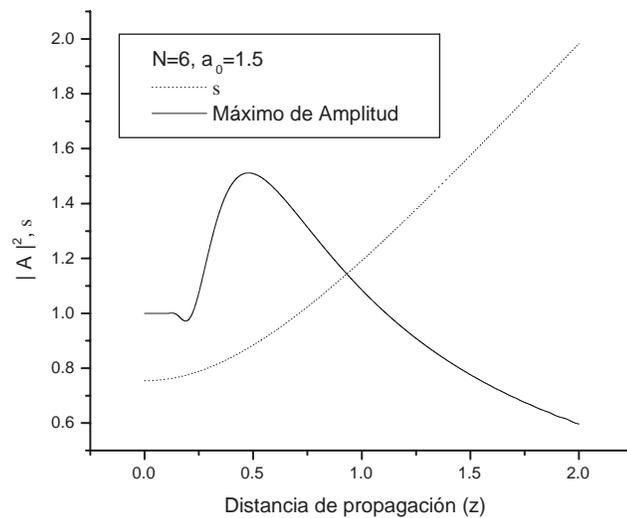


Figura 4.9:  $N = 6, a_0 = 1.5$

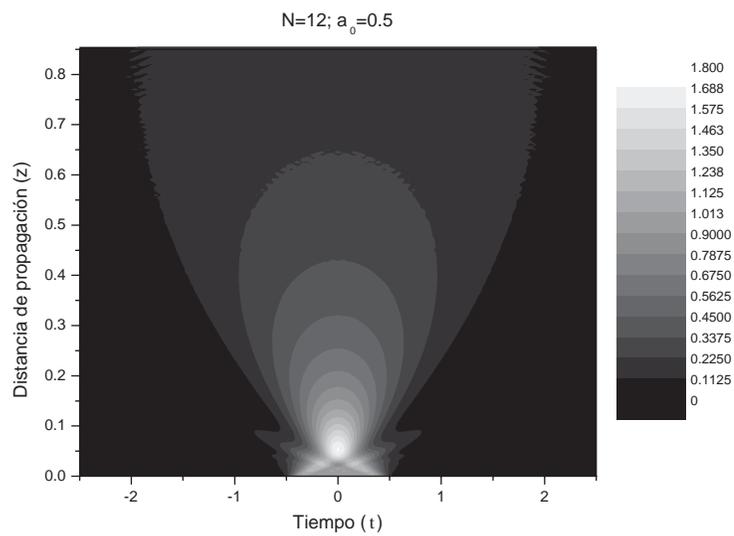


Figura 4.10:  $N = 12, a_0 = 0.5$

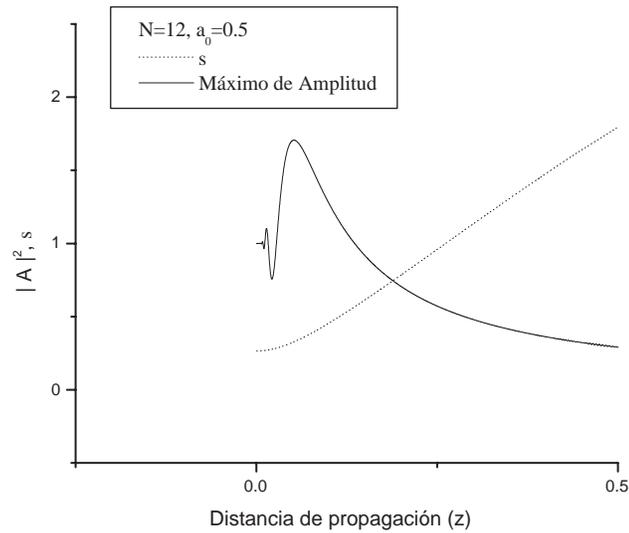


Figura 4.11: Profundidad de Modulación,  $N = 12$ ,  $a_0 = 0.5$

entre el máximo global y la potencia original. En el caso del pulso gaussiano no existe esta profundidad pues las componentes espectrales varían constantemente (es decir, que no hay componentes espectrales en fase como en el caso del pulso supergausiano o el pulso rectangular). Sin embargo para pulsos de orden mayor aparece y aumenta esta profundidad. Para  $N = 6$  la profundidad de modulación es de 0.5 independientemente de la duración inicial del pulso. Por otra parte, los pulsos con  $N = 12$  presentan una profundidad de modulación aproximadamente de 1.0 independientemente de la duración inicial. Se puede notar cómo la profundidad de modulación no depende de la duración inicial, sino de  $N$ , es decir del perfil de los pulsos.

De esta manera se puede observar en las gráficas que la anchura rms aumenta también monótonicamente y va a infinito para distancias grandes, mientras que la potencia máxima del pulso decae monótonicamente después del máximo global. Este efecto, como se ha mencionado antes, es análogo a la difracción en la rendija, donde a menor apertura

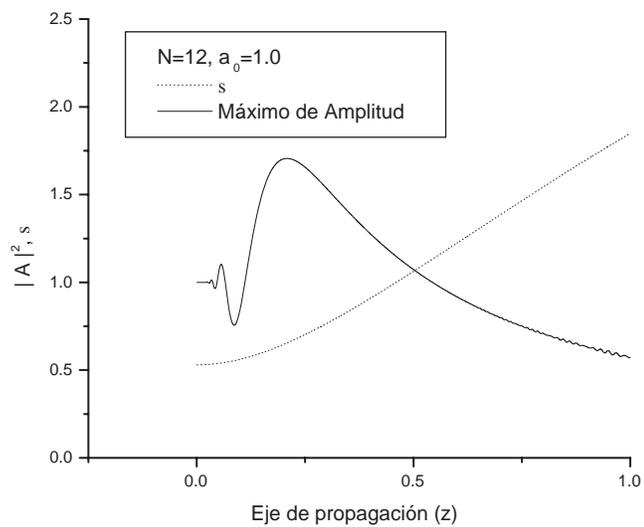


Figura 4.12: Profundidad de Modulación,  $N = 12, a_0 = 1.0$

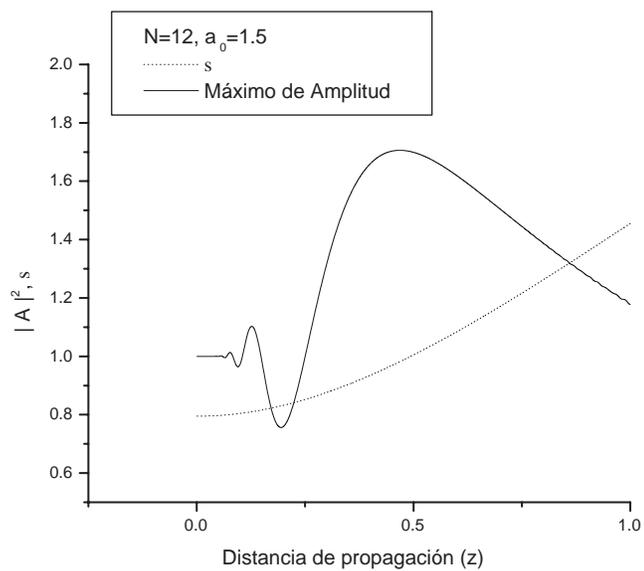


Figura 4.13: Profundidad de Modulación,  $N = 12, a_0 = 1.5$

más ancho será la imagen difractada. De las gráficas se puede concluir también que en este caso es más conveniente el empleo de pulsos supergaussianos ya que a distancias relativamente grandes aparecen oscilaciones correspondientes a las zonas de Fresnel donde la amplitud es máxima mientras que para pulsos gaussianos esto no ocurre. Más adelante podrá verse que en el caso de los trenes de pulsos los resultados de diferente naturaleza.