

# Capítulo 3

## Solución de la Ecuación de Propagación

Se ha encontrado ya una expresión muy manejable de la ecuación de dispersión. En este capítulo tal ecuación será resuelta para estructuras periódicas en general. Posteriormente se procederá a estudiar algunos casos particulares de interés como lo son los pulsos rectangulares. Esto permitirá observar algunas desventajas que ofrece la utilización de tal perfil de pulsos y la opción que se tiene para resolver estas desventajas.

### 3.1 Generalidades

Para una fibra óptica de longitud  $L$  y un tren de pulsos  $A(z, T)$  se tiene la ecuación diferencial

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} \quad (3.1)$$

con  $A(z = 0, \tau) = f(\tau)$  y  $f$  de la forma

$$f(\tau) = f(\tau + T)$$

es decir, periódica con periodo  $T$ , recuérdese que  $z$  y  $\tau$  son adimensionales como se ha indicado en el capítulo anterior. Se busca la forma de  $A(z, \tau)$  para cualquier distancia

$z$ , en particular para la salida. Esto es, la forma de la señal en cierta distancia, y en función del tiempo:  $A(z = L, \tau)$ .

Para la solución de esta ecuación se utilizará el método de Fourier. Una función periódica como  $f(\tau)$  se puede escribir en su serie de Fourier como

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z) e^{-i\omega_n \tau} \quad (3.2)$$

con coeficientes

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{+i\omega_n \tau} d\tau \quad (3.3)$$

Es obviamente imposible calcular todos los coeficientes de la serie de Fourier pues esta es infinita. Sin embargo, es posible asegurar que para un número grande de términos la función quedará suficientemente bien aproximada, es decir

$$f(\tau) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n(z) e^{-i\omega_n \tau}.$$

Para  $N$  suficientemente grande el error de aproximación será  $\sim O(e^{-N})$ , los límites de la serie se establecen de esa manera puesto que la función  $f(\tau)$  que se elige es simétrica.

La ecuación 3.1 se re-escribe

$$i \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{\partial c_n}{\partial z} e^{-i\omega \tau} = \frac{1}{2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n (-\omega_n^2) e^{-i\omega \tau}$$

de donde se obtiene para cada uno de los valores de  $n$ ,

$$i \frac{dc_n}{dz} = -\frac{1}{2} \omega_n^2 c_n \quad (3.4)$$

con coeficientes en la entrada ( $z = 0$ )

$$c_n(z = 0) = C_n^0 \quad (3.5)$$

Esto quiere decir que 3.4 y 3.5 representan un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales. Ahora serán resueltas cada una de estas ecuaciones con el fin de obtener la forma general de la función  $A(z, \tau)$  en cualquier longitud de la fibra.

La ecuación 3.4 se escribe

$$2i \frac{dc_n}{dz} = -\omega_n^2 c_n$$

con condición inicial 3.5 puede ser resuelta por separación de variables, resultando ser

$$c_n(z) = C_n^0 \exp \left\{ \frac{i}{2} \omega_n^2 z \right\} \quad (3.6)$$

De esta manera podemos conocer la forma de los pulsos de salida, los coeficientes de Fourier para la señal de salida son

$$c_n(z = L) = C_n^0 \exp \left\{ \frac{i}{2} \omega_n^2 L \right\} \quad (3.7)$$

y la solución deseada para el tren de pulsos para cualquier longitud de la fibra óptica es

$$A(z, \tau) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} C_n^0 \exp \left\{ i \frac{\omega_n^2 z}{2} - i \omega_n \tau \right\}. \quad (3.8)$$

Esta es la forma general del tren de pulsos en cualquier punto sobre el eje de propagación. Obsérvese que si  $z = 0$  se recupera la forma original de la función  $f(\tau)$ .

## 3.2 Casos Particulares

Ahora consideremos el caso en que los pulsos de entrada de la fibra son rectangulares y centrados en el origen, esto es:

$$f(\tau) = \begin{cases} f_0 & x \in (-a_0/2, a_0/2) \\ 0 & x \notin (-a_0/2, a_0/2) \end{cases}$$

Los coeficientes de la señal de entrada de la fibra se calculan como se indica en 3.3, de modo que

$$\begin{aligned} C_n^0 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_0 e^{i\omega_n \xi} d\xi \\ C_n^0 &= \frac{f_0}{iT\omega_n} e^{i\omega_n \xi} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ C_n^0 &= \frac{2f_0}{T\omega_n} \text{sen}(\omega_n \tau/2). \end{aligned}$$

Es apropiado definir la función seno cociente o *sinc* de la siguiente manera

$$\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}, \quad \text{sinc}(0) = 1$$

con la finalidad de expresar los coeficientes como

$$C_n^0 = \frac{f_0 \tau}{T} \text{sinc} \left( \frac{\omega_n \tau}{2} \right) \quad (3.9)$$

o alternativamente, teniendo en cuenta que  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$

$$C_n^0 = \frac{f_0 \tau}{T} \text{sinc} \left( \pi \frac{\tau}{T} n \right) \quad (3.10)$$

y claramente

$$C_0^0 = \frac{f_0 \tau}{T}.$$

Las expresiones 3.9 y 3.10 son equivalentes, sin embargo con la segunda es más fácil realizar los cálculos correspondientes. De este modo, recordando que  $f_0 = A_0$  se obtiene la expresión específica de  $A(L, t)$  para este caso:

$$A(L, t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{A_0 \tau}{T} \text{sinc} \left( \pi \frac{\tau}{T} n \right) \exp \left\{ i \frac{\omega_n^2 L}{2} - i \omega_n t \right\} \quad (3.11)$$

con módulo cuadrado

$$|A|^2 = \left( \sum c_n^0 \cos \vartheta_n \right)^2 + \left( \sum c_n^0 \sin \vartheta_n \right)^2$$

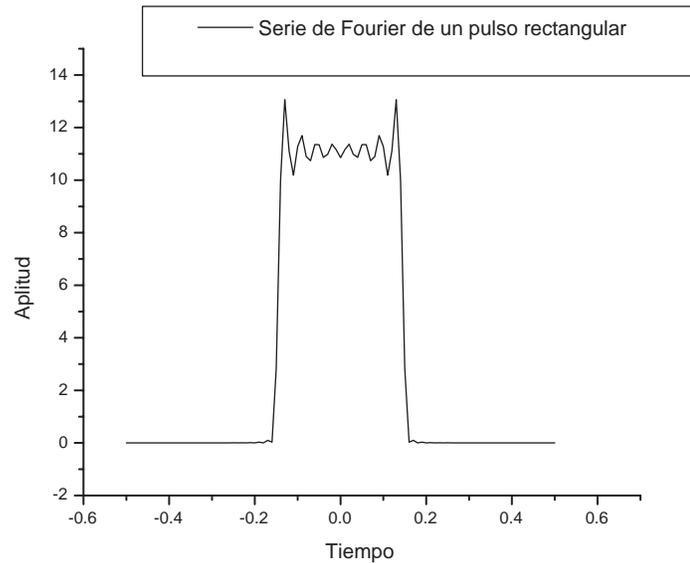


Figura 3.1: Se muestra el efecto Gibbs para un pulso rectangular.

y fase

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sum c_n^0 \sin \vartheta_n}{\sum c_n^0 \cos \vartheta_n} \right].$$

Estas expresiones serán de utilidad para realizar los cálculos correspondientes en el language de programación FORTRAN.

### 3.2.1 Efecto Gibbs

En el resultado obtenido para el caso de un pulso rectangular se puede notar que cerca de los puntos de discontinuidad la serie de Fourier se separa notablemente de la función original. De la definición de serie de Fourier se esperaría que mientras se le añaden términos las gráficas serán más y más parecidas. Sin embargo, esto no parece cumplirse, pues la gráfica de la serie siempre tiene unas oscilaciones fuertes que se alejan de la gráfica original en las regiones cercanas a las discontinuidades, lo cual es una aparente contradicción a la teoría de Fourier. Este efecto se conoce como efecto

Gibbs. La explicación de este fenómeno se puede hallar en la definición de la serie de Fourier para una función  $f(\tau)$ :

$$f(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n \tau} \quad \text{con los coeficientes } c_n \text{ definidos igual que antes}$$

Para justificar esta definición es necesario demostrar un teorema de convergencia, la serie de Fourier debe converger uniformemente a la función  $f(\tau)$ . Es necesario notar que en el teorema de convergencia se utiliza como métrica la norma de la integral de las funciones, de modo que lo que converge a  $f$  es la gráfica de la serie y no la serie. Dicho en otras palabras, el area comprendida entre las gráficas de las funciones es lo que tiende a anularse y no la distancia máxima entre ellas. El resultado de esto es que la gráfica de la serie (Fig. 3.1) tendrá frecuencias de amplitud de un 18% [3] más que la función original cerca de cada una de las discontinuidades.

El primero en notar este efecto fue A.A. Michelson (célebre por la invención de instrumentos de medición de alta precisión como el interferómetro) cuando fabricó una máquina para producir gráficas. Intentó graficar la función de diente de sierra introduciendo 80 coeficientes de Fourier, Gibbs aclaró que esto se debía a una confusión dada la ambigüedad de términos [13], confusión que ha sido aclarada en esta sección y que Gibbs aclaró en dos cartas sucesivas a la revista Nature. Este efecto es también conocido como efecto Wilbraham-Gibbs por haber sido Wilbraham quien descubrió primero el efecto, unos sesenta años antes que Gibbs.

La manera de eliminar las complicaciones es introducir un pulso continuo que tenga forma parecida a la deseada. El perfil adecuado para este fin es el del pulso supergausiano que tiene la forma

$$f(\tau) = f_0 \exp \left\{ -(t/\tau_0)^N \right\},$$

donde  $N$  es el orden del pulso y debe ser par. Para valores grandes de  $N$  se puede

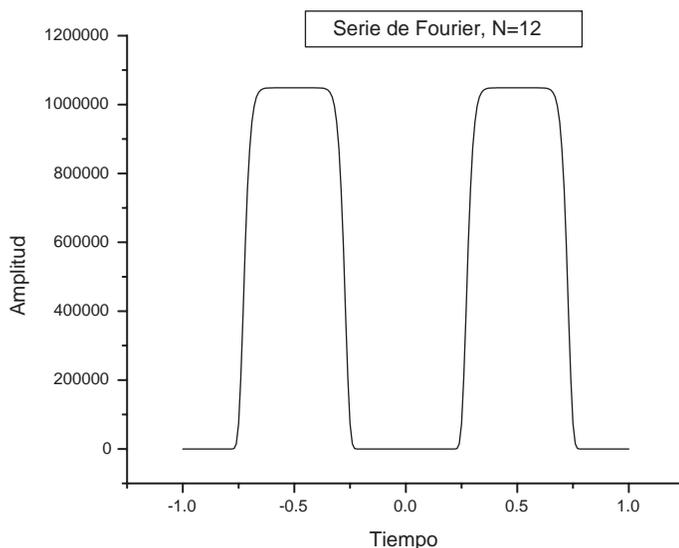


Figura 3.2: Corrección del efecto Gibbs

observar que la forma se aproxima a la de un pulso rectangular. La gráfica 3.2 representa la serie de Fourier de un pulso supergausiano de orden 10. El perfil supergausiano es de gran utilidad para realizar los cálculos de propagación de pulsos en fibras ópticas. Por otro lado se debe añadir que se considera que no existen *pulsos rectangulares* en la naturaleza, sino contornos suaves y continuos, de modo que es absolutamente justificable el uso de pulsos con perfil supergausianos en la teoría de propagación.

### 3.2.2 Efecto Talbot

Son ampliamente conocidos los efectos de difracción en la rendija (i.e. abertura rectangular) y en la rejilla (i.e. varias aberturas iguales con la misma separación), en este punto es conveniente establecer una analogía entre tales casos y los pulsos en la fibra.

El efecto Talbot en el caso de la difracción se da para las rejillas periódicas. Este efecto debido a la interferencia provoca que la forma del campo sea periódica a lo largo

de el eje de propagación, Fox Talbot descubrió este fenómeno en 1836 y se conoce también como efecto de autoimagen.

A continuación será descrito matemáticamente este efecto introduciendo analogías apropiadas entre difracción y dispersión. El campo  $U(x, y)$  transmitido detrás de la rejilla con  $z$  el eje de propagación de acuerdo a la notación de Goodman [6] se escribe:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (3.12)$$

donde  $x$  es el eje transversal de la rejilla (i.e. el eje donde es periódica), y en el eje  $y$  la rejilla es constante, la integral aquí presentada ya ha pasado por la aproximación de Fresnell, donde la distancia de observación es mayor al tamaño de la rejilla aun que del mismo orden. La analogía con el caso del tren de pulsos se realiza haciendo los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y &\rightarrow x \\ z &\rightarrow z \end{aligned}$$

Puesto que en el caso de los pulsos, la señal será captada sobre el eje de propagación, el campo solamente dependerá de  $z$  y de  $t$ , mientras que la rejilla en dirección  $y$  no cambia, por lo que

$$U(x, z) \propto \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, 0) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} (x - \xi)^2 \right\} d\xi.$$

El campo justo detrás de la rejilla se puede escribir en serie de Fourier de la siguiente manera

$$U(x, 0) = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{-i\nu_n x} \quad \text{con } \nu_n = 2\pi\nu n$$

que tiene exactamente la misma forma que el tren de pulsos de entrada (ec. 3.2). De este modo sabemos que la analogía es posible y que el campo en la entrada de la fibra

tiene la misma expresión matemática:

$$A(z = +0, t) = \sum C_n^0 e^{-i\omega_n t} \quad \text{con } \omega_n = 2\pi n/T.$$

Para la rejilla se obtiene entonces la expresión

$$U(x, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \sum B_n e^{i\nu_n x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2]\right\} d\xi. \quad (3.13)$$

que se conoce como integral de Fresnel y que tiene como solución

$$U(x, z) = \sum B_n \exp[i\pi(n\nu)^2 \lambda z] \exp[i2\pi\nu n x] = \sum B_n \exp\left\{\frac{i}{2k} \nu_n^2 z - i\nu_n x\right\}$$

que de nuevo tiene exactamente la forma matemática del tren de pulsos, esta expresión se presenta a continuación para comparar facilmente:

$$A(z, t) = \sum C_n^0 \exp\left\{i\frac{\omega_n^2 z}{2} - i\omega_n t\right\}.$$

De las expresiones del campo para ambos casos se puede observar que para que se repita la forma original de la rejilla o de los pulsos, es necesario que la primera parte del exponente sea igual a  $2\pi$ , por tal razón, la distancia de talbot en el caso de la rejilla será  $z_{Tal} = 2/(\nu^2 \lambda)$ , mientras que para los pulsos será

$$z_{Tal} = \frac{T^2}{\pi}.$$

Se puede concluir que la analogía matemática se presenta desde el planteamiento de los problemas, es decir que existe una relación matemática entre la integral de Fresnel 3.13 y la ecuación de dispersión 3.1. La importancia del efecto Talbot radica en que es posible recuperar señales a diferentes distancias debido a los efectos de interferencia entre pulsos. Los parámetros importantes en este caso serían la constante de dispersión  $\beta_2$  y el periodo de la señal  $T$ , el primero depende de la fibra en si misma y el segundo de la capacidad tecnológica de producir pulsos ultracortos suficientemente cercanos uno de otro. El comportamiento de los trenes de pulsos será estudiado con mas detalle en este trabajo.