Capítulo 2

Ecuación de Propagación

2.1 Generalidades

Como se ha mencionado antes, el problema de la propagación de la luz en una guía de onda se ha resuelto para ciertos casos de utilidad. Tal es el caso de la guía de onda cilíndrica, del cual la fibra óptica convencional es un caso especial. En esta sección se ofrece una manera de deducir la ecuacion de dispersión para una fibra óptica convencional. En esta derivación se ha considerado que los efectos no lineales son despreciables y se procede desde las ecuaciones de Maxwell. Es importante mencionar que el método de derivación y las consideraciones que se toman han sido ampliamente aplicadas gracias a la simplificación que proporcionan. Este método ha sido utilizado por Agrawal [1], Vyshloukh y Mateeva entre otros.

Las ecuaciones de Maxwell en el sistema mks son las siguientes

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}}, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}}, \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{2.4}$$

En el caso de las fibras ópticas, al *no haber cargas libres*, la densidad de corriente $\mathbf{J}$ y ladensidad de carga ρ son cero. Los vectores de desplazamiento eléctrico y magnético se relacionan con los campos respectivos mediante las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \end{aligned}$$

con $\mathbf{P}$ y $\mathbf{M}$ las polarizaciones eléctrica y magnética respectivamente. Nuevamente en la fibra óptica $\mathbf{M} \simeq \mathbf{0}$. Para obtener la ecuación de propagación, se procede de la ecuación 2.1 sacándo su rotacional:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

de donde se obtiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \tag{2.5}$$

Del lado izquierdo de la ecuación se sabe, del producto vectorial triple, que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

pero de la ecuación 2.2, como la densidad de carga ρ es cero

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = 0.$$

Esto en general no es cierto puesto que ϵ es una función de x, y, sin embargo se sabe que $\nabla \epsilon << \epsilon$ por el perfil conocido del índice de refracción, de tal manera que la aproximación es válida y se obtiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}.$$

La ecuación 2.5 quedará entonces como

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mathbf{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}} - \boldsymbol{\mu_0} \mathbf{\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}}$$

y finalmente se llega a la ecuación de propagación

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial\mathbf{t^2}} = \mu_\mathbf{0}\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial\mathbf{t^2}}. \tag{2.6}$$

La polarización $\mathbf{P}$ deberá ser escrita en términos de $\mathbf{E}$ según la relación

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \epsilon_\mathbf{0}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\mathbf{t}-\tau)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},\tau)\mathbf{d}\tau, \tag{2.7}$$

puesto que para pulsos cortos la respuesta del medio es *inercial.* $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ depende no solo del presente, sino también del pasado. Por esta razón la función $\chi(t)$ es una función escalonal

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \chi(t) & > 0 \end{cases}$$

Estas consideraciones permitirán re escribir la Ec. 2.6 de una manera más sencilla de manejar.

2.2 Aproximación de Envolvente Lenta

En las fibras ópticas, es posible considerar el campo $\mathbf{E}$ y la polarización $\mathbf{P}$ como funciones que resultan del producto de una componente que oscila rápidamente y otra que lo hace lentamente, es decir

$$E = \frac{1}{2}[\hat{E}(z,t)e^{-i\omega_0 t} + c.c.]$$

$$P = \frac{1}{2}[\hat{P}(z,t)e^{-i\omega_0 t} + c.c.]$$

Esta aproximación es conocida como *aproximación de envolvente con variación lenta* (Slowly Varying Envelope Approximation SVEA) y es válida bajo la suposición de que el campo óptico preserve su polarización y que sea cuasiminocromático, es decir que el ancho de frecuencia sea de $\Delta\omega/\omega = T_{opt}/T << 1$, lo cual ocurre con pulsos de

$T \geq 10^{-13}s$ de duración [1]. Si se utiliza una $\lambda \simeq 1.5\mu m$, el periodo óptico será del orden de los picosegundos pues

$$T_{op} = \frac{\lambda}{c} \simeq 5(10)^{-15} seg$$

y por tanto $\Delta\omega/\omega \simeq 0.05 << 1$ con lo cual queda satisfecha la condición para la aproximación.

La SVEA será utilizada para obtener una expresión apropiada de la ecuación de propagación. Es conveniente también definir la transformada de Fourier para una función f de la siguiente manera:

$$f_F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau; \tag{2.8}$$

y la transformada de Fourier inversa

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(f(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_F(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega. \tag{2.9}$$

En consecuencia, las derivadas temporales para una función que decae en $\pm\infty$ en el espacio de Fourier son

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -i\omega\mathcal{F}(f(t)) = -i\omega f_F(\omega)$$

y

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = -\omega^2\mathcal{F}(f(t)) = -\omega^2 f_F(\omega).$$

En la dirección de propagación la relación 2.7 es

$$P(z,t) = \epsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t-\tau)E(z,\tau)d\tau,$$

que en el espacio de Fourier se ve

$$P_F(z,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(z,t)e^{i\omega t}dt = \epsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t-\tau)E(z,\tau)e^{i\omega t}d\tau dt,$$

colocando los factores apropiados, quedará

$$P_F(z,\omega) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-\tau) e^{i\omega(t-\tau)} dt \int_{-\infty}^{\infty} E(z,\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Es notorio que ambas integrales coinciden con las transformadas de Fourier respectivas, entonces

$$P_F(z,\omega) = \epsilon_0 \chi_F(\omega) E_F(z,\omega),$$

donde $\chi_F(\omega)$ se puede considerar que depende de la frecuencia: $\xi_F(\omega) = \xi_F(\omega_0) - cte$. De este modo la ecuación 2.6 en la dirección de propagación se re-escribe

$$\frac{\partial^2 E_F}{\partial z} + k_0^2 \epsilon(\omega) E_F = 0 \tag{2.10}$$

con $k_0 = \omega/c$, $\epsilon(\omega) = 1 + \chi_F(\omega) = n^2(\omega)$ y evidentemente en el espacio de Fourier.

Para resolver la Ec. 2.10 se procede a considerar al campo $E_F(z,\omega)$ una función $A_F e^{-ik_0 z}$ puesto que es válida la aproximación de la envolvente lenta, de este modo de observa que

$$\frac{\partial^2 E_F}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A_F}{\partial z^2} e^{ik_0 z} + 2ik_0 \frac{\partial A_F}{\partial z} e^{ik_0 z} - k_0^2 A_F e^{ik_0 z}.$$

Debido a la SVEA, se puede despreciar la segunda derivada de A_F respecto a z, puesto que $\partial_z^2 A_F \ll k_0 \partial_z A_F \ll k_0^2 A_F$, razon por la que la ecuación queda

$$2ik_0 \frac{\partial A_F}{\partial z} - k_0^2 A_F + k_0^2 \varepsilon(\omega) A_F = 0. \tag{2.11}$$

Al analizar el tercer término de la ecuación anterior y recordando la definición de la constante de propagación β (ec 1.3) se puede observar que

$$k_0^2 \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) = \beta^2(\omega).$$

Habiendo definido $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, la ecuación 2.11 queda apropiadamente expresada como

$$2i \frac{\partial A_F}{\partial z} + 2\beta_1 \tilde{\omega} A_F + \beta_1^2 \tilde{\omega}^2 A_F + \beta_2 \tilde{\omega}^2 A_F = 0.$$

Ahora es conveniente regresar al dominio temporal, y recordar que $\beta_1 = 1/v_g$, de modo que la ecuación de propagación será

$$2i\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial t}\right) - \frac{1}{v_g^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Como la velocidad de grupo es la velocidad de la luz, el segundo término (que contiene v_g^{-2}) se desprecia por ser muy pequeño y la ecuación de dispersión toma la forma

$$2i\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial t}\right) - \beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

En este punto es conveniente introducir un cambio de variable definiendo un tiempo $\tilde{t}$ que se mide en un sistema de referencia que viaja a la velocidad de grupo v_g, que es $\tilde{t} = t + z/v_g$ y una variable $\xi = z$ donde

$$\begin{aligned} dt &= d\tilde{t} - dz/v_g, \quad \text{y} \\ dz &= d\xi. \end{aligned}$$

La derivada total de A es

$$dA = \frac{\partial A}{\partial z}dz + \frac{\partial A}{\partial t}dt = \frac{\partial A}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}}d\tilde{t} \tag{2.12}$$

y aplicando el cambio de variable

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial t}\right)d\xi + \frac{\partial A}{\partial t}d\tilde{t}.$$

De la expresión anterior se pueden identificar

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{\partial A}{\partial \xi}; \qquad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}},$$

por lo tanto en las nuevas variables la ecuación será

$$2i\frac{\partial A}{\partial \xi} = \beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{t}^2}.$$

Finalmente se considera adecuado trabajar con variables adimensionales, esto es normalizadas de la siguiente manera:

$$z = \xi / L_D \qquad , \qquad \tau = \tilde{t} / \tau_0,$$

donde L_D se define como la longitud de dispersión y es $L_D = \tau_0^2 / |\beta_2|$. Esto nos permite obtener una representación de la ecuación de dispersión muy manejable sin constantes, esta forma de la ecuación es

$$2i \frac{\partial A}{\partial z} = -sign(\beta_2) \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}, \tag{2.13}$$

donde $sign(\beta_2)$ significa *el signo de* β_2 y denota si el régimen de dispersión es normal o anómalo. Como se ha dicho antes, los sistemas de comunicación actuales utilizan regularmente longitudes en el régimen anómalo ($\lambda \simeq 1.5\mu m$, ver fig. 1.7), por lo que en lo sucesivo $sign(\beta_2)$ se tomará como negativo. La solución de esta forma de la ecuación de dispersión es sencilla. Esto permite analizar diversos casos de dispersión, como lo son la dispersión de pulsos individuales y los trenes de pulsos. Estos casos serán descritos más adelante.

La ecuación 2.13 es equivalente a la ecuación de difracción, lo cual hace posible introducir la noción de una analogía matemática entre los efectos difracción y dispersión. Para una rendija paralela a un eje y, iluminada sobre un eje z de ancho a_0 se tiene la ecuación de difracción

$$2i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con las variables adimensionales $z = z/L_{dif}$ y $x = x/a_0$. Esta ecuación puede derivasrse de consideraciones equivalentes a las utilizadas en este capítulo. En el capítulo siguiente se trabajará a fondo con esta propiedad y se obtendrán conclusiones de enorme utilidad al respecto.