

Capítulo 2

Producción de rayos-X

2.1. Introducción

Cuando se producen rayos-X y se hacen interactuar con la materia, en el caso general cuatro fenómenos físicos ocurren: el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton, el fenómeno de dispersión de Rayleigh y la creación de pares, unos con mayor presencia que otros. A continuación se revisarán cada uno de estos efectos, haciendo hincapié en el fenómeno físico que les incumbe.

2.2. Interacción fotón materia

2.2.1. Efecto fotoeléctrico

Para finales del siglo XIX los experimentos realizados por *Hertz*, mostraban que ciertos metales liberaban electrones (e^-) cuando sobre éstos se hacía incidir luz con una frecuencia relativamente alta (luz con una frecuencia $\nu \sim 10^{16} \text{seg}^{-1}$),

“Hertz utilizó una antena con una esfera de metal en cada extremo, doblada en forma de circunferencia para formar una pequeña abertura entre las esferas. Las ondas

electromagnéticas inducen una diferencia de potencial y ésta se manifiesta en forma de chispas que saltan a través de ella. Hertz observó que las chispas saltaban con mayor facilidad cuando la productora de chispas se iluminaba.” [9]

En la figura:2.1 se muestra un esquema del aparato que se utiliza actualmente para medir la corriente fotoeléctrica (I_f).

Básicamente, el experimento está compuesto por dos electrodos (ánodo y cátodo), que se encuentran en el interior de una esfera de vidrio que está al vacío; esta pequeña esfera con dos electrodos está conectada a un circuito exterior que contiene un amperímetro, que se encuentra entre la fuente de voltaje que alimenta a los electrodos. Una vez listo el arreglo experimental, si aplicamos unos cuantos volts a los electrodos en ausencia de luz, entonces en el amperímetro se podrá observar que no fluye corriente entre los electrodos.

Pero si hacemos incidir luz sobre el electrodo cargado negativamente (cátodo o fotocátodo), con una frecuencia relativamente alta (frecuencias del orden de $\nu \sim 10^{16} \text{seg}^{-1}$) como lo es la luz ultravioleta y otras más, como se muestra en la figura: 2.2, entonces empezaremos a registrar una corriente, llamada corriente fotoeléctrica I_f proveniente del cátodo;

“El hecho de que la luz contribuyera a que las chispas saltaran con mayor facilidad de la parte negativa, le sugería a Hertz que los electrones provenían del cátodo.” [9]

Entonces si realizamos una gráfica $I(V)$ como se observa en la figura:2.3 podremos observar que para un voltaje aplicado de unos pocos volts entre los electrodos, se detectará una I_f en el amperímetro, pero si el voltaje se vuelve mayor, entonces la I_f se volverá constante para cualquier voltaje de aplicación entre los electrodos.

Hasta este punto la $I_f \propto \mathcal{I}_{luz}$ (intensidad de la luz \mathcal{I}_{luz}), pues una vez que se llegue a una corriente de saturación en el ánodo y en el cátodo, inducido por el voltaje aplicado, entonces los e^- que se encuentran en la superficie del cátodo, tendrán gran probabilidad de ser golpeados por los fotones de la luz incidente.

Si el voltaje es suficiente para saturar de carga a los electrodos, entonces el cátodo tendrá un gran número de e^- en la superficie, y como la intensidad de la luz es

$$[\mathcal{I}_{luz}] = \frac{\text{energía}}{\text{área} - \text{tiempo}},$$

entonces habrá una corriente con un número constante de e^- , y a menos que aumentemos la intensidad de la luz incidente, y con esto el número de fotones que transmiten su energía a un número de e^- , entonces la corriente será constante y no aumentará de magnitud sin importar el valor del voltaje.

Por otro lado, si cambiamos la polaridad del voltaje, y con esto la dirección de la corriente, esto provocará una dificultad al paso de los e^- a través de lo que antes era el cátodo, pues ahora tiene un exceso de cargas positivas. Ahora bien, si aplicamos un poco de voltaje negativo entre los electrodos, lo que se observa es una disminución de la I_f hasta llegar a una $I_f = 0$ y, por lo tanto, a un voltaje de corte; este voltaje de corte multiplicado por la carga del e^- nos dará la energía máxima que el e^- puede alcanzar $E_{max,e^-} = -V_{corte} = eV_c$, es decir para $V > V_c$ no habrá electrones que puedan escapar de la superficie del metal a menos que la frecuencia de la luz sea mayor.

Esto sugiere que para cada metal habrá una función de trabajo W diferente necesaria para que un e^- pueda ser expulsado. También de los experimentos se concluye que el V_c es independiente de la intensidad de la luz; es decir, no importa cuantos fotones choquen con los e^- , si éstos no cuentan con una frecuencia mayor a una anterior para arrancar más e^- del interior del metal, en tal caso el voltaje de corte será el mismo, e independiente de la intensidad de la luz incidente.

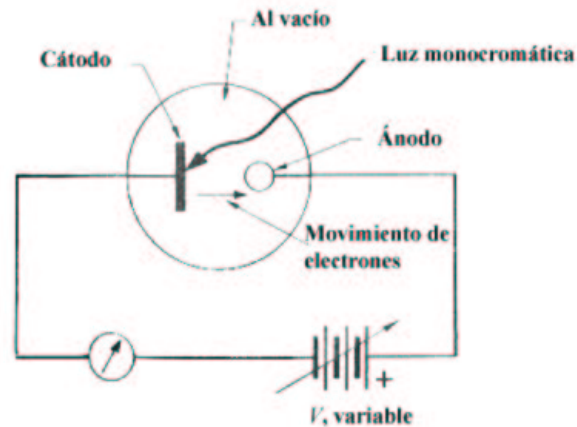


Figura 2.1: Esquema del arreglo experimental del efecto fotoeléctrico, que consta de dos electrodos (ánodo y cátodo), una fuente de voltaje variable que sea capaz de cambiar la polaridad del voltaje de aplicación entre los electrodos, y un amperímetro que mide la corriente fotoeléctrica.

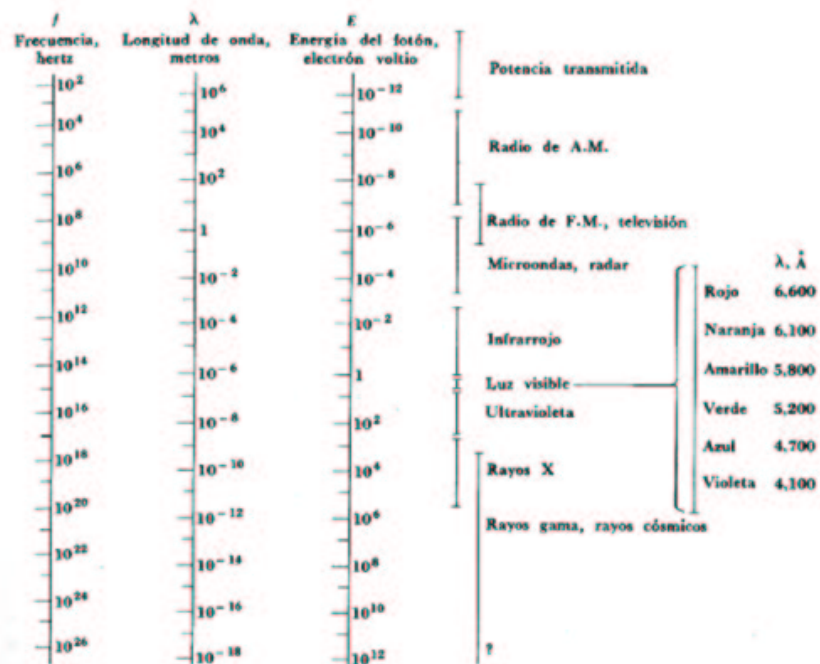


Figura 2.2: Espectro electromagnético con frecuencias, longitudes de onda y energías correspondientes a cada parte del espectro electromagnético.

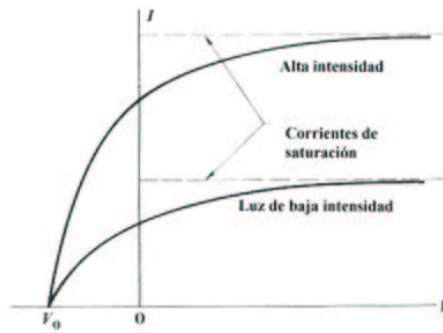


Figura 2.3: Gráfica que demuestra la dependencia de la corriente fotoeléctrica con el voltaje aplicado, donde la corriente fotoeléctrica es proporcional a la intensidad de la luz, pero el voltaje de corte no lo es.

2.2.2. Explicación cuántica del efecto fotoeléctrico

Para finales del siglo XIX, aún no se contaba con una explicación satisfactoria de por que el V_c no dependía de la intensidad de la luz incidente.

Las teorías clásicas de la física que gozaban gran popularidad entre los físicos de aquella época, llegaban a la conclusión de que el tiempo en que una onda electromagnética transmitía energía suficiente para expulsar un e^- de la superficie o del interior de un metal, como consecuencia de consecutivos choques con frentes de ondas esféricas, tenían que ser tiempos “...del orden de 10^2 seg aproximadamente”[6]; este tiempo de retraso no concordaba con los resultados experimentales. Según la teoría clásica ondulatoria, la energía cinética promedio de los e^- es proporcional a la amplitud de la vibración, provocada por el choque de los e^- con frentes de onda esféricas y esto, a su vez, es proporcional a la amplitud del campo eléctrico generado por los e^- en vibración, donde finalmente esto último es proporcional a la $\sqrt{\mathcal{I}_{luz}}$ y por lo tanto $\langle E_{cin,e^-} \rangle \propto \sqrt{\mathcal{I}_{luz}}$. Por esta razón no se podía entender por qué en los experimentos, el V_c y la energía máxima de los e^- $E_{max,e^-} = -V_{corte} = eV_c$ era independiente de la intensidad de la luz.

A principios del siglo XX *Einstein* propuso una forma diferente de explicar el efecto

fotoeléctrico, partiendo de la teoría cuántica de la emisión de radiación de cuerpo negro de *Planck*.

Por el contrario de las explicaciones clásicas del efecto fotoeléctrico, donde la energía es un continuo que se va dispersando de la fuente al punto de choque con los e^- ; *Einstein* propuso que la energía de una onda electromagnética, está cuantizada en múltiplos enteros de $h\nu$ ($0, h\nu, 2h\nu, \dots, nh\nu$), esta idea permite entre otras cosas poder imaginar que la energía del fotón está bien caracterizada, tanto al inicio cuando es producida la radiación electromagnética como al final; así también esto mismo implica que si la energía del cuanto de luz pasa de $nh\nu$ a $(n - 1)h\nu$, la radiación electromagnética emitirá un paquete de energía múltiplo entero de $h\nu$.

Cuánticamente, cuando un fotón con energía $E_f = h\nu$ incide sobre un e^- que se encuentra dentro de un átomo, para que éste salga expulsado de alguna de las capas atómicas (K, L, \dots), se necesita que el fotón incidente tenga una energía mayor a la energía de enlace que mantiene amarrado al e^- dentro del átomo, $E_f > E_{enlace}$, para que éste pueda salir del metal. Por conservación de la energía el e^- tendrá una energía igual a

$$E_{e^-} = E_f - E_{enlace}. \quad (2.1)$$

Para que el e^- tenga una energía suficiente definida como la energía para escapar de la atracción del átomo, tendrá que vencer una función de trabajo W , necesaria para que un e^- pueda ir de una capa interna de los átomos del metal, hasta la superficie del metal. Cuando la función de trabajo $W = 0$, entonces el e^- está en la superficie.

De acuerdo a la ecuación anterior podemos obtener una función que da la energía cinética máxima de los e^- , y que es función lineal de la frecuencia de la radiación incidente ν

$$E_{max,e^-}(\nu) = h\nu_f - W. \quad (2.2)$$

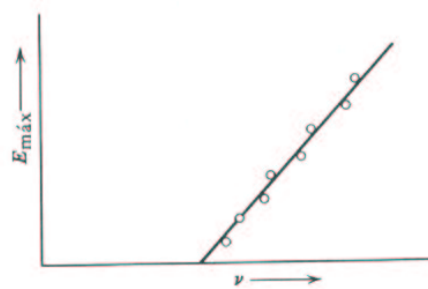


Figura 2.4: Datos experimentales que concuerdan muy bien con la expresión que encontró *Einstein*, para explicar el efecto fotoeléctrico, utilizando como base las teorías cuánticas de *Planck*.

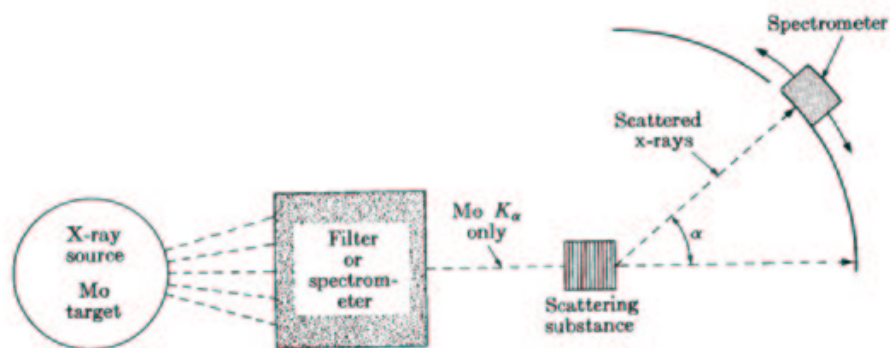


Figura 2.5: Esquema del arreglo experimental del efecto Compton, que consta de una fuente de rayos-X, un filtro para generar un haz monoenergético y por último un fotodetector.

Como se puede observar en la figura:2.4 la función (2.2) que es el resultado de aplicar las ideas de *Einstein* está en concordancia con los datos experimentales que se muestran, cuando se grafican las energías máximas que nos dan los voltajes de corte y que dependen de las frecuencias ν de los fotones incidentes, la pendiente de la gráfica coincide con el valor de la constante de *Planck* $h = 6,62 \times 10^{-34} J - seg$.

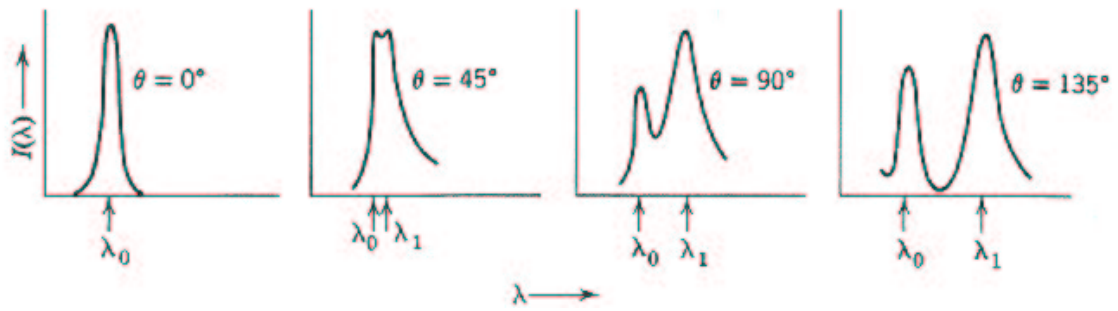


Figura 2.6: *Espectro de dispersión para tres diferentes ángulos. Como se puede observar el espectro incidente contiene una componente λ_0 que es siempre la misma, mientras que para el espectro dispersado la componente λ_1 depende del ángulo entre el fotodetector y el material dispersante, cambiando con esto la intensidad del espectro dispersado.*

2.2.3. Efecto Compton

Otro proceso donde los fotones interactúan con la materia fue descubierto por *Compton* en 1923, cuando hacía interactuar un haz de rayos-X con láminas de carbón. El arreglo experimental que se usa para medir la dispersión de *Compton* se muestra en la figura:2.5. Lo que se puede observar cuando se realiza el experimento, es que los fotones de alta energía que provienen de la fuente de rayos-X son dispersados por un material dispersante como lo es una lámina. Los fotones dispersados son detectados aún cuando variemos el ángulo del fotodetector, y una vez teniendo varios espectros de dispersión para diferentes ángulos como se muestra en la figura:2.6, se puede observar que para ángulos θ de dispersión mayores o iguales a 45° el espectro se separa en dos, dejando ver que el segundo espectro contiene una componente λ_1 mayor que la del espectro incidente, y con esto también la energía cambia a medida que se cambia el ángulo de dispersión, entre el fotodetector y el material dispersante. Como la energía de un cuanto depende de la frecuencia ν , $\varepsilon_f = h\nu$, la frecuencia del haz dispersado no será la misma que la del haz incidente pues $\nu = \frac{c}{\lambda}$, y de esta expresión se puede ver que la frecuencia del haz dispersado es menor que la del haz incidente, revelando de esta forma una cierta

dependencia entre la energía E_1 y el ángulo θ de dispersión.

“Lo anterior sugirió a Compton que si ν_1 es proporcional a la energía E_1 del cuanto asociado con la radiación de esta frecuencia, la dependencia de E_1 con θ es cualitativamente semejante a la dependencia angular de la energía de una partícula que ha sido dispersada por otra partícula.”[6]

Para encontrar una relación teórica entre $\Delta\lambda$ y el ángulo θ de dispersión, que es lo que revelan los experimentos, consideraremos la existencia de los cuantos en la radiación electromagnética del haz de rayos-X.

El esquema que describe una colisión entre un fotón y un e^- que supondremos inicialmente en reposo en el sistema de coordenadas del laboratorio, se puede ver en la figura:2.7. La colisión entre el fotón y el e^- la consideraremos como si fuera una colisión elástica entre dos cuerpos rígidos. Primero el sistema es aislado; por lo tanto el impetu y la energía deben de conservarse en cualquier dirección, además de que la energía relativista total de la partícula se obtiene calculando el trabajo hecho por una partícula bajo la acción de una fuerza F y considerando su masa relativista donde la masa depende de la velocidad; tomando esto en cuenta se puede ver que la energía de una partícula con masa relativista es $E(v) = T(v) + E(0) = T(0) + m_0c^2$ donde $T = m_0c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ es la energía cinética de la partícula. Para encontrar una expresión para la energía que tenga incluido el impetu elevamos al cuadrado ambas ecuaciones anteriores y sustituimos T en la expresión de la energía relativista, después de hacer un trabajo algebraico obtenemos que

$$\begin{aligned}
 E_{total}^2 &= p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\
 E_{total} &= \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Donde m_0 es la masa en reposo del fotón. De la ecuación (2.3), y de la ecuación de *Einstein* $E = h\nu$ podemos obtener el momento de un fotón que será igual a

$$p = \frac{h}{\lambda} . \tag{2.4}$$

Ya que el fotón no tiene masa en reposo el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.3) m_0 desaparece.

Ahora bien ya que tenemos la energía total relativista y el impetu de un fotón, de la figura:2.7 obtendremos los impetus del fotón p_0 y p_1 y del e^- p antes y después del choque para los dos grados de libertad (x y y) con los que cuenta el modelo. Debido a que en primera aproximación el choque entre el fotón y el e^- es un choque elástico como si se tomara el caso del choque de dos bolas de billar, el impetu y la energía del sistema se conservan. Por lo tanto para x y y la suma de las componentes de los momentos será

$$\begin{aligned}
 p_0 &= p_1 \cos\theta + p \cos\phi \\
 0 &= p_1 \sin\theta + p \sin\phi
 \end{aligned}$$

Para eliminar la dependencia en ϕ del e^- de las componentes de los momento elevamos al cuadrado y sumamos ambas ecuaciones, quedando que $p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta + p_1^2 = p^2$, y de la conservación de la energía total relativista tenemos que $T = E_0 - E_1 = c(p_0 - p_1)$; ahora, si combinamos la ecuación de la energía total relativista y la de la energía rela-

cionada con el impetu de una partícula con masa relativista, tenemos que

$$\begin{aligned} E^2 &= T^2 + m_0^2 c^4 \\ E^2 &= c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \\ (T + m_0 c^2)^2 &= c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \\ \frac{T^2}{c^2} + 2Tm_0 &= p^2 \end{aligned}$$

Y sustituyendo la expresión para T y para p^2 tenemos que

$$\begin{aligned} (p_0 - p_1)^2 + 2cm_0(p_0 - p_1) &= p_0^2 - 2p_0p_1\cos\theta + p_1^2 \\ \frac{(p_0 - p_1)}{p_0p_1} &= \frac{1}{m_0c}(1 - \cos\theta) \\ \left(\frac{\lambda_1}{h} - \frac{\lambda_0}{h}\right) &= \frac{1}{m_0c}(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Por último, multiplicamos todo por la constante de Planck h

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) que se ha obtenido utilizando la idea de que la radiación electromagnética esta compuesta por cuantos, así como las propiedades relativistas de la masa y la energía, nos da una expresión simple de como está relacionado el cambio en la longitud de onda dispersada con el ángulo de dispersión θ . Como se puede ver en la ecuación (2.5) cuando el ángulo de dispersión aumenta la longitud de onda dispersada aumentará y con esto la energía también. Esta ecuación fué propuesta por Compton en 1923, misma que ha sido verificada experimentalmente mostrando que concuerda muy bien la teoría con el experimento.

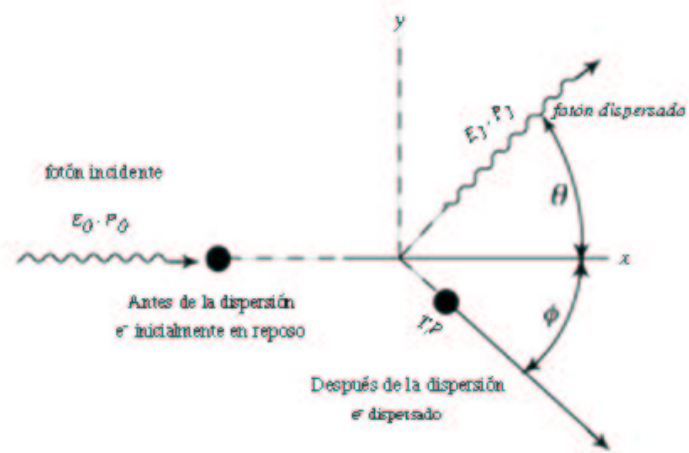


Figura 2.7: *Dispersión de un fotón cuando éste choca con un electrón*

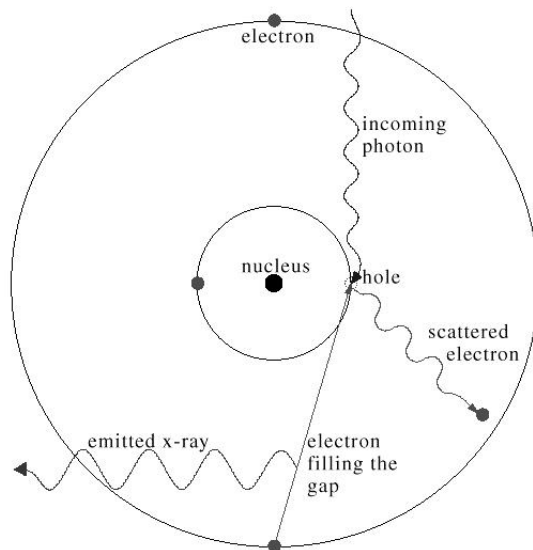


Figura 2.8: *Emisión de un fotón con energía característica*

2.2.4. Dispersión de Rayleigh

La dispersión de Rayleigh o comúnmente llamada dispersión elástica, sucede cuando un fotón con energía $E = h\nu$ choca con una nube electrónica, o con algún electrón de una de las últimas capas atómicas, y es dispersado elásticamente con la misma energía $E = h\nu$, debido a que el electrón no puede absorber la energía que ha recibido con el choque. Por lo tanto para que el átomo salga de este estado excitado, emite un fotón con una energía equivalente a la energía con la que incidió el fotón. Este proceso ocurre principalmente con energías bajas y para materiales con un Z grande [4][3].

2.2.5. Creación y aniquilación de pares

Cuando una radiación con una energía del orden de $E \sim 10^6 eV$ (rayos-gama) pasa cerca de un núcleo, la interacción con este produce un par electrón-positrón. Experimentalmente se necesita que el núcleo sea relativamente pesado para que esto suceda además de que la energía que pasa cerca del núcleo deberá ser mayor a $1.02 MeV$, es decir $h\nu > 1.02 MeV$ [2].

El inverso de la creación del par electrón-positrón ocurre cuando un electrón y un positrón chocan, y como resultado del choque se produce un fotón con una energía $h\nu$ característica de los rayos gama.

Como se menciona en la introducción, si tomamos en cuenta el caso general, y energías muy altas en la producción de rayos-X entonces, este último mecanismo que es la creación y aniquilación de pares será tomado en cuenta a la hora de analizar los datos experimentales, pero para el presente trabajo no es tan importante pues este efecto sucede solo para energías del orden de $E \sim MeV$, para energías del orden $E \sim keV$ la creación y la aniquilación de pares disminuye mucho su presencia a la hora de que la radiación es absorbida por la materia, y por el contrario el efecto fotoeléctrico y el

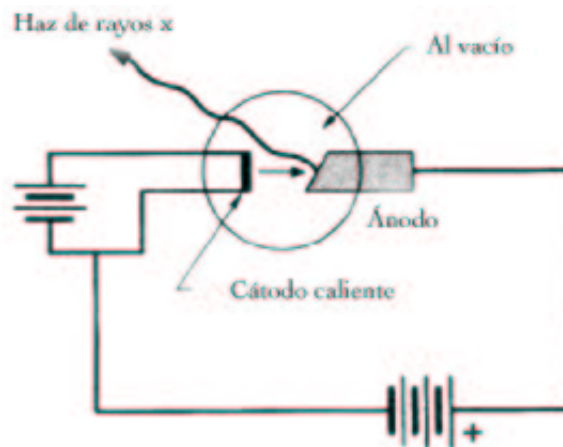


Figura 2.9: Arreglo experimental para producir rayos-X.

efecto Compton adquieren mayor importancia[2].

2.3. Producción de rayos-X, espectro continuo y espectro característico

En la figura:2.9 se muestra el arreglo experimental más sencillo para obtener fotones con energías que se encuentran en el intervalo de $[10^3, 10^5] eV$. Cuando aplicamos entre 5 volts al cátodo, los e^- del cátodo se encuentran en la frontera del metal, ya que este voltaje disminuye la atracción que ejerce el metal sobre los e^- , un voltaje secundario normalmente llamado voltaje de aceleración, proyecta a los e^- hacia los átomos del ánodo con energías del orden de $E \sim 10^3 keV$, y dependiendo del voltaje de aceleración. Cuando los e^- chocan con los átomos del ánodo y éstos logran arrancar a un e^- de una de sus capas, el átomo queda excitado (más adelante se mencionará en que consiste la excitación de un átomo) el exceso de energía es liberado por la emisión de un fotón con energía característica del átomo, en este caso del blanco (ánodo); fotones que son detectados por un fotodetector.

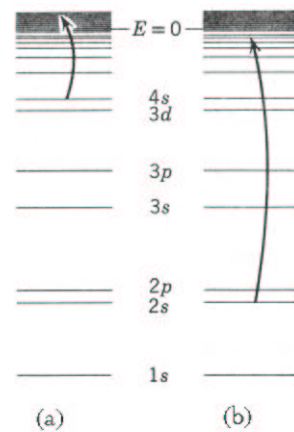


Figura 2.10: a)excitación óptica b)excitación por rayos-X.

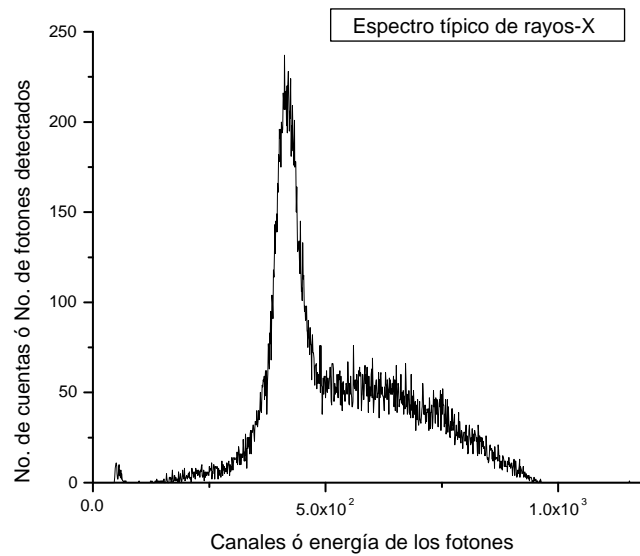


Figura 2.11: Espectro típico de rayos-X obtenido en el laboratorio, donde el sólido que sirve de blanco(ánodo) para los e^- altamente energéticos es de Ag, para un voltaje aproximadamente 5KeV; el pico más grande que se puede apreciar a la izquierda es un pico característico de la Ag.

Un espectro típico de rayos-X obtenido en el laboratorio como el de la figura:2.11 muestra dos fenómenos, que se observan como si fueran uno solo, el primero de ellos se genera cuando un electrón de energía cinética ε_c es desacelerado por un sólido (ánodo) transformando a ε_c en ε'_c y produciendo un fotón de energía dada por:

$$h\nu = \varepsilon_c - \varepsilon'_c, \quad (2.6)$$

donde esta diferencia de energías da lugar a un fotón con una longitud de onda $\lambda = \frac{c}{\nu}$; pero si el electrón es completamente detenido entonces $\varepsilon' = 0$ y la ecuación (2,6) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda_{min}} &= eV \\ \lambda_{min} &= \frac{hc}{eV} \end{aligned} \quad (2.7)$$

El frenado resulta de la interacción de los electrones (fotoelectrones) emitidos por el cátodo al chocar con los electrones libres del ánodo, ya que estos electrones pueden absorber cualquier cantidad de energía e ímpetu (por ser libres su energía no está cuantizada). Así, los electrones iniciales pueden ceder cualquier fracción de energía a dichos electrones libres hasta un máximo de $h\nu_{m'ax}$.

Cuando los electrones acelerados tienen energía igual a la diferencia de energías entre dos niveles atómicos hay interacción entre los electrones iniciales y los electrones atómicos que absorben toda la energía de los fotoelectrones y sufren una transición hacia un nivel de energía mayor (incluso pueden salir del átomo dejándolo ionizado). El espectro característico se explica tomando en cuenta las características corpusculares de los rayos-X. La interacción surge cuando un electrón con energía cinética $\varepsilon_c = eV$ choca y transmite a un e^- energía suficiente como para arrancarlo de su estado atómico, creando

un par electrón-hueco como se muestra en la figura:2.8 y dejando al átomo excitado. La manera más común de que un átomo pueda estar excitado, es por excitación óptica y excitación de rayos-X, y la única diferencia entre ellas es el valor de la energía liberada por la desexcitación; la excitación óptica desprende e^- de niveles de energía menos negativos, por lo tanto solo se necesitarán unos cuantos eV para arrancar al e^- y que este se vaya a la banda de conducción o a otro nivel de energía menos negativo que este desocupado. En la excitación por rayos-X un e^- de un nivel de energía más negativo es arrancado de él, pero como no puede ocupar un nivel de energía menos negativo debido a que ya están ocupados y el principio de exclusión lo prohíbe, el e^- se va a la banda de conducción o hacia algún orbital mucho más externo; en la figura:2.10 se muestra la excitación óptica, y la excitación por rayos-X.

Por conservación de la energía el átomo regresará paulatinamente a su estado base sólo si un e^- de una capa superior llena el hueco, provocando así que el átomo se deshaga del exceso de energía emitiendo un fotón con energía igual a la diferencia de energías que existe entre el hueco y la energía del e^- proveniente de una capa más externa, es decir si el electrón inicial es arrancado de la capa **K** es muy probable que un electrón de la capa **L** llene ese hueco, pero como esta capa está constituida de varios orbitales, se genera una serie de transiciones formando lo que se conoce como la serie K ($K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$), y cuando las capas internas son llenadas, el hueco de la última capa es llenado por otro e^- de la banda de conducción del material que constituye el ánodo, o por cualquier otro.

En la espectroscopía de rayos-X, se usa una notación para designar los niveles de energía de un átomo, por lo tanto el número cuántico n tendrá una notación que se puede ver en la tabla (2.1).

Por otro lado las transiciones del e^- de un nivel de energía a otro no son al azar, existe un conjunto de reglas para el cambio de los números cuánticos del hueco, y que

n	1	2	3	4	5	...
Notación espectroscópica	K	L	M	N	O	...

Tabla 2.1: Notación espectroscópica para n

son

$$\Delta l = \pm 1$$

$$\Delta j = 0, \pm 1$$

Finalmente, la energía liberada por la desexcitación del átomo cuando el electrón pasa de n_i a n_f , y con esto se emite un fotón con energía característica, está dado por

$$E = R_{\infty} hc Z^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

Donde $R_{\infty} \equiv \frac{m\epsilon^4}{4\pi c \hbar^3}$

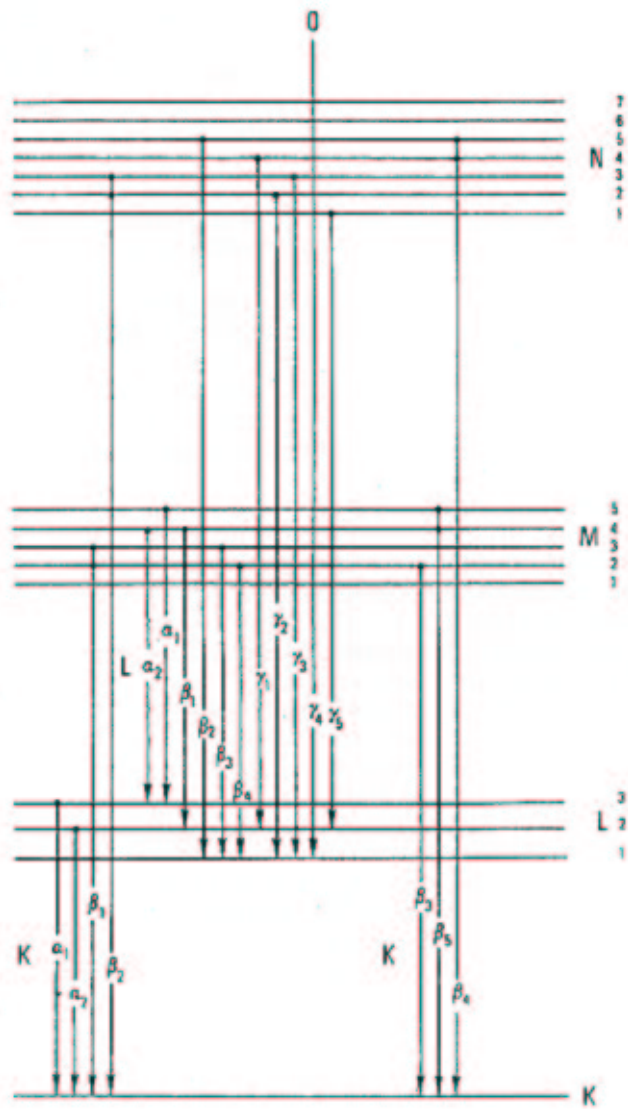


Figura 2.12: Transiciones permitidas