

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los rayos-X son absorbidos por los materiales, particularmente los sólidos, de tal suerte que la intensidad observada $I(x)$, después de que un haz atraviesa un cuerpo de espesor x está dada por $I = I_0 e^{-\mu x}$, donde μ es el coeficiente de absorción lineal del material. Al graficar $\mu(\lambda)$ contra la longitud de onda de los rayos-X absorbidos por un material hecho de un elemento químico particular, se obtiene una curva suave seguida por saltos muy pronunciados, denominados *bordes de absorción*, que ocurren en las longitudes de onda correspondientes a la energía necesaria para expulsar un electrón de un orbital atómico en los átomos del elemento que constituyen el material. El siguiente trabajo contiene una muestra de los datos obtenidos en el laboratorio, y la respuesta a la inquietud que ha surgido por conseguir un haz monoenergético a través del uso de filtros, pues en un gran número de aplicaciones, es muy útil contar con un haz monoenergético ó cuasimonoenergético (haz con una frecuencia central y un espectro de ancho de banda pequeño).

En campos de investigación como la medicina, la industria radiológica, la termografía y muy especialmente en el campo de la fluorescencia de rayos-X, es de especial interés

contar con una fuente que emita radiación monoenergética ó cuasimonoenergética de alta intensidad.

El objetivo del presente trabajo es encontrar la forma de monocromatizar el haz de rayos-X que genera un tubo de rayos-X, el cual consiste de una parte que posee un espectro continuo llamado espectro de *Bremsstrahlung* y las líneas características propias del material que se está usando como blanco en el tubo de rayos-X. Por consiguiente, la forma de conseguir esto es empleando filtros de transmisión, áreas donde se han realizado amplios trabajos [4] y que se mencionaran en la siguiente sección. El trabajo incluye un breve análisis teórico de los coeficientes de absorción, capítulo tres, así como una simulación de los espectros obtenidos en el laboratorio, capítulo cuatro, la construcción de los filtros capítulo cuatro y los datos experimentales como resultado del filtrado de rayos-X del tubo se verán el capítulo cinco.

1.2. Antecedentes

En el Centro de Ingeniería Biomédica de la universidad de Roma, se han realizado trabajos[4] relacionados con la monocromatización de un haz de rayos-X, utilizando filtros a partir de elementos relativamente baratos, empleando hojas metálicas delgadas ó mezclas de polvos de resinas epóxicas. Para la selección de elementos de que estará compuesto el filtro, prestaron especial interés en elementos cuya energía de discontinuidad fotoeléctrica coincidiera con la energía que hace máxima la intensidad del haz de *Bremsstrahlung*. Para entender el efecto de un filtro de transmisión de Mo que ha sido empleado, donde su discontinuidad fotoeléctrica está en 20.004 keV, para los siguientes voltajes de aplicación sucede lo siguiente:

- Hasta 15keV aproximadamente el espectro incidente es casi completamente absorbido por los átomos del filtro de Mo.

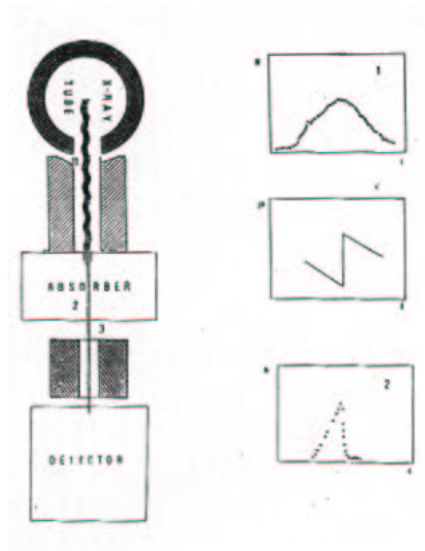


Figura 1.1: filtro de transmisión

- De unos 15 a unos 20keV el coeficiente de atenuación del Mo está en su mínimo valor, por lo tanto los fotones con este rango de energía tendrán una gran probabilidad de atravesar el filtro en comparación con la probabilidad que tienen los fotones de otras energías. Dichas probabilidades también dependen del grosor del filtro.
- De unos 20.004keV a unos 28keV el coeficiente de atenuación del Mo alcanza su máximo valor y casi ningún fotón logra atravesar el filtro.
- Por encima de los 28 keV el coeficiente de atenuación del Mo nuevamente vuelve a decrecer, y el número de fotones que logran atravesar el filtro vuelve a aumentar.

1.3. Revisión de teoría electromagnética clásica

Aunque más adelante se estudiarán los rayos-X desde la perspectiva de la mecánica cuántica, en esta sección nos limitaremos a la parte de la electrodinámica clásica,

tomando aquellos conceptos que pueden explicar una parte del espectro de emisión de los rayos-X, y de por qué son capaces de penetrar en la materia si son considerados por ahora como ondas electromagnéticas; capacidad de penetración que una onda electromagnética en el rango visible ($410nm, 660nm$) no tiene con tanta profundidad.

1.3.1. Ecuaciones de Maxwell, ondas planas en un medio no conductor y la ecuación general de onda

Antes de ver el caso cuando una onda electromagnética a traviesa un medio conductor finito, veremos el caso más simple cuando éstas atraviesan un medio no conductor en ausencia de cargas libres. Las ecuaciones que explican los fenómenos electromagnéticos en el vacío son las ecuaciones de *Maxwell* que se muestran a continuación

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j_{verdadera} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Donde la divergencia en la ecuación (1.1) es igual a cero debido a que se está suponiendo que las ondas electromagnéticas se propagan en un medio en ausencia de cargas libres, de fuentes y sumideros; si se considera la presencia de cargas la ecuación (1.1) sería igual a $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{verdadera}$. Ahora bien, de las ecuaciones (1.3) y (1.4) se puede deducir la ecuación general de onda, para ondas electromagnéticas que se propagan en un dieléctrico o en un conductor, dependiendo de los términos que contenga la ecuación. Tomando las ecuaciones (1.3) y (1.4), y considerando las relaciones constitutivas para materiales $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ donde \mathbf{D} es el vector de desplazamiento eléctrico y ϵ es la constante

de permitividad eléctrica del material, y $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, donde \mathbf{B} es el vector de inducción magnética y μ la constante de permitividad del vacío, tomando todo esto en cuenta las ecuaciones (1.3) y (1.4) se convierten en

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j_{verdadera} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.6)$$

Ahora bien, aplicando el rotacional a cada término de la ecuación (1.5) y usando una identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ tenemos que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mu\mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(j_{verdadera} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

y como el $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ debido a que no existen cargas libres, fuentes ni sumideros, entonces la ecuación de onda queda como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \frac{\partial j_{verdadera}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

y utilizando la *ley de Ohm* podemos reescribir la ecuación anterior para obtener la forma final de la ecuación general de onda.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.8)$$

Las ecuaciones (1.7) y (1.8) son las ecuaciones homogéneas de onda, que describen la propagación de una onda del campo eléctrico y una onda para el campo magnético con una velocidad de propagación $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. Ahora bien, dependiendo del caso que se

trate algunos términos de la ecuación general de onda se eliminarán, si el medio de propagación es no conductor entonces $\sigma = 0$ (donde σ es la constante de conductividad) y estamos hablando del caso cuando una onda electromagnética se propaga en un dieléctrico.

Como la ecuación (1.7) es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden en tres dimensiones, para resolverla se utiliza el método de separación de variables

$$\psi(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t).$$

Teniendo esto en cuenta se propone una solución que es una onda plana transversal escrita de la forma

$$E(x, y, z, t) = E_0 e^{i(\omega t \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (1.9)$$

Ésta es la solución que satisface la ecuación (1.7), dependiendo si se trata del caso de un medio conductor o no conductor en donde uno de los términos de la ecuación desaparece. Para ver con más detalle la deducción de la ecuación general de onda y su solución, consultar las referencias[7][8].

1.3.2. Ondas planas en un medio conductor y las ecuaciones de Maxwell

Si suponemos que las ondas electromagnéticas que se propagan en un medio conductor finito (es decir cuando $\sigma \neq 0$), son ondas planas transversales en la dirección de z y de un vector unitario, donde además el vector unitario es normal al plano de propagación de la onda plana, entonces el operador ∇ se transforma en $\nabla = \hat{\mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial z}$, y las ecuaciones de *Maxwell* se reescriben de la siguiente forma

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.12)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = j_{\text{verdadera}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.13)$$

Reescribiendo de esta forma las ecuaciones de *Maxwell* con cambios sólo en la dirección de propagación z y en el tiempo, la ecuación general de onda queda como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (1.14)$$

y las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación general de onda, se pueden omitir si se supone una función de onda plana de la forma $E = E_0 e^{-i\omega t}$ que tiene periodicidad en el tiempo, la ecuación (1.14) queda como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E} + i\omega\mu\sigma \mathbf{E} = 0, \quad (1.15)$$

y el cambio del campo eléctrico en la dirección de propagación será igual a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E} - i\omega\mu\sigma \mathbf{E} = -(\omega^2 \mu\sigma + i\omega\mu\epsilon) \mathbf{E}.$$

Por lo tanto, la ecuación de onda general tiene como soluciones funciones de ondas planas compuestas por dos factores, uno de ellos periódico y el otro una onda amortiguada. De aquí que el campo eléctrico que satisface la ecuación general de onda estará compuesto por los siguientes términos

$$E(z, t) = E_0 e^{-\beta z} e^{i(\alpha z - \omega t)}. \quad (1.16)$$

Donde α es la solución de la parte real y β de la parte imaginaria de k . En las referencias [7][8] se pueden ver los detalles de como se llega a estas soluciones.

Ahora bien, sustituyendo las respectivas expresiones que se obtuvieron para α y β en la ecuación (1.16) y simplificando su expresión, obtenemos que el campo eléctrico está descrito por la siguiente ecuación

$$E(z, t) = E_0 e^{\sqrt{(\mu\sigma\omega/2)z}} e^{i(\sqrt{(\mu\sigma\omega/2)z} - \omega t)} = E_0 e^{-\frac{1}{\delta}z} e^{i(\frac{1}{\delta}z - \omega t)} = E_0 e^{i(\frac{1}{\delta}z - \omega t) - \frac{1}{\delta}z}. \quad (1.17)$$

De la ecuación (1.17) se puede ver que uno de los términos es una onda periódica, pero el segundo término no lo es, por el contrario decae y obliga a que la onda decaiga conforme se penetra en el material conductor en dirección de z , que es la dirección de propagación y que incide normal a la superficie del material. De esta forma se puede identificar a δ como el factor responsable del amortiguamiento y que es igual a

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}. \quad (1.18)$$

Este factor de decaimiento se le conoce con el nombre de *skin depth* y determina la profundidad de penetración de la onda electromagnética en un material conductor; es decir dos ondas electromagnéticas con frecuencias diferentes penetrarán a diferentes profundidades, en tal caso si ω es un número muy grande, δ será muy pequeño y para una distancia de penetración z grande la onda electromagnética decaerá, pero la penetración del material será mayor que la de una onda electromagnética con una frecuencia ω pequeña, pues δ será un número grande y el efecto que tendrá en la

onda electromagnética se reflejará en una menor penetración, pues al evaluar z para una distancia igual que la del caso anterior el decaimiento será mucho mayor, por esta razón una onda electromagnética en el rango visible tan sólo llega a penetrar las primeras capas atómicas, lo contrario de los rayos-X, que pueden penetrar sólidos de espesor considerable.

Este efecto de amortiguamiento de la onda electromagnética se refleja, desde el punto de vista empírico, en la estructura del coeficiente de absorción. Obviamente, la descripción de la penetración de las ondas electromagnéticas en el material se ha presentado desde la perspectiva de la Teoría Electromagnética Clásica y no da cuenta, por tanto, de los efectos de absorción de radiación para provocar la transición de los electrones en los orbitales atómicos.