

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ACTUARÍA, FÍSICA Y MATEMÁTICAS

UDLAP®

**HERRAMIENTAS NUMÉRICAS PARA
ESTUDIAR INTERACCIONES FUERTES
EN EL LÍMITE DE x BAJO: UN AJUSTE
DEL MODELO GBW A LOS DATOS
COMBINADOS DEL COLISIONADOR
HERA**

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE
HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE

JORGE EDUARDO ROMERO NAVA

166026

DIRECTOR: DR. MARTIN HENTSCHINSKI

SAN ANDRÉS CHOLULA, PUEBLA.

PRIMAVERA, 2024

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE
HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE JORGE EDUARDO ROMERO NAVA,
166026

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Martin Hentschinski

PRESIDENTE DE TESIS

Dra. Milagros Zeballos Rebaza

SECRETARIO DE TESIS

Dr. Miguel Ángel Ocaña Bribiesca

Resumen

Se prueba la validez y efectividad del modelo GBW basado en el concepto de saturación de gluones para pequeños valores de Q^2 y x . Con tan solo tres parámetros se logra obtener una buena descripción de datos experimentales de dispersión inelástica profunda por debajo de $x = 0.01$. Esto incluye una comparación entre ajustes con conjuntos de datos diferentes y distintas contribuciones de las masas de los quarks. Se pretende mejorar la calidad de los ajustes a través del método de minimización χ^2 y el cálculo del valor χ_{red}^2 , además de identificar los factores que afectan la efectividad de los resultados. En adición, se obtienen resultados para la sección eficaz reducida del partón $\sigma_{r,NC}^{\pm}(x, Q^2)$ en una dispersión positrón-protón utilizando un código computacional en Python.

Palabras clave: Cromodinámica cuántica, dispersión inelástica profunda, sección eficaz, saturación, funciones de distribución de partones, fotón, quarks, gluones.

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi profunda gratitud al Dr. Martin Hentschinski quien me apoyó y motivó durante la realización de este trabajo. Su apoyo fue incondicional, incluso en los momentos más difíciles me enseñó que con voluntad, esfuerzo y paciencia es posible lograr cualquier cosa. En adición, agradezco mucho a la Dra. Irais Bautista Guzmán por asesorarme en temas de software y manejo de datos experimentales durante el transcurso del proyecto. Y también le quiero dar gracias a la Dra. Milagros Zeballos Rebaza por siempre hacer tiempo en su agenda y ayudarme a responder mis dudas en el ámbito de programación.

En lo que concierne al aspecto personal estoy infinitamente agradecido con mis padres quienes han educado, apoyado y formado a la persona que soy hoy en día. Ellos son la razón por la que quiero seguir superándome en cada oportunidad que se me presente tanto como persona como profesional, ya que mi único anhelo es hacerlos sentir orgullosos. Por último, me gustaría agradecer a mis amigos de la universidad que me motivan a mejorar como estudiante y me acompañan en los ratos libres para divertirme. En especial a mi mejor amigo, Sergio Fernando Bravo Soni, con quien compartí esta etapa tan especial de la vida.

Índice

1. Introducción	5
2. Justificación	6
3. Objetivos	6
4. Marco Teórico	7
4.1. Modelo Estándar de partículas elementales	7
4.1.1. Quarks	7
4.1.2. Leptones	9
4.1.3. Bosones de gauge	9
4.1.4. Bosones escalares	10
4.1.5. Las cuatro fuerzas fundamentales	11
4.2. Amplitud de Dispersión y Sección Eficaz	12
4.3. Cromodinámica Cuántica	13
4.3.1. Lagrangiano de QCD	14
4.3.2. Funciones de Distribución de Partones	17
4.4. Dispersión Inelástica Profunda	21
4.4.1. Cinemática, sección eficaz y funciones estructurales	24
4.5. Enfoque Dipolar para QCD de alta densidad de partones	31
4.5.1. Imagen Dipolar acorde a DIS	32
4.6. Saturación de Gluones	35
4.6.1. Evolución No Linear	36
4.7. Modelo de Saturación GBW	42
4.7.1. Análisis Cualitativo	45
4.7.2. Parametrización Simplificada y Línea Crítica	47
4.8. Método de Minimización χ^2	49
4.8.1. Grados de Libertad	50
5. Metodología	52
5.1. Procedimiento GBW Modelo de Saturación	52
6. Resultados y Discusión	57
7. Conclusiones y Recomendaciones	66

1. Introducción

Los procesos de dispersión en colisionadores de hadrones de altas energías pueden ser clasificados como "duros" o "suaves". La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría fundamental que explica todos estos procesos, pero el enfoque y el nivel de comprensión necesario es muy diferente para cada caso. Para los procesos duros, e.g. el bosón de Higgs o la alta producción de jets p_T , las tasas y las propiedades de los eventos se pueden predecir de manera precisa utilizando teoría de perturbaciones. Para los procesos suaves, e.g. la sección eficaz total, el evento fundamental, etc., las variaciones y propiedades son dominadas por efectos QCD no perturbativos, los cuales son más complejos de entender. Para muchos procesos duros, las interacciones suaves ocurren simultáneamente junto con las interacciones fuertes y además, sus efectos deben ser estudiados con el fin de realizar comparaciones con las predicciones perturbativas. La comprensión correcta de las variaciones y características de las predicciones para procesos duros, tanto de las señales como los fondos, se logra utilizando cromodinámica cuántica perturbativa (pQCD), la cual es crucial para ambos, el Tevatron y el LHC [24].

Un descubrimiento sorprendente en HERA es la razón del rápido crecimiento de la función estructural del protón, $F_2(x, Q^2)$, conforme la variable Bjorken de escala, x , disminuye para valores de x pequeños con virtualidades del fotón $Q^2 > 10 \text{ GeV}^2$. Las colaboraciones ZEUS y H1 han extendido la medición de F_2 hacia un valor de Q^2 de 1.5 GeV^2 . Uno de los aspectos más interesantes de la información reciente es la persistencia a los valores más bajos de Q^2 del rápido crecimiento de F_2 con una x decreciente. En años recientes, varios experimentos han realizado análisis de ajustes globales en escalas ligeramente arriba de 1.5 GeV^2 , debido a esto es que el determinar para que valores de Q^2 el comportamiento de F_2 es dominado por contribuciones no perturbativas se ha convertido en una duda inquietante. Las múltiples mediciones de la sección eficaz de la dispersión inelástica profunda inclusiva (DIS) de un proceso lepton-protón han sido de vital importancia para poder comprender la subestructura quark-gluon del protón. Las mediciones de la función estructural del protón F_2 publicadas por HERA han demostrado que F_2 continua aumentando considerablemente con x decreciente hasta los valores más bajos de Q^2 alcanzados. Además, resulta que los datos pueden describirse con éxito mediante QCD perturbativa en el rango cinemático medido, utilizando el método principal junto a las ecuaciones de evolución QCD de orden principal, que posteriormente se ha utilizado para extraer la densidad de gluones en el protón para baja x [10].

En dispersión inelástica profunda (DIS) el concepto básico de saturación se relaciona a la transición de altos a bajos valores de Q^2 como uno observa en la sección eficaz total $\gamma * p$. Este tipo de saturación ocurre cuando la longitud de onda del fotón $1/Q$ alcanza la misma magnitud que el tamaño del protón. En el documento se presenta otro aspecto de la saturación, el cual es inherente a DIS para pequeños valores de x . En este régimen los partones dentro del protón conforman un sistema denso con recombinación e interacción mutua lo que conduce a la saturación de la sección eficaz total. Ambos aspectos de la saturación están relacionados fuertemente con el confinamiento y la unitariedad. Mientras que el último puede ser abordado de forma perturbativa, el primero es genuinamente no perturbativo. El enfoque que se escogió puede ser llamado fenomenología

inspirada en QCD y sigue como ejemplo la teoría de las referencias. Existen diversos modelos basados en diferentes teorías, pero la estrategia que se adopta en el análisis consiste en determinar tres parámetros libres: σ_0 , λ y x_0 , por medio de ajustes para valores de $x \leq 0,01$ [16].

2. Justificación

Este tema es de suma importancia debido a que se busca estudiar a detalle las interacciones que existen entre partículas elementales a través de aproximaciones en los procesos de altas energías, en específico, el proceso de dispersión inelástica profunda (DIS). Estos procesos son derivados de la rama de la física llamada cromodinámica cuántica (QCD) la cual estudia la interacción fuerte entre quarks mediada por gluones, en este trabajo se revisan las consecuencias de la saturación de gluones, el cual es un aspecto interesante que en ocasiones no se estudia, pero es imperativo estudiarlo debido a que podemos extraer información relevante sobre el comportamiento de partículas como los hadrones, protones, piones, entre otros. Esta teoría es esencial para comprender el modelo estándar de física de partículas, el cual ha llamado la atención por su simplicidad y elegancia. En específico, el enfoque de esta tesis es estudiar a detalle el modelo de saturación GBW y verificar que siga siendo una buena herramienta para describir el fenómeno de saturación de gluones de una interacción DIS con la intención de optimizar resultados. Se espera que este estudio aparte de comprender la teoría del modelo estándar y la cromodinámica cuántica también ayude a impulsar nuevos descubrimientos en experimentos de colisionadores de partículas. Para investigaciones futuras se motiva a trabajar en otros modelos estadísticos para compararlos entre sí y obtener un mejor entendimiento de la estructura interna de un hadrón con finalidad de contribuir a la descripción del universo.

3. Objetivos

Replicar los resultados más sobresalientes del artículo de investigación ‘Saturation Effects in Deep Inelastic Scattering at Low Q^2 and its Implications on Diffraction’, el cual busca obtener una descripción correcta de todos los datos de la dispersión inelástica profunda que ocurre para valores por debajo de $x = 0.01$ a través del desarrollo de un modelo basado en el concepto de saturación para valores pequeños de Q^2 y x . Revisar la actualización de los resultados en el artículo de investigación ‘DIS: an update’ y realizar un ajuste capaz de mejorar la calidad de aquél de la actualización al optimizar el valor de χ^2 reducido. Por último tomar una perspectiva diferente al seleccionar otro conjunto de datos diferente al empleado en trabajos anteriores y ajustar una ecuación nueva que contiene los mismos 3 parámetros, la cual investiga el comportamiento de la sección eficaz reducida para un rango específico de Q^2 y x_{Bj} .

4. Marco Teórico

4.1. Modelo Estándar de partículas elementales

Nuestra mejor comprensión de cómo las partículas fundamentales y tres de las fuerzas se relacionan entre sí se resume en el Modelo Estándar de física de partículas. Desarrollado a principios de la década de 1970, ha explicado con éxito casi todos los resultados experimentales y predicho con precisión una amplia variedad de fenómenos. Con el tiempo y a través de muchos experimentos, el modelo estándar se ha consolidado como una teoría física bien probada. El modelo estándar es una teoría cuántica de campo, la cual mezcla varios conceptos de la mecánica cuántica con aquellos de la relatividad especial de Einstein [2].

Toda la materia que nos rodea está hecha de partículas elementales, los componentes básicos de la materia. Son doce partículas las cuales componen nuestro universo, se reduce a solo doce unidades todo lo que existe en el mundo la materia, estas partículas se dividen en dos grupos distintos llamados quarks y leptones. Cada grupo consta de seis partículas, que están relacionadas en pares o “generaciones”. Las partículas más ligeras y estables forman la primera generación, mientras que las partículas más pesadas y menos estables pertenecen a la segunda y tercera generación. Toda la materia estable del universo está formada por partículas que pertenecen a la primera generación; cualquier partícula más pesada se descompone rápidamente en otras más estables. Los seis quarks se emparejan en tres generaciones: up quark y down quark forman la primera generación, seguidos por el charm y strange, luego el top y bottom. Los quarks también se agrupan en tres “colores” diferentes y sólo se mezclan de tal manera que forman objetos incoloros. Los seis leptones están dispuestos de manera similar en tres generaciones: el electrón y el neutrino electrónico, el muón y el neutrino muónico, y el tau y el neutrino tauónico. El electrón, el muón y el tau tienen carga eléctrica y una masa considerable, mientras que los neutrinos son eléctricamente neutros y tienen muy poca masa. [2].

Quarks	Leptones
up (u)	electrón (e^-)
down (d)	neutrino electrónico (ν_e)
strange (s)	muon (μ^-)
charm (c)	neutrino muónico (ν_μ)
bottom (b)	tau (τ^-)
top (t)	neutrino tauónico (ν_τ)

Tabla 1: Partículas fundamentales de la materia [5].

4.1.1. Quarks

La existencia de los quarks se teorizó por primera vez en 1964 en el trabajo de dos físicos, Murray Gell-Mann y George Zweig, ambos en el Instituto de Tecnología de

California (CalTech), pero que llegaron a la conclusión de que los quarks existen independientemente unos de otros. Aunque la teoría era astuta, no tuvo éxito de inmediato porque no había evidencia experimental de los quarks. Esto ocurrió cuatro años después, en 1968, en el Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) en California. Físicos experimentales dispararon electrones, y luego muones a protones, y encontraron evidencia de que los electrones y los muones se estaban dispersando de tres partículas más pequeñas contenidas dentro de los protones, cada una de estas partículas más pequeñas tenía su propia carga eléctrica. Estas partículas son los quarks. Resulta que en realidad hay seis tipos o sabores de quarks en total como se menciona un par de párrafos atrás. Cada uno tiene su propio conjunto de números cuánticos y sus masas son muy diferentes, siendo los quarks up y down los menos masivos y el quark top el más pesado, con una masa más de 61.000 veces más masiva que el quark up. No se comprende del todo por qué debería ser tan masivo, pero se descompone rápidamente en quarks menos masivos. La única razón por la que los científicos saben que existen los quarks top y bottom es porque los aceleradores de partículas como el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) son capaces de producirlos brevemente [11].

Los quarks no existen por sí solos en condiciones normales. Siempre están unidos por la fuerza nuclear fuerte, lo que les permite formar partículas compuestas llamadas hadrones. Las partículas formadas por dos quarks se denominan mesones, y las partículas formadas por tres quarks se denominan bariones, que incluyen protones (dos quarks up y uno down) y neutrones (un quark up y dos down). En el universo moderno, los quarks pesados son bastante escasos fuera del laboratorio. Sin embargo, anteriormente en el universo temprano la materia era mucho más energética por lo que estos quarks más pesados eran mucho más comunes y tuvieron un rol importante que desempeñar en las reacciones que tuvieron lugar en el universo temprano. Este es una de las razones por las que los físicos de partículas dicen que sus experimentos les permite mirar hacia atrás en la historia del universo [11].

Los quarks llevan una carga eléctrica fraccionada de valor, ya sea $-1/3$ o $+2/3$ veces la carga elemental (donde el electrón tiene de unidad -1), dependiendo del sabor. Los quarks up, charm y top tienen una carga de $+2/3$, mientras que los quarks down, strange y bottom tienen $-1/3$. Los quarks que determinan los números cuánticos de los hadrones se denominan quarks constituyentes o de valencia. Por ejemplo, el protón está compuesto por dos quarks up y un quark down, y el neutrón de dos quarks down y un quark up. Los quarks son partículas de espín $1/2$. La dirección de espín se llama polarización [5].

Para encajar en la teoría de la física cuántica, el comportamiento de los quarks se rige por el modelo llamado cromodinámica cuántica, o QCD para abreviar. El 'cromo' en el nombre se refiere al 'color', no como el rojo, el verde o el azul, sino el nombre dado a un número cuántico particular que poseen los quarks. Piense en el color como si desempeñara el mismo papel en la fuerza fuerte que la carga eléctrica en la fuerza electromagnética. Entonces, los colores iguales se repelen y los colores diferentes (es decir, un color y su anticolor) se atraen, formando pares estables de quarks, y como otros números cuánticos, también debe conservarse. El sistema de atracción y repulsión entre quarks de colores se llama interacción fuerte, que está mediada por partículas portadoras

de fuerza conocidas como gluones. Los gluones, al igual que los fotones, no tienen masa, tienen un espín de 1 y no tienen carga eléctrica, pero tienen carga de color [11].

4.1.2. Leptones

Hay seis tipos conocidos de leptones (12 si contamos sus antipartículas). Tres de ellas son partículas cargadas negativamente: electrones, muones y partículas tau. Los otros tres son neutrinos, que son eléctricamente neutros. Hay un neutrino correspondiente para cada tipo de leptón cargado, así tenemos el neutrino electrónico, el neutrino muónico y el neutrino tau. Estos tres leptones se llaman neutrinos porque son eléctricamente neutros. Esto no es lo mismo que decir, por ejemplo, que el neutrón tiene carga cero. Un neutrón está formado por tres quarks. Cada uno de estos quarks llevan una carga eléctrica. Cuando se observa un neutrón desde a distancia, los efectos electromagnéticos de las cargas de quarks se equilibran haciendo que el neutrón parezca un objeto neutro. Experimentos que estudian la estructura del neutrón pueden determinar la presencia de objetos cargados dentro él. Los neutrinos, en cambio, son partículas fundamentales, pues estos no tienen componentes dentro de ellos: son genuinamente neutros. Para distinguir tales partículas de aquellas cuyas cargas componentes se cancelan, diremos que los neutrinos (y partículas similares) son neutros y que los neutrones (y partículas como ellas) tienen carga cero [5].

Los neutrinos tienen masas extremadamente pequeñas, incluso en la escala atómica. Los experimentos con el electrón-neutrino sugieren que su masa es menor que una diezmilésima parte de la del electrón. Muchos físicos de partículas creen que los neutrinos no tienen masa alguna. Esto los convierte en los la mayoría de los objetos fantasmales del universo. Mucha gente se sorprende por el hecho de que los neutrinos no tienen carga ni masa. ¡Esto parece negarles cualquier existencia física en absoluto! Sin embargo, los neutrinos tienen energía y esta la energía les da realidad [5].

Los leptones son una parte crucial del modelo estándar de física de partículas. Los electrones son componentes importantes de los átomos, mientras que los neutrinos inundan el universo y son producidos por reacciones de fusión nuclear en estrellas, así como por desintegración de partículas [12].

4.1.3. Bosones de gauge

La fuerte fuerza que une los quarks dentro de los hadrones es transportada por otro tipo de diminutas partículas elementales llamadas gluones, que se intercambian entre los quarks. Separar quarks individuales requiere una enorme cantidad de energía (no se llama fuerza fuerte sin motivo alguno) [28]. Esta cantidad de energía bruta sólo existió en la naturaleza entre unas 10 milmillonésimas de segundo y aproximadamente una millonésima de segundo después del Big Bang, cuando la temperatura era de aproximadamente 3,6 billones de grados Fahrenheit (2 billones de grados Celsius). Durante este breve período inicial, el universo bebé se llenó de una forma de materia conocida como

plasma de quarks-gluones, una sopa de partículas de quarks y gluones que flotan libremente. A medida que la temperatura y la presión disminuyeron rápidamente a medida que el universo bebé se expandió, los quarks se unieron, formando hadrones que finalmente formaron la base de toda la materia visible que vemos hoy en el cosmos, desde estrellas y galaxias hasta planetas y personas [3].

Aunque el plasma de quarks y gluones sólo existió hace 13.800 millones de años, inmediatamente después del Big Bang, los científicos lo han recreado con éxito en experimentos con aceleradores de partículas rompiendo dos núcleos pesados, como el de plomo, entre sí a una velocidad cercana a la de luz. La primera vez que esto se logró fue en el Súper Síncrotrón de Protones del CERN en el año 2000. Como tal, estudiar plasmas de quarks y gluones en experimentos con aceleradores de partículas es una forma importante de comprender mejor las condiciones en el universo después del Big Bang [1].

4.1.4. Bosones escalares

El bosón de Higgs, descubierto en 2012 por investigadores en el LHC, tiene una masa de 125 mil millones de electronvoltios lo que significa que es 130 veces más masivo que un protón, acorde el CERN. En adición, no tiene carga y tiene espín cero, un equivalente de carácter cuántico al momento angular. El bosón de Higgs es la única partícula elemental sin espín [2].

Un bosón es una partícula "portadora de fuerza" que entra en juego cuando las partículas interactúan entre sí, intercambiándose un bosón durante esta interacción. Por ejemplo, cuando dos electrones interactúan, intercambian un fotón, la partícula portadora de fuerza de los campos electromagnéticos [27].

Debido a que la teoría cuántica de campos describe el mundo microscópico y los campos cuánticos que llenan el universo con mecánica ondulatoria, un bosón también puede describirse como una onda en un campo. Entonces un fotón es una partícula y una onda que surge de un campo electromagnético excitado y el bosón de Higgs es la partícula o "manifestación cuantizada" que surge del campo de Higgs cuando se excita. Ese campo genera masa a través de su interacción con otras partículas y el mecanismo llevado por el bosón de Higgs llamado mecanismo Brout-Englert-Higgs [27].

El modelo estándar es una teoría que clasifica todas las partículas fundamentales discutidas en función de sus propiedades e introduce reglas que determinan las interacciones que pueden ocurrir entre ellas, así como la frecuencia a la que ocurren. En la Fig. (1) se muestra como tal el M.S.

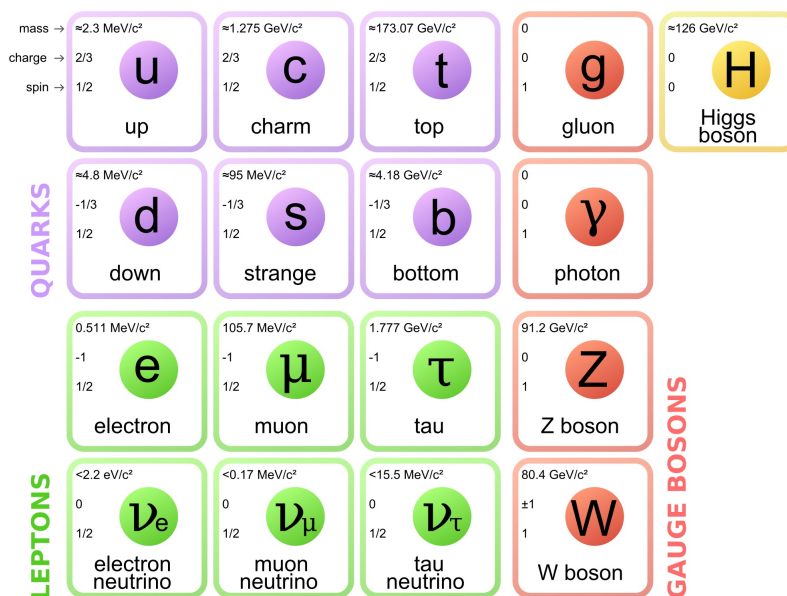


Figura 1: Modelo Estándar de partículas elementales.

4.1.5. Las cuatro fuerzas fundamentales

Existen cuatro fuerzas fundamentales que actúan en el universo: la fuerza fuerte, la fuerza débil, la fuerza electromagnética y la fuerza gravitacional. Estas fuerzas actúan en diferentes rangos y su magnitud también es distinta. La gravedad es la más débil de ellas, pero tiene un alcance infinito. La fuerza electromagnética también tiene un alcance infinito, pero es muchas veces más fuerte que la gravedad. Las fuerzas débil y fuerte sólo actúan en un rango muy corto y dominan únicamente al nivel de las partículas subatómicas. La fuerza débil es más débil que la fuerza fuerte y la fuerza electromagnética, pero sigue siendo mucho más fuerte que la gravedad. La fuerza fuerte, como su nombre indica, es la más fuerte de las cuatro interacciones fundamentales [2].

Tres de las fuerzas fundamentales resultan del intercambio de partículas portadoras de fuerza, las cuales pertenecen a un grupo más amplio llamado 'bosones'. Las partículas de la materia transfieren cantidades discretas de energía entre sí mediante el intercambio de bosones. Cada fuerza fundamental tiene su propio bosón correspondiente: la fuerza fuerte la lleva el "gluón", la fuerza electromagnética la lleva el "fotón" y los "bosones W y Z" son responsables de la fuerza débil. Aunque aún no se ha encontrado, el "gravitón" debería ser la partícula portadora de fuerza de la gravedad. El Modelo Estándar incluye las fuerzas electromagnética, fuerte y débil así como todas sus partículas portadoras, y además explica muy bien cómo actúan estas fuerzas sobre todas las partículas de materia. Sin embargo, la fuerza más familiar en nuestra vida cotidiana, la gravedad, no forma parte del modelo estándar, ya que adaptar la gravedad cómodamente a este marco ha demostrado ser un desafío difícil. La teoría cuántica utilizada para describir el mundo microscópico y la teoría general de la relatividad utilizada para describir el mundo macroscópico son sumamente difíciles de encajar en un marco único. Nadie ha

logrado hacer que ambos sean matemáticamente compatibles en el contexto del Modelo Estándar. Pero, afortunadamente para la física de partículas, cuando se trata de partículas de escala minúscula, el efecto de la gravedad es tan débil que resulta insignificante. Sólo cuando la materia es en masiva, a escala del cuerpo humano o de los planetas por ejemplo, es que domina el efecto de la gravedad. Así pues, el modelo estándar sigue funcionando correctamente a pesar de excluir sin más opción una de las fuerzas fundamentales [2].

4.2. Amplitud de Dispersión y Sección Eficaz

Es de extrema importancia repasar los conceptos de la teoría de dispersión, ya que todo lo que sabemos sobre física nuclear y atómica se ha descubierto mediante experimentos de dispersión. Dentro de esta teoría, la forma mas simple de describir un experimento en el que se observa dispersión es si se lanza un haz de partículas hacia un potencial fijo $V(r)$ y después se calcula la cantidad de partículas que son desviadas de su trayectoria. Para esto, se debe resolver la ecuación de Schrödinger planteando una solución en forma de una onda plana. Podemos asumir que el conjunto de las soluciones de las ecuaciones de todas las partículas forman un paquete de ondas, de esta forma todas ellas viajaran con la misma energía [35]. La solución de la ecuación de onda plana será:

$$\psi(r) = e^{ikr} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1)$$

donde $f(\theta, \phi)$ la amplitud de dispersión y los ángulos θ, ϕ medidos con respecto al eje paralelo a la dirección del haz de partículas. Después del proceso de dispersión, la corriente resultante será igual a la corriente inicial fluyendo a través de un área perpendicular $d\sigma$:

$$d\sigma(\theta, \phi) = |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (2)$$

donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo solido. De la expresión (1) podemos definir la sección eficaz diferencial para la dispersión en direcciones θ, ϕ de la forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (3)$$

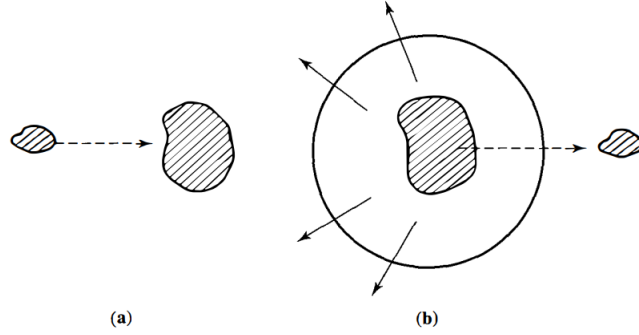


Figura 2: (a) Onda plana incidente. (b) Solución $\psi(r)$ con la contribución de la onda plana mas la contribución de un onda esférica [35].

Ahora, para conocer la sección eficaz total, basta con integrar respecto al ángulo solido la sección diferencial dada por la Ec. (3):

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \int d\Omega |f(\theta, \phi)|^2 \quad (4)$$

Una vez que expresamos a la sección eficaz total σ_{tot} en términos de f , necesitamos trabajar con la Ec. (1) en términos de las funciones esféricas de Bessel, las funciones de Neumann y los polinomios de Legendre. Tras realizar un procedimiento exhaustivo el cual es sencillo, pero largo y no cubre el rango de este trabajo se llega a la siguiente expresión:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(0)] \quad (5)$$

De hecho, (5) es el teorema óptico [35].

4.3. Cromodinámica Cuántica

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría que explica la interacción fuerte y, más en concreto, la interacción entre los quarks para formar todas las partículas que interactúan fuertemente (hadrones), ya sean mesones donde interactúan quark y antiquark, $q\bar{q}$, o bariones donde interactúan tres quarks, qqq . La interacción entre los quarks se realiza mediante el intercambio de gluones, que son los portadores de un nuevo número cuántico, el color. El color fue introducido por Greenberg para restaurar el principio de Pauli: dado que los quarks son partículas de espín 1/2, dos quarks del mismo tipo no podían tener los mismos números cuánticos. Sin embargo, existen tres bariones, Δ_{++} , Δ_{-} y Ω_{-} , formados por tres quarks uuu , ddd y sss respectivamente. Por tanto, es necesario asociar a cada quark un nuevo número cuántico, el color, de tal manera que cada quark tenga tres posibles valores diferentes. Han y Nambu introdujeron el color de manera dinámica y, posteriormente, este grupo y otros dos independientemente (D. Gross

y F. Wilczek en Princeton, y D. Politzer en Harvard, [17], [32]) demostraron que la interacción entre quarks y gluones desaparece a distancias pequeñas, explicando por qué los quarks se comportaban 1 como casi libres dentro del protón, tal y como habían revelado los datos de Stanford sobre colisiones electrón-protón profundamente inelásticas. Este fenómeno de importancia capital se denomina libertad asintótica, y permitió a H. Fritzsch, M. Gell-Mann y H. Leutwyler escribir el Lagrangiano de QCD en 1973 [18].

4.3.1. Lagrangiano de QCD

En primera instancia, para poder utilizar el Lagrangiano para interacciones no perturbativas de QCD es necesario deducir y comprender el Lagrangiano para QED. El Lagrangiano que describe la Electrodinámica Cuántica (QED) puede deducirse imponiendo una cierta simetría, denominada invariancia gauge, al Lagrangiano de una partícula libre [6]. En efecto, si consideramos el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (6)$$

que describe el campo ψ de un electrón libre, siendo γ^μ las matrices de Dirac que satisfacen el anticonmutador

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (7)$$

con $g^{\mu\nu}$ el tensor métrico, y queremos que sea invariante ante las transformaciones gauge:

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi' = \exp[iq\alpha(x)]\psi, \\ \bar{\psi} &\longrightarrow \bar{\psi}' = \exp[-iq\alpha(x)]\bar{\psi}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde $\alpha(x)$ es una función y q la carga asociada al quark, introducimos el campo vectorial del fotón $A_\mu(x)$ que se transforma bajo la transformación gauge como

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x), \quad (9)$$

y sustituimos en el Lagrangiano (6) la derivada ∂_μ por la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (10)$$

el nuevo Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \quad (11)$$

es invariante gauge y contiene el Lagrangiano libre \mathcal{L}_0 mas una interacción,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_0 - j^\mu A_\mu, \quad j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (12)$$

Por tanto, la simetría gauge determina la interacción. Dicha interacción se ilustra en la Fig. (3), donde un electrón (ψ) emite un fotón (A_μ) y continúa su camino ($\bar{\psi}$) [6].

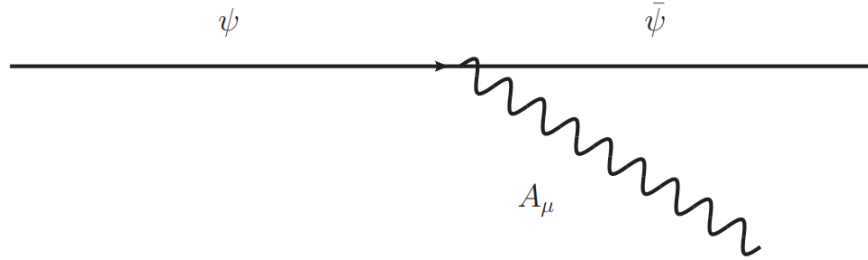


Figura 3: Diagrama de la interacción en QED [6].

Para obtener el Lagrangiano completo de QED, debemos añadir a (11) el termino que describe el campo electromagnético libre,

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (13)$$

Observemos que si el fotón tuviese masa, deberíamos añadir al Lagrangiano el término $\frac{1}{2}m_\gamma^2 A^\mu A_\mu$ que no es invariante gauge. Por tanto, la invariancia gauge implica que $m_\gamma = 0$.

Ahora, QCD es análogo a QED reemplazando el grupo U(1) de QED (que hace que en las transformaciones de gauge (8), (9) aparezca solamente la función $\alpha(x)$ y un solo

campo de gauge $A_\mu(x)$), por el grupo SU(3) de color, en el que aparecen 8 funciones $\alpha_a(x)$, $a = 1, 2, \dots, 8$, y 8 campos de gauge $G_\mu^a(x)$ correspondiendo a los 8 gluones. Al proceder igual que en QED, se comienza por escribir el Lagrangiano de los quarks libres [6]

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{\psi}_q^j i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_q^k - \sum_q m_q \bar{\psi}_q^j \psi_q^j, \quad (14)$$

donde los índices j, k indican el color, $j, k = 1, 2, 3$, y $q = d, u, s, c, b, t$ el tipo de quark (sabor). Para simplificar la notación, escribiremos temporalmente un solo sabor de quark y omitiremos el índice de color [6].

La transformación de gauge de los campos de los quarks viene dada por

$$\psi_q(x) \longrightarrow \psi'_q(x) = \exp[i g_s \alpha_a(x) T_a] \psi_q(x), \quad (15)$$

donde g_s es la constante de acoplamiento de la interacción fuerte, y T_a son matrices 3×3 de traza nula, generadores del álgebra del grupo SU(3) que satisfacen

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad (16)$$

con f_{abc} las constantes de estructura del grupo (se sobreentiende que los índices de color de Minkowski repetidos se suman). Para mantener la invariancia gauge, necesitamos introducir 8 campos de gauge, los campos de los gluones, que se transforman como

$$G_\mu^a \longrightarrow G_\mu^{a'} = G_\mu^a - \partial_\mu \alpha_a(x) - g_s f_{abc} \alpha_b(x) G_\mu^c, \quad (17)$$

reemplazamos en (14) ∂_μ por la derivada covariante D_μ , con

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s T_a G_\mu^a \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_q i \gamma^\mu D_\mu \psi_q - m_q \bar{\psi}_q \psi_q = \bar{\psi}_q i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_q - g_s \bar{\psi}_q i \gamma^\mu \psi_q T_a G_\mu^a - m_q \bar{\psi}_q \psi_q, \quad (19)$$

Al que finalmente debemos añadir el término

$$-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f_{abc}G_\mu^b G_\nu^c. \quad (20)$$

En esta ecuación, el término extra comparado con la expresión correspondiente en QED (13), proviene del término extra de la transformación del campo del gluón G_μ^a (17) comparado con el fotón A_μ (9). Este término extra es necesario para que el Lagrangiano sea invariante, debido a que al ser la simetría no abeliana (véase (16)), aparece un término adicional al introducir (15) en (14). Si analizamos la interacción, observamos que además de la emisión de un gluón por un quark (proveniente del segundo término de la interacción (19)) tenemos, de acuerdo con (20), las posibilidades de que un gluón emita un gluón y de que dos gluones emitan dos gluones, según se ilustra en la Fig. (4). Estas dos últimas posibilidades existentes en QCD son una diferencia esencial con lo que ocurre en QED, diferencia clave para entender los comportamientos diferentes en las dos teorías. La radiación en QCD (los gluones) emite radiación. Este comportamiento proviene del comportamiento no abeliano del grupo SU(3) de simetría de QCD [6].

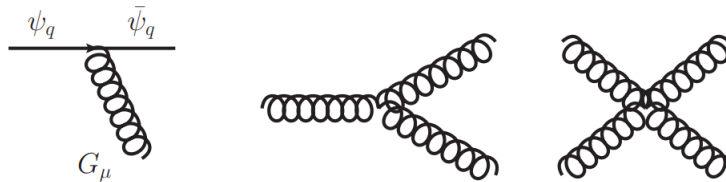


Figura 4: Diagrama de la interacción en QCD [6].

4.3.2. Funciones de Distribución de Partones

Las funciones de distribución de partones, también conocidas como funciones de distribución de partículas (PDFs, por sus siglas en inglés 'Parton Distribution Functions'), son funciones matemáticas que describen la probabilidad de encontrar un partón (quark o gluón) en un protón, neutrón u otro hadrón, llevando una fracción particular de la energía de la partícula.

En el modelo de quarks y gluones que describe la estructura interna de los hadrones, los quarks y gluones no existen como partículas aisladas en el estado libre debido a la confinamiento de la cromodinámica cuántica (QCD). En cambio, estos constituyentes de la materia están "confinados" dentro de los hadrones [28].

El modelo de los tres quarks, que supone que un protón o un neutrón está formado por tres quarks libres que no interactúan en una bolsa, es demasiado simple. No puede igualar un proceso de dispersión como la dispersión inelástica de electrones a partir de protones. Esos quarks de valencia están incrustados en un mar de pares virtuales quark-antiquark generados por los gluones que mantienen unidos a los quarks en el protón. Todas estas partículas: quarks de valencia, sea quarks y gluones, son partones [14].

Entre los aspectos más intrigantes de la cromodinámica cuántica (QCD) está la relación entre sus grados básicos de libertad, quarks y gluones, y los estados físicos observables, i.e. hadrones como el protón. Las distribuciones de partones son las cantidades más destacadas que describen esta relación. Son pertinentes en relación con varias cuestiones clave de la interacción fuerte como, por ejemplo:

- **El origen de los gluones y sea quarks dentro del protón**

Las distribuciones de partones describen al protón como un sistema de muchos quarks, antiquarks y gluones. A alta resolución, la presencia de partones con pequeña fracción de momento x puede entenderse en mayor parte como el resultado de la radiación de los partones, similar a la aparición de electrones, positrones y fotones generados a partir de un solo electrón en una cascada electromagnética. Esta radiación de partones se puede calcular utilizando la teoría de la perturbación en el límite de acoplamiento pequeño (α_s). Sin embargo, la comparación con datos experimentales muestra que incluso a baja resolución, el protón no sólo está formado por quarks, los cuales poseen un tercio del momento del protón, como uno creería ingenuamente con base la conocida imagen de los quarks constituyentes, donde el protón está formado por dos quarks 'up' y un quark 'down'. En cambio, incluso a baja resolución, el protón contiene tanto gluones como quarks y antiquarks de bajo momento (denominados sea quarks) [28]. Estos deben ser generados por una dinámica más allá del alcance de la teoría de las perturbaciones, y su origen sigue sin ser comprendido. Tengamos en cuenta que los cálculos en QCD reticular nos dicen que incluso la masa del protón se debe en gran medida a la energía de unión de los gluones que mantienen unidos a los quarks [23].

- **El fenómeno del confinamiento que se manifiesta en la estructura de los hadrones** A distancias de alrededor de 1 femtómetro (fm), la fuerza fuerte se vuelve tan fuerte que los quarks y los gluones son confinados en hadrones y no pueden existir como partículas libres. Como consecuencia, la estructura del protón difiere profundamente de aquellos sistemas débilmente unidos, como los átomos (cuyo tamaño total es proporcional a la masa inversa del electrón). La distribución espacial de los partones en el protón y su distribución en momento transversal se caracteriza por escalas del orden de un fm o unos cuantos cientos de MeV, los cuales son similares a la escala de confinamiento y muy diferentes de las masas de los quarks 'u' y 'down'. El mapeo experimental y el cálculo teórico de estas distribuciones debería mejorar nuestra comprensión del confinamiento [23].

Las funciones de distribución de partones proporcionan información sobre cómo la energía total del hadrón se distribuye entre los quarks y gluones en su interior. Estas funciones son esenciales para calcular las secciones eficaces y las tasas de producción de

partículas en colisionadores de partículas, como el LHC en el CERN.

Las PDFs dependen tanto de la fracción de momento como de la escala de energía a la que se está observando el sistema. Los experimentos de dispersión profunda (por ejemplo, experimentos DIS) han proporcionado datos valiosos para determinar estas funciones en función de la fracción de momento y la escala de energía [22].

El centro de investigación en física de alta energía 'Electron-Ion Collider' (EIC) será único en el mapeo de la estructura quark-gluón del protón en varias formas que llevarán nuestro conocimiento a un nuevo nivel. En concreto, el EIC nos permitirá investigar:

- la distribución de sea quarks y gluones en el espacio de momento y en el espacio de posición, para comprender mejor su interacción dinámica,
- correlaciones entre la polarización y la distribución de partones en el espacio de momento o en el espacio de posición, que puede considerarse como el análogo QCD de las correlaciones espín-órbita en física atómica o nuclear,
- el cambio de distribuciones al pasar de valores de x pequeño a x grande, para comparar las características de los sea quarks y los valence quarks y además comprender su relación entre sí,
- la dependencia de las características anteriores en lo que se refiere al sabor del quark. Esto es de particular interés al comparar distribuciones, i.e. \bar{u} con \bar{d} , \bar{s} con $(\bar{u} + \bar{d})/2$ o s con \bar{s} . Las diferencias significativas entre esas distribuciones son una huella directa de la dinámica no perturbativa porque la radiación partónica perturbativa no es capaz de generarlas. Esto genera un interés especial en lo que concierne a la polarización llevada por sea quarks de diferentes sabores, más allá de su contribución al espín general del protón [23].

Para cuantificar estas propiedades y relacionarlas con datos experimentales, tenemos a nuestra disposición un poderoso formalismo, que ha experimentado avances significativos en la última década y media. Las distribuciones de partones vienen en diferentes variedades, con un nivel creciente de complejidad:

- Las conocidas funciones de distribución de partones (PDF) $f(x)$ dan la densidad numérica de partones con fracción de momento longitudinal x en un protón que se mueve rápidamente, donde la dirección longitudinal está dada por el momento del protón. Se miden en procesos inclusivos o semi-inclusivos, siendo el proceso inclusivo el más importante, ya que es la dispersión inelástica profunda leptón-protón (DIS). Los PDFs constituyen la columna vertebral de nuestro conocimiento sobre estructura hadrónica [23].
- Las densidades de partones dependientes del momento transversal (TMDs) $f(x, k_T)$ describen la distribución de partones junta en su fracción de momento longitudinal x y su momento k_T transversal a la dirección del protón. Con tal de medir las TMDs se requiere información más detallada sobre la cinemática de un proceso de dispersión. En la cinemática apropiada de SIDIS, el momento transversal del hadrón detectado en su estado final puede calcularse a partir de una densidad de

partón dependiente de k_T y de una función de fragmentación dependiente de k_T , que describe el momento transversal transferido durante el proceso de hadronización [23].

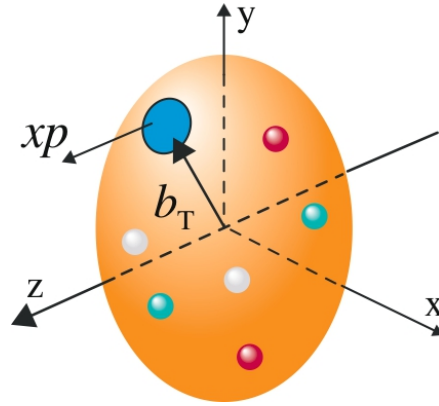


Figura 5: Vista esquemática de un partón con fracción de momento longitudinal x y posición transversal b_T en el protón [23].

Ambas, las distribuciones de parámetros de impacto $f(x, b_T)$ y las distribuciones de momento transversal $f(x, k_T)$ describen la estructura del protón en tres dimensiones, o de forma más precisa en $2 + 1$ dimensiones (dos dimensiones transversales ya sea en el espacio de configuración o en el momento, junto con una dimensión longitudinal en el espacio de momento). Tomemos en cuenta que en un protón en movimiento rápido, las variables transversales desempeñan papeles muy diferentes que que el del momento longitudinal [23].

La distribución de quarks y gluones dentro de un protón se muestra en la Fig. (6). Las distribuciones numéricas se grafican en función de x , que se conoce como el momento fraccionario de los constituyentes de un protón en un marco de referencia donde el protón se mueve muy rápido. La escala de momento típica en la que se investigan estos gluones es $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$. Notemos que por debajo de $x \sim 0,1$, los gluones dominan la función de onda del protón [29].

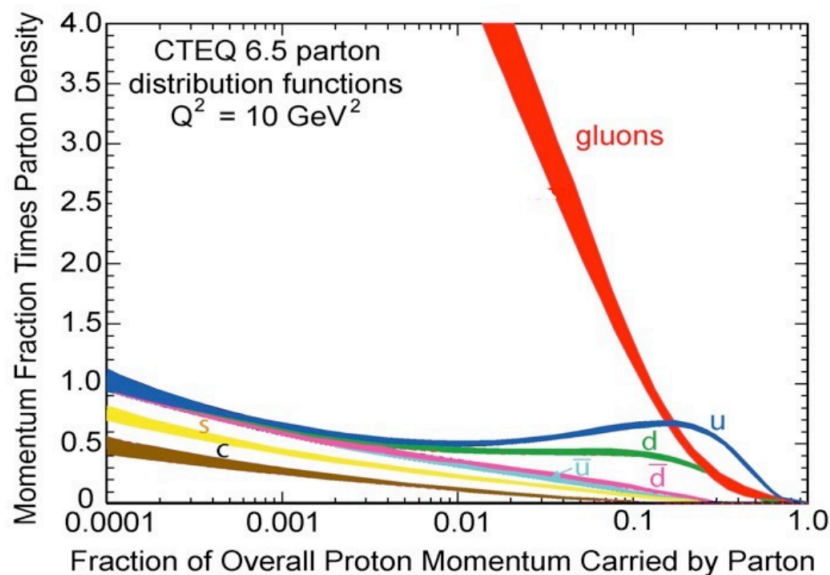


Figura 6: La distribución de quarks y gluones dentro del protón [29].

Todas las distribuciones de partones dependen de una escala que especifica la resolución a la que se resuelven los partones, y que en un determinado proceso de dispersión lo proporciona una gran transferencia de momento. Para muchos procesos dentro de colisiones $e + p$, la escala dura relevante es Q^2 . Las ecuaciones de evolución que describen la dependencia de escala de distribuciones de partones proporcionan una herramienta esencial, tanto para la validación de la teoría y para la extracción de distribuciones de partones a partir de datos de sección eficaz. También permiten uno convertir las distribuciones vistas en alta resolución a escalas de menor resolución, donde se puede establecer contacto con descripciones no perturbativas del protón [23].

4.4. Dispersión Inelástica Profunda

La dispersión inelástica profunda (DIS) es el prototipo de los procesos hadrónicos duros. Como tal, proporciona una prueba importante (y muy exitosa) de QCD perturbativa. Representa también la forma más directa de explorar la estructura interna de los hadrones. Inelástico se refiere a que estamos destruyendo la estructura del protón en el proceso de dispersión. Sin embargo, tenemos una forma de observar el remanente del protón y también del electrón disperso, y luego comparar nuestra expectativa teórica para las secciones eficaces con el hallazgo en experimentos. La energía del electrón de prueba o del fotón en el proceso de dispersión nos permite observar el protón con resolución variable. Entonces, a energías muy bajas, básicamente se puede observar una partícula puntual. Por lo tanto, el proceso de dispersión se parece mucho a la dispersión de un electrón con un muón. Si aumentamos la energía del electrón, podemos ver que hay una distribución de carga extendida en el protón. Un mayor aumento nos permite resolver el hecho de que el protón está formado por tres quarks. Ahora, si seguimos aumentando la

energía aún más, vemos aparecer muchas partículas nuevas, quarks, antiquarks y gluones, las cuales forman la estructura del protón [8].

La idea principal que se debe comprender es que en experimentos de dispersión inelástica profunda, básicamente se utiliza el fotón disperso, irradiado por el electrón como un lente para estudiar más de cerca el protón. Esto con el objetivo de poder observar la estructura del protón aquí y así ver la distribución de las partículas cargadas en el protón, sólo las partículas cargadas eléctricamente. Es importante mencionar que no existe dispersión entre la dispersión directa entre fotones y gluones.

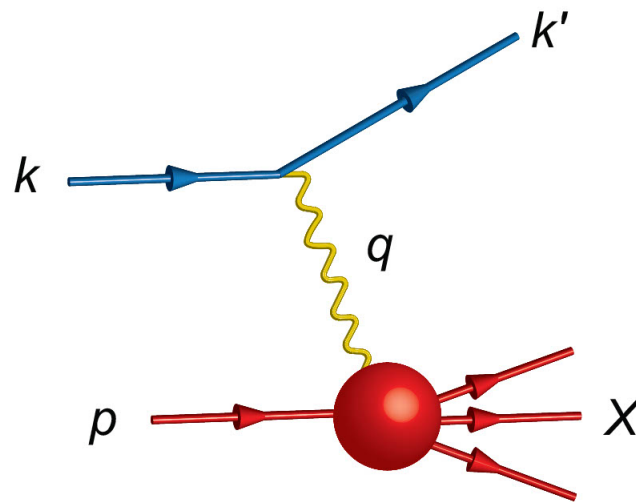


Figura 7: Dispersión inelástica profunda entre un hadrón y un leptón a través del intercambio de un fotón virtual [23].

En física de partículas, la resolución Q^2 se refiere al cuadrado de la transferencia de momento en un proceso de dispersión. La transferencia de momento es el cambio en el momento de una partícula como resultado de una interacción o colisión con otra partícula. En experimentos que involucran dispersión de partículas, los investigadores a menudo miden el ángulo de dispersión y la energía de las partículas dispersadas. La transferencia de momento, Q^2 , se calcula utilizando la siguiente expresión, la cual veremos más a detalle más adelante [8].

$$Q^2 = 4EE' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

donde

- E y E' son las energías de las partículas incidentes y dispersadas, respectivamente

- θ es el ángulo de dispersión

La resolución Q^2 es un parámetro sumamente importante en experimentos de alta energía porque caracteriza la precisión con la que se puede determinar la transferencia de momento. Experimentos de alta resolución con una determinación precisa de Q^2 ayudan a los investigadores a sondear la estructura interna de las partículas y obtener información sobre los constituyentes fundamentales de la materia. El término "resolución" aquí se refiere a la capacidad para distinguir cambios o detalles pequeños en la transferencia de momento, permitiendo mediciones más precisas y una mejor comprensión de la física subyacente. Para este caso en particular, la escala Q^2 toma el rol de "parámetro de resolución" [28].

Por consiguiente, en las mediciones, lo que se puede hacer es investigar el comportamiento de los electrones dispersos y así buscar el remanente del protón en nuestra medición para luego realizar mediciones de la sección eficaz diferencial. Una vez terminadas las mediciones, comparamos con nuestra teoría para finalmente poder inferir información sobre la estructura del protón. Para ello disponemos de variables cinemáticas especiales que pueden resultar muy útiles. El más importante es probablemente la llamada variable de Bjorken x o Bjorken x , que se puede explicar de forma que la transferencia de momento del fotón es q^2 , p es el momento del protón, q es la transferencia de momento la cual tiene factor de 2. Y esto es básicamente la fracción del momento que lleva el partón durante el proceso de dispersión. Hay algunas otras variables útiles, pero no es conveniente entrar en detalles todavía, en este trabajo de investigación se utilizará solamente la escala de Bjorken x [20].

Se muestra en la Fig. (7) un ejemplo de un proceso DIS en el que la variable Bjorken es esencial para describir el proceso. Es la reacción: $l p \rightarrow l X$ donde el estado hadrónico final X representara a todos los hadrones producidos por la fragmentación del protón p .

donde las variables cinemáticas del proceso son:

- p : cuadrimomento del protón
- k : cuadrimomento del leptón entrante
- k' : cuadrimomento del leptón saliente
- \sqrt{s} : energía de colisión debido a la reacción del electrón y el protón

$$s = (p + k)^2$$

- Q^2 : momento al cuadrado transferido al leptón, lo que es igual a la virtualidad del fotón intercambiado

$$Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2$$

- Q : Resolución de los interiores de los hadrones $\lambda \sim 1/Q$

Resultado de la fragmentación podemos determinar la estructura interna del protón en cuestión. La variable de Bjorken x_{Bj} es capaz de parametrizar la fragmentación, ya

que determina la fracción de momento del partón con el que el protón se dispersa acorde a la Ec. (21):

$$x = \frac{Q^2}{W^2 + Q^2} = \frac{Q^2}{2pq} \quad (21)$$

donde Q^2 es la transferencia de momento del leptón al protón a través de un fotón virtual como ya se había mencionado y p es el momento inicial del protón, con una masa definida como $p^2 = m^2$ [20].

Y por ultimo la invariante de masa al cuadrado W^2 del sistema hadrónico X producido

$$W^2 = (p + q)^2$$

4.4.1. Cinemática, sección eficaz y funciones estructurales

Uno de los procesos de dispersión mas simples que ocurren a cortas distancias es la reacción

$$e + p \implies e' + X, \quad (22)$$

conocida como dispersión inelástica profunda electrón-protón. Aquí e es el electrón entrante y e' es electrón saliente (o positrón), p es claramente el protón, y X se refiere a las demás partículas producidas durante el proceso. El electrón se dispersa debido al protón a través del intercambio de un fotón virtual denotado como γ^* con el quark perteneciente a la función de onda del protón. El fotón virtual usualmente separa al protón lo que conduce a la producción de varios hadrones; éstos se denominan con el símbolo X en la Fig. (8). Por lo tanto, el proceso de inelástico profundo, lo que explica el nombre [25].

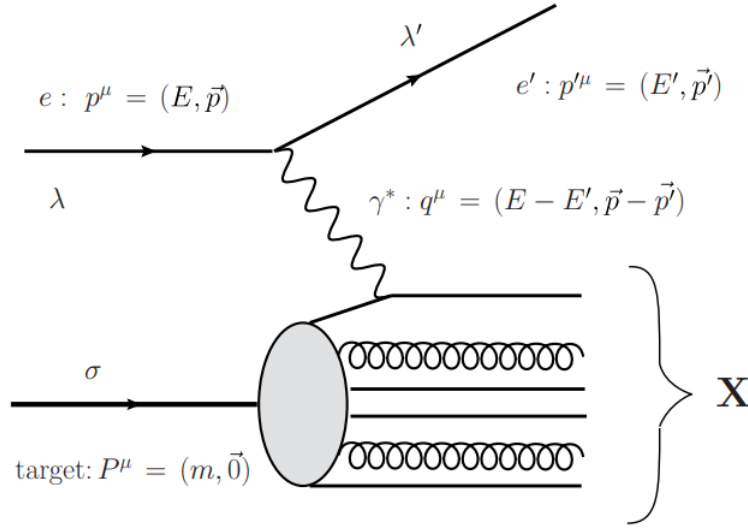


Figura 8: Diagrama de Feynman que describe la dispersión inelástica profunda electrón-protón. Los nombres de los momentos de las líneas corresponden al marco en el cual el objetivo de protón esta en reposo. La línea ondulada denota el fotón virtual que se propaga mientras que las líneas enrolladas denotan los gluones dentro del protón [25].

Se comienza a trabajar en el marco de reposo del protón. Como se muestra en la Fig. (8), el cuadrimento del protón es $P^\mu = (m, \vec{0})$, donde m es la masa del protón. El cuadrimento del electrón entrante es $p^\mu = (E, \vec{p})$, mientras que el electrón saliente tiene un cuadrimento $p'^\mu = (E', \vec{p}')$. Solo uno de los 3 cuadrimentos P^μ , p^μ y p'^μ independientes puede constituir tres invariantes de Lorentz relevantes a la dinámica de colisiones. (Es importante mencionar que $P^2 = m^2$ y de igual manera $p^2 = p'^2 = m_e^2$, donde m_e es la masa del electrón; mientras que las masas mencionadas son en efecto escalares de Lorentz, estas no contienen información alguna sobre la dispersión.) Ahora, en términos del cuadrimento del fotón virtual $q^\mu \equiv p^\mu - p'^\mu$, las tres invariantes que se utilizan normalmente para describir la dispersión inelástica profunda son

$$\begin{aligned}
 Q^2 &\equiv -q^2, \\
 x_{Bj} &\equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q}, \\
 y &\equiv \frac{P \cdot q}{P \cdot p}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Q^2 se conoce como la virtualidad del fotón, mientras que x_{Bj} es la variable Bjorken x . En marco de reposo del protón uno puede probar fácilmente

$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{24}$$

$$y = \frac{E - E'}{E} \quad (25)$$

Aquí θ es el ángulo de dispersión del protón, i.e. el ángulo entre \vec{p} y \vec{p}' . Por lo tanto, ese puede observar que $q^2 \leq 0$ o, de forma equivalente, $Q^2 \geq 0$, lo que demuestra que Q es real. En el marco de reposo del protón la tercer invariante de Lorentz 'y' tiene una interpretación física interesante, como una fracción de la energía del electrón que se transfiere al protón [25].

En adición, de las 3 invariantes independientes en la Ec. (23) se pueden definir otras cantidades invariantes de Lorentz, sin embargo, no dependientes,

$$\begin{aligned} v &\equiv \frac{P \cdot q}{m} = E - E', \\ \hat{s} &\equiv (P + q)^2 = 2P \cdot q + q^2 + m^2, \\ s &\equiv (P + p)^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Si se analiza más profundidad el marco de reposo se observa que la invariante v representa a la parte de la energía del electrón que es transferida al protón, mientras que \hat{s} es la energía de centro de masa al cuadrado de la reacción $\gamma * + p$. Las invariantes en la Ec. (26) están relacionadas a esas de la Ec.(23) a través de

$$\begin{aligned} x_{Bj} &= \frac{Q^2}{\hat{s} + Q^2 - m^2} = \frac{Q^2}{2mv}, \\ Q^2 &= yx_{Bj}(s - m^2 - m_e^2) \approx yx_{Bj}s \end{aligned} \quad (27)$$

El hecho de que los experimentos DIS son usualmente realizados a muy alta $s \ll m^2 \ll m_e^2$ justifica la aproximación del último renglón de la Ec. (27). También de la Ec. (27) encontramos que $x_{Bj} \leq 1$ para la dispersión inelástica profunda en un protón [25].

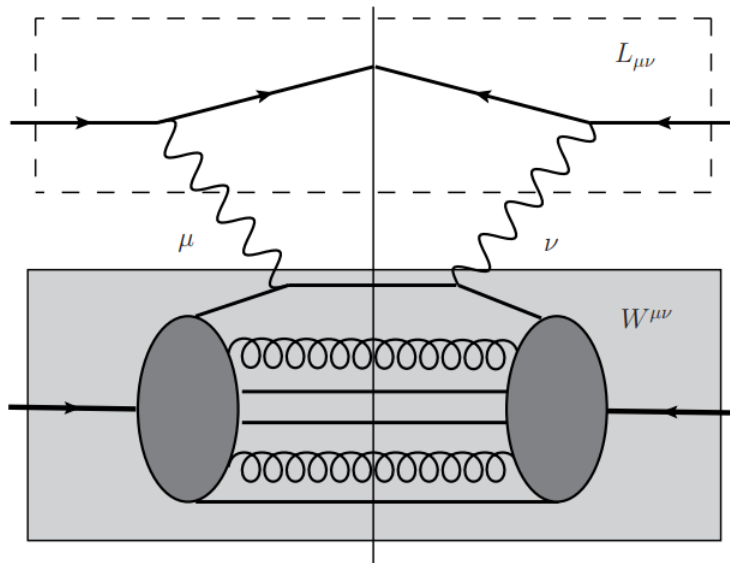


Figura 9: Representación esquemática del cálculo de la sección eficaz DIS como la amplitud cuadrada. La línea vertical denota el corte de estado final. Los cuadros rectangulares representan las partes del diagrama que contribuyen al tensor leptónico $L_{\mu\nu}$ y el tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$ [25].

Después de un laborioso proceso matemático, cuyos detalles pueden ser analizados en los libros (Halzen and Martin 1984, Peskin and Schroeder 1995, Sterman 1993), es posible desarrollar la siguiente expresión para la sección eficaz DIS:

$$\frac{d\sigma}{d^3p'} = \frac{\alpha_{EM}^2}{EE'Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (28)$$

Esta ecuación, la cual se puede apreciar en la Fig. (9) muestra la amplitud de la Fig. (8) al cuadrado. Al observar gráficamente la situación física, uno puede separar las contribuciones del electrón y del protón a la dispersión inelástica en partes hadrónicas y leptónicas. Formalmente, la parte leptónica contiene un tensor leptónico $L_{\mu\nu}$ y por el otro lado la parte hadrónica añade un tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$. Ahora, se define el tensor leptónico con la ecuación

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\lambda'=\pm 1} \bar{u}_{\lambda'}(p') \gamma_{\mu} u_{\lambda}(p) [\bar{u}_{\lambda'}(p') \gamma_{\nu} u_{\lambda}(p)] \quad (29)$$

Al sumar sobre las polarizaciones iniciales y finales de los electrones resulta

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr}[(p' + m_e)\gamma_\mu(p + m_e)\gamma_\nu] \\
&= 2(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - p \cdot p' g_{\mu\nu} + m_e^2 g_{\mu\nu}),
\end{aligned} \tag{30}$$

donde nuevamente m_e es la masa del electrón.

La dinámica de interacción fuerte en la dispersión inelástica profunda (DIS), que incluye contribuciones no perturbativas, se encuentra completamente dentro del tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$; por lo tanto, es sumamente complicado calcular $W^{\mu\nu}$ en un cálculo de QCD básico de principios simples. No obstante, se puede inferir más acerca de sus estructura al notar que la conservación de la corriente electromagnética requiere que

$$\begin{aligned}
q_\mu W^{\mu\nu} &= 0, \\
q_\nu W^{\mu\nu} &= 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Si se impone la condición anterior (31) en el tensor $W^{\mu\nu}$ y también asumimos que el tensor es simétrico es entonces que podemos demostrar, sin pérdida de generalidad, que puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= -W_1(x_{Bj}, Q^2)(g^{\mu\nu}) - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \\
&+ \frac{W_2(x_{Bj}, Q^2)}{m^2} (P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu)(P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu)
\end{aligned} \tag{32}$$

Aquí W_1 y W_2 son funciones escalares desconocidas de x_{Bj} y Q^2 , llamadas funciones estructurales. Como $W^{\mu\nu}$ describe la interacción del fotón virtual con el protón, entonces solo hay dos vectores de cuadri momento de los que $W^{\mu\nu}$ depende: P^μ y q^ν . Al considerar $P^2 = m^2$ uno puede construir solo dos invariantes de Lorentz que describen el proceso de dispersión. Se usará x_{Bj} y Q^2 como las dos invariantes de las que W_1 y W_2 dependen [25].

Es importante notar que las funciones estructurales W_1 y W_2 tienen la dimensión de masa inversa. Es más conveniente definir funciones estructurales F_1 y F_2 con carácter adimensional [25]

$$F_1(x_{Bj}, Q^2) \equiv mW_1(x_{Bj}, Q^2) \tag{33}$$

$$F_2(x_{Bj}, Q^2) \equiv vW_2(x_{Bj}, Q^2) = \frac{Q^2}{2mx_{Bj}} W_2(x_{Bj}, Q^2). \quad (34)$$

La mayor parte de la física de QCD esta contenida en F_1 y F_2 , ya que solo es necesario el uso de las funciones estructurales cuando existe un intercambio de ya sea de fotones, protones o electrones sin polarización. Para este proyecto es suficiente con estudiar F_1 y F_2 , pero existe mas teoría así como mas términos en genreal. Ahora se intentará calcular estas nuevas funciones estructurales [25].

Como se menciona en los párrafos anteriores y se plasma en la Ec. (33) es conveniente cambiar las funciones estructurales $W^{\mu\nu}$ a las funciones estructurales F_1 y F_2 debido a que es mas sencillo trabajar con ellas por su carácter adimensional. La idea es dentro del modelo de partón, lo cual puede funcionar dentro de QCD usando factorización colineal. Lo que se obtiene aproximadamente al orden dominante es lo siguiente.

$$\begin{aligned} F_1(x_{Bj}, Q^2) &= \frac{1}{2} \sum_f e_f^2 q_f(x_{Bj}) \\ F_2(x_{Bj}, Q^2) &= \sum_f e_f^2 x_{Bj} q_f(x_{Bj}) \end{aligned} \quad (35)$$

donde q_f es la función de distribución de quarks de sabor f en el protón en la escala Q^2 .

En analogía se define la distribución de gluones $G(x, Q^2)$; ambas definiciones son sujeto de la evolución DGLAP, la cual se utiliza para incluir la contribución de los gluones a la modificación de la distribución de los quarks, dicha evolución se presenta a continuación

$$Q^2 \frac{\partial \Delta^{f\bar{f}}(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) \Delta^{f\bar{f}}\left(\frac{x}{z}, Q^2\right). \quad (36)$$

Y para tomar en cuenta la contribución de los gluones se define la función de distribución de sabor singlete

$$\Sigma(x, Q^2) = \sum_f [q^f(x, Q^2) + q^{\bar{f}}(x, Q^2)]. \quad (37)$$

Por lo tanto la ecuaciones de evolución para $\Sigma(x, Q^2)$ y $g(x, Q^2)$ se leen

$$\begin{aligned}
Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma(x, Q^2) \\ G(x, Q^2) \end{pmatrix} &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{qq}(z) & P_{qG}(z) \\ P_{Gq}(z) & P_{GG}(z) \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \Sigma(\frac{x}{z}, Q^2) \\ G(\frac{x}{z}, Q^2) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Las Ecs. (36) y (38) son conocidas como la ecuaciones de evolución Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP). La versión QED de estas ecuaciones (involucrando electrones y fotones) en el espacio (x, Q^2) fueron originalmente derivadas por Gribov y Lipatov (1972), mientras que la versión QCD fue obtenida independientemente por Altarelli y Parisi (1977) y por Dokshitzer (1977). En el espacio de momento de Mellin las ecuaciones QED fueron derivadas por Christ, Hasslacher y Mueller (1972) y las ecuaciones QCD fueron derivadas por Georgi y Politzer (1974) y también por Gross y Wilczek (1974) [37].

Las Ecs. (36) y (38) contienen la función de separación $P_{qq}(z)$ junto con otras tres funciones de $P_{qG}(z)$, $P_{Gq}(z)$, $P_{GG}(z)$. Una forma mas sencilla de ver estas ecuaciones es la siguiente

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} f_a(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_s \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{as}(z) f_s\left(\frac{x}{z}, Q^2\right). \tag{39}$$

donde $a = q_f, g$ ya sea si es que se quiere trabajar con la contribución de un gluon o de un quark. La sumatoria \sum_s es sobre todos los sabores del quark tales que $s = u, d, s, c, g$ (se incluye el gluon) y esto se utiliza para determinar la dependencia en Q^2 del marco de reposo del fotón.

Una de las preguntas más relevantes que surge en el trabajo es: ¿por qué se trabaja como valores de x bajos?

En teoría cuántica de campos, como la cromodinámica cuántica (QCD), durante cualquier instante de tiempo, los quarks y gluones se crean constantemente y nuevamente se aniquilan. Esto es posible, ya que la teoría cuántica relativista permite la creación y aniquilación de pares. Durante un período de tiempo muy corto, la relación de incertidumbre de Heisenberg permite violar la conservación de energía. Esto permite la creación espontánea de partículas durante un corto período de tiempo.

En DIS en el límite x bajo, el fotón y el protón se dispersan con un energía de centro de masa muy alta $W^2 = (p + q)^2 = Q^2(1 - x)/x + M_p^2$. Esto implica que el fotón virtual y el protón se mueven cerca a direcciones opuestas del cono de luz. Sus respectivos marcos de reposo, por tanto, están separados por un factor de boost relativo muy grande. Lo que también implica que, visto desde la perspectiva del fotón, los procesos en

el protón están fuertemente dilatados en el tiempo tal que $t = t'/\gamma$. Como consecuencia, visto desde el fotón, la vida media de un gluón creado espontáneamente aumenta. Por lo tanto, el gluón que se caracteriza por tener una vida tan corta tiene tiempo suficiente para emitir otro gluón, que a su vez tiene tiempo suficiente para crear otro gluón más, y así sucesivamente. Ahora, visto desde el marco de reposo del fotón, se ve un rápido aumento del número de gluones dentro del protón, solo si es que el protón y el fotón están separados por un factor de boost relativo grande. Este aumento ahora se refleja directamente en el crecimiento de la función de distribución de gluones, que sirve como medida del número de gluones en el protón. Notese que si nos referimos estrictamente a un fotón virtual, éste no tiene marco de reposo. Sin embargo, se puede considerar la división del fotón en un par quark-antiquark, situación física que sí tiene un marco de reposo bien definido.

Por el gran factor de boost relativo entre protón y fotón, tenemos que en el marco de reposo del fotón,

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \beta &= \frac{v}{c} \rightarrow 1, \\ \gamma &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

el protón sufre la contracción de longitud de Lorentz. Es por esto que podemos considerar al protón como una hoja de grosor nulo o cero, la cual se puede describir utilizando una distribución de delta δ de Dirac, es decir una forma imaginativa de una pizza o una tortilla. Debido a esta cinemática, el fotón y sus componentes, parejas de quarks y anti-quarks, no se desvían y su posición transversal se conserva.

Como consecuencia se puede describir la sección eficaz como convolución en coordenadas transversales de la función de onda del fotón y la sección eficaz de la pareja $q\bar{q}$ con el campo gluónico del fotón y conectar gluones con quarks, idea que se puede apreciar en la siguiente subsección.

Es por esto que si medimos F_1 y F_2 podemos extraer las tan importantes funciones de distribución de protón de tanto los quarks como de los gluones [25].

4.5. Enfoque Dipolar para QCD de alta densidad de partones

Con tal de proveer una perspectiva mas completa, se considerara desarrollos mas recientes en cromodinámica cuántica de alta energía al tomar en cuenta la dispersión inelástica profunda en el marco de reposos de un protón o un núcleo. En el este marco un fotón virtual fluctúa dentro de un par quark-antiquark, el cual como resultado pega en el blanco del protón o del núcleo. Se argumenta que los dipolos quark-antiquark son

grados de libertad convenientes para la dispersión de alta energía en la cromodinámica cuántica [25].

4.5.1. Imagen Dipolar acorde a DIS

Se empieza esta idea al considerar la dispersión inelástica profunda (DIS) en el marco de reposo del protón o del núcleo. Aunque muchas conjeturas o conclusiones también pueden aplicar a DIS del protón; en riguroso sentido, los resultados estarán justificados solo para DIS en un núcleo grande, ya que tal núcleo posee un parámetro de número atómico grande A , el cual permite realizar aproximaciones necesarias. Por lo tanto, solo se discutirá dispersión inelástica profunda en un objetivo nuclear [25].

Sin ninguna pérdida de generalidad se puede escoger el eje de coordenadas tal que el momento del fotón virtual sea dado por

$$q^\mu = (q^+, -\frac{Q^2}{q^+}, 0_\perp) \quad (40)$$

en la notación de cono de luz (+, -, \perp). El momento de cono de luz del fotón virtual q^+ es muy grande (debido a que la (alta) energía del centro de masa es $\hat{s} = mq^+$), de modo que su longitud de coherencia en la dirección longitudinal positiva,

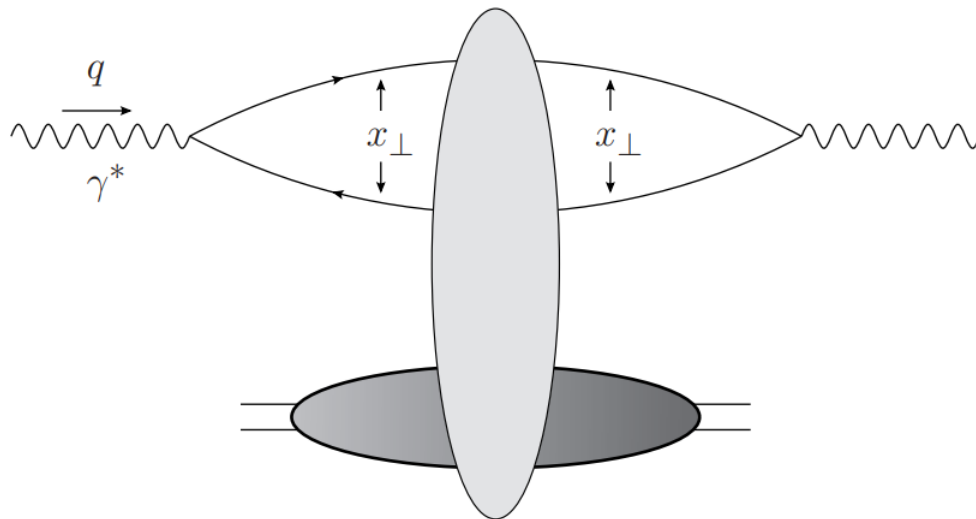


Figura 10: Amplitud de dispersión directa para DIS sobre un objetivo de un protón o un núcleo en el marco de reposo del objetivo; el fotón virtual se divide en un par $q\bar{q}$ el cual luego interactúa con el objetivo. La interacción es representada por el óvalo vertical. Por simplicidad el electrón que emita el fotón virtual no se muestra [25].

$$x^+ \approx \frac{2}{|q^-|} = \frac{2q^+}{Q^2}, \quad (41)$$

sea mucho mayor que el tamaño del protón. Si el fotón virtual fluctúa hasta convertirse en par quark-antiquark, la vida típica de tal fluctuación $q\bar{q}$ también sería mas larga que el diámetro del núcleo. Por lo tanto, un proceso DIS en el marco de reposo nuclear sucede cuando un foton virtual fluctúa hasta convertirse en un par quark-antiquark (a el cual también se le refiere como un dipolo de color o simplemente un dipolo); el par $q\bar{q}$ procede a interactuar con el objetivo (Gribov 1970, Bjorken y Kogut 1973, Frankfurt y Strikman 1988). La amplitud de dispersión directa para el proceso ilustrado en la Fig. (10), con la interaccion dipolo-nucleo $q\bar{q}$ representada por el óvalo vertical. Esta es la imagen dipolar de la dispersión inelástica profunda (DIS) (Kopeliovich, Lapidus y Zamolodchikov 1981, Bertsch et al. 1981, Mueller 1990, Nikolaev y Zakharov 1991) [25].

La interacción de un fotón virtual con un núcleo se puede ver como un proceso de dos etapas: El fotón virtual se desintegra formando un dipolo incoloro el cual se conforma por un quark y un antiquark, y el dipolo incoloro viaja a través del núcleo. Sin embargo, esta separación entre el escala de tiempo para que el fotón se desintegre en el par $q\bar{q}$ y el tiempo de interacción no es la única ventaja de la imagen dipolar. Otra simplificación importante proviene del hecho que en la dispersión de alta energía un dipolo incoloro, con tamaño transversal x_\perp , no cambia su tamaño durante la interacción y por lo tanto la matriz S de la interacción es diagonal con respecto al tamaño del dipolo transversal (Zamolodchikov, Kopeliovich y Lapidus 1981, Levin y Ryskin 1987, Mueller 1990, Brodsky et al. 1994). De hecho, mientras que el dipolo incoloro está atravesando el objetivo, la distancia x_\perp entre el quark y el antiquark sólo puede variar por una cantidad de

$$\Delta x_\perp \equiv R \frac{k_\perp}{E} \quad (42)$$

donde $E \sim q^0$ denota la energía del dipolo en el marco del laboratorio (el marco de reposo del objetivo), R es el tamaño longitudinal del objetivo, y k_\perp es el momento transversal relativo del par $q\bar{q}$ adquirido a través de la interacción con el objetivo. En la Ec. (35) k_\perp/E es la velocidad transversal relativa del quark respecto al antiquark. Acorde a la Ec. (35) se puede apreciar que el cambio en el tamaño del dipolo es suprimido por una potencia de energía E y por lo tanto es pequeña. Para poder cuantificar esto es mejor recordar la defunción de Bjorken x , dada por

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{mq^+} \equiv \frac{Q^2}{2mE}. \quad (43)$$

Al utilizar la Ec. (43) dentro de la (42) junto al principio de incertidumbre $Q \equiv k_{\perp} \equiv 1/x_{\perp}$ resulta en

$$\frac{\Delta x_{\perp}}{x_{\perp}} \equiv 2mxR = \frac{4R}{l_{coh}} \ll 1, \quad (44)$$

donde $l_{coh} = 2/(mx)$ es la longitud de coherencia de la fluctuación dipolar. Por consiguiente se observa que cuando x tiene valores $x \ll 1/(mR)$, cuando el dipolo interactúa coherentemente con el núcleo entero en la dirección longitudinal, el movimiento de retroceso transversal del quark y antiquark son insignificantes en comparación con el tamaño del dipolo. Por lo tanto, el tamaño transversal del dipolo es invariante en interacciones de alta energía, como se muestra en la Fig. (10).

Se concluye que al calcular la sección eficaz DIS total, junto con otras observables QCD de alta energía, es conveniente trabajar en el espacio de coordenadas transversales. En consecuencia, se adoptará una representación mixta; se utilizará el espacio de momento transversal junto con el espacio de coordenadas transversales. La teoría de perturbación de cono de luz (LCPT por sus siglas en inglés) es una herramienta muy útil para esta situación. AL utilizar LCPT para calcular la sección eficaz total γ^*A DIS es posible factorizar el diagrama en la Fig. (10) como el cuadrado de la función de onda del cono de luz $\psi^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_{\perp}, z)$ para la separación de un fotón virtual hasta convertirse en un dipolo $q\bar{q}$ y la sección eficaz total para la dispersión de un dipolo sobre un objetivo del núcleo $\sigma_{tot}^{q\bar{q}A}(\vec{x}_{\perp}, Y)$, tal que [25]

$$\sigma_{tot}^{\gamma^*A}(x, Q^2) = \int \frac{d^2x_{\perp}}{4\pi} \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)} |\Psi^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_{\perp}, z)|^2 \sigma_{tot}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_{\perp}, Y). \quad (45)$$

Aquí $z = k^+/q^+$, con k^+ que es el momento del cono de luz del quark en el par $q\bar{q}$. En general, la sección eficaz dipolo-núcleo dependerá de z también; no obstante, en las aproximaciones eikonal y LLA que se consideran también, $\sigma_{tot}^{q\bar{q}}$ es independiente de z . EL intervalo de rapidez neto para la dispersión dipolo-núcleo es dado por $Y = \ln(1/x)$ para $x_{\perp} \sim 1/Q$ [25].

Para explicar la fórmula (67) dos secciones mas adelante, se puede recurrir al gran factor de boost relativo. Dado que el protón está fuertemente contraído por Lorentz, la interacción, la formación del fotón tiene lugar mucho tiempo antes de la interacción con el protón. Por eso es posible calcular la probabilidad de encontrar un dipolo de color de tamaño r , utilizando la función de onda del frente de luz del fotón, ya que la formación no se ve afectada por la interacción.

4.6. Saturación de Gluones

Los gluones son, en última instancia, responsables de la mayor parte de la masa de materia visible en el universo. La contribución gluónica a la masa tiene su origen en la nube que rodea a los quarks de masa ligera. Esta nube resulta en aproximadamente el 99 % de la masa de un protón o neutrón. Los gluones generan la fuerza fuerte, esta fuerza confina permanentemente a los quarks y gluones dentro de nucleones. La fuerza nucleón-nucleón, responsable de hacer núcleos atómicos, tiene su origen en los gluones [29]. Pues estos gluones son las partículas de intercambio de la fuerza de color entre los quarks, de forma análoga al intercambio de fotones en la fuerza electromagnética entre dos partículas cargadas. Se puede decir que los gluones en el campo gluónico son los cuantos de luz en el campo electromagnético.

Sabemos muy poco de los gluones mediante experimentos directos. Su existencia se infiere indirectamente. Aproximadamente 1/2 del momento de un protón que se mueve rápidamente se encuentra en los gluones. Esto se sabe porque la contribución de los quarks medidos directamente sólo da la mitad del momento total del protón. Al medir las distribuciones de quarks dentro de un protón y su variación con la escala del momento de la sonda de medición, se puede extraer la distribución implícita de gluones. A través de la medición de la producción de jets de partículas con alto momento transversal producidos en colisiones de partículas que interactúan fuertemente, se pueden medir distribuciones de gluones, pero con fuertes restricciones, ya que la escala de momento de los jets es grande y con incertidumbres asociadas con la hadronización de los jets [29].

En QCD, la saturación se describe mediante ecuaciones de evolución no lineales para la densidad de gluones, que resumir un subconjunto de diagramas que generan contribuciones de la forma $\alpha_s \ln(\frac{1}{x})$. Las soluciones para x pequeña de las ecuaciones de evolución, junto con condiciones iniciales adecuadas, proporcionan densidades de partones, que luego deben ser convolucionadas con elementos de matriz dura apropiados con tal de obtener predicciones para secciones eficaces medibles. El marco Color Glass Condensate (CGC) y el High Energy Factorization (HEF) son dos marcos basados en QCD que se pueden utilizar para estudios fenomenológicos [26].

El Color Glass Condensate (CGC) es la materia que describe los gluones dentro de una partícula que interactúa fuertemente cuando el la fracción del momento longitudinal típico es pequeña. La idea básica para el CGC es la consecuencia de unos sencillas observaciones experimentales. La primera es que el tamaño aparente de un hadrón varía muy lentamente con energía. Esto se sabe directamente de la medición experimental. de secciones eficaces de pp y $p\bar{p}$. Existen límites rigurosos a la tasa de crecimiento de secciones eficaces a alta energía [29]. El límite de Froissart afirma que

$$\sigma_{hadron} \leq \frac{A}{m_\pi^2} \ln^2\left(\frac{E}{E_0}\right) \quad (46)$$

donde A y E_0 son constantes y E es la energía de centro de masa de la reacción. Por el otro lado, los datos de HERA sobre las funciones estructurales del gluon, y los argu-

mentos teóricos resultan en un crecimiento en el número de gluones como

$$N_{gluones} \sim B \left(\frac{E}{E_0} \right)^\delta \quad (47)$$

donde B y δ son constantes y $\delta \sim 0,2 - 0,3$ para energía HERA. Esto significa que la densidad del gluon por unidad de área tiene que crecer [29].

La densidad por unidad de área tiene las dimensiones de momento cuadrado, por consiguiente se introduce el concepto de momento de saturación,

$$Q_{sat}^2 \sim N_{gluones} / \sigma_{hadron} \quad (48)$$

donde σ_{hadron} es la sección eficaz de alta energía en cierta energía E y $N_{gluones}$ es el número de gluones en esa energía. Este momento de saturación crece como una potencia de la energía a medida que la energía incrementa [29].

4.6.1. Evolución No Linear

La visión más simple de un protón revela a tres quarks (dos 'up' quarks y un 'down quark) interactuando a través de los intercambios de gluones, los cuales unen a los quarks. No obstante, los experimentos que investigan la estructura del protón en el colisionador 'Hadron-Electron Ring Accelerator' (HERA) y el creciente conjunto de pruebas del 'Relativistic Heavy Ion Collider' (RHIC) y el 'Large Hadron Collider' (LHC), sugieren que esta imagen es demasiado simple. Incontables gluones y un "mar" de quarks y antiquarks aparecen y desaparecen dentro de cada hadrón. Estas fluctuaciones pueden ser investigadas en experimentos de dispersión de alta energía. Debido a la dilatación del tiempo de Lorentz, cuanto más aceleramos un protón y más se acerca a la velocidad de la luz, mayor será el tiempo de vida de los gluones que surgen de las fluctuaciones cuánticas. Un "observador" externo que observa un protón que se mueve rápidamente verá la "cascada" de gluones durar cada vez más y más, cuanto más alta sea la velocidad del protón. Entonces, en efecto, al acelerar el protón, uno puede ralentizar las fluctuaciones de los gluones lo suficientes como para "tomar fotografías instantáneas" de ellos con una partícula de prueba enviada a interactuar con el protón de alta energía [23].

En los experimentos DIS se investiga la función de onda del protón con ayuda de un leptón, el cual interactúa con el protón al intercambiar un fotón (virtual) con él. La virtualidad del fotón, Q^2 , determina el tamaño de la región en el plano transversal al eje del haz palpado por el fotón. Según el principio de incertidumbre, la anchura de la región es $\Delta r_T \sim 1/Q$. Otra variable relevante es x de Bjorken, que es la fracción de momento del protón transportado por el quark impactado. A altas energías, $x \approx Q^2/W^2$ es pequeño (W^2 es la energía del centro de masa al cuadrado de el sistema fotón-protón). Por lo tanto, pequeños valores de x corresponde a la dispersión de alta energía [23].

La función de onda del protón depende de ambos, x y Q^2 . Un ejemplo de tal dependencia se muestra en la Fig. (11), extraída de los datos medidos en HERA para dispersión

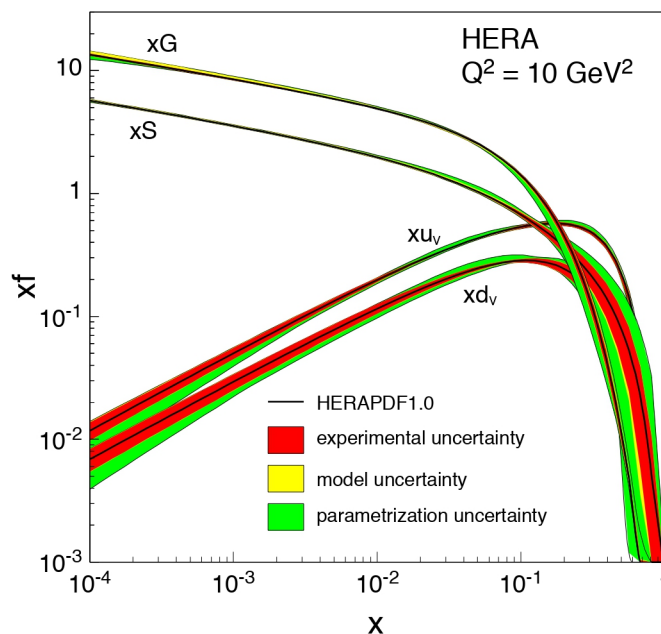


Figura 11: Función de distribución de partones del protón trazada como función de x Bjorken. Claramente los gluones dominan para valores de x pequeños [23].

inelástica profunda en un protón. Aquí se grafica la dependencia de x de las funciones de distribución de partones (quarks o gluones) (PDFs). En el orden principal los PDFs pueden interpretarse como proporcionar el número de quarks y gluones con una determinada fracción x del momento del protón. En la Fig. (11), se pueden ver los PDF de los valence quarks en el protón, xu_v y xd_v que disminuyen con x decreciente. Los PDFs de los sea quarks y gluones, denotados por xG y xS en la Fig. (11), parecen aumentar considerablemente hacia los valores de x bajo. (Tengamos presente la escala logarítmica del eje vertical). También se puede observar que la distribución de gluones domina sobre aquellos de valencia y los sea quarks a valores moderados de x por debajo de $x = 0.1$. Recordemos que x bajo significa alta energía, entonces concluimos que parte de la función de onda del protón responsable de las interacciones en dispersión de alta energía consiste principalmente de gluones [23].

La función de onda del protón para valores de x pequeño es dominada por gluones, los cuales son probables a poblar el área transversal del protón, creando una alta densidad de gluones. Esto se muestra en la Fig. (12), imagen que ilustra cómo en valores de x bajos (parte derecha), los partones (principalmente gluones) son mucho más numerosos dentro del protón que en valores de x grandes (parte izquierda), en concordancia con la Fig. (11). Esta función de onda densa para valores de x pequeños de un protón o núcleo ultra relativista se conoce 'Color Glass Condensate' (CGC) [13].

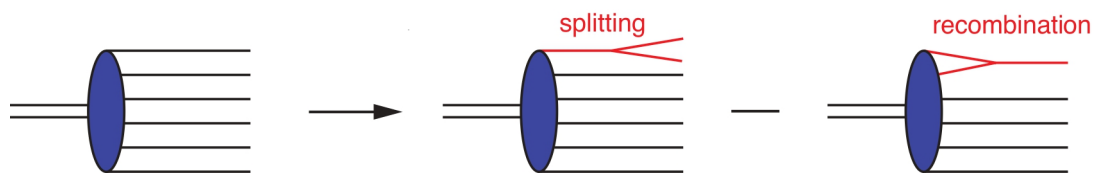


Figura 13: La evolución no lineal para pequeños valores de x de una función de onda hadrónica o nuclear. Todos los partones (quarks y gluones) son denotadas por líneas solidas derechas por simplicidad [23].

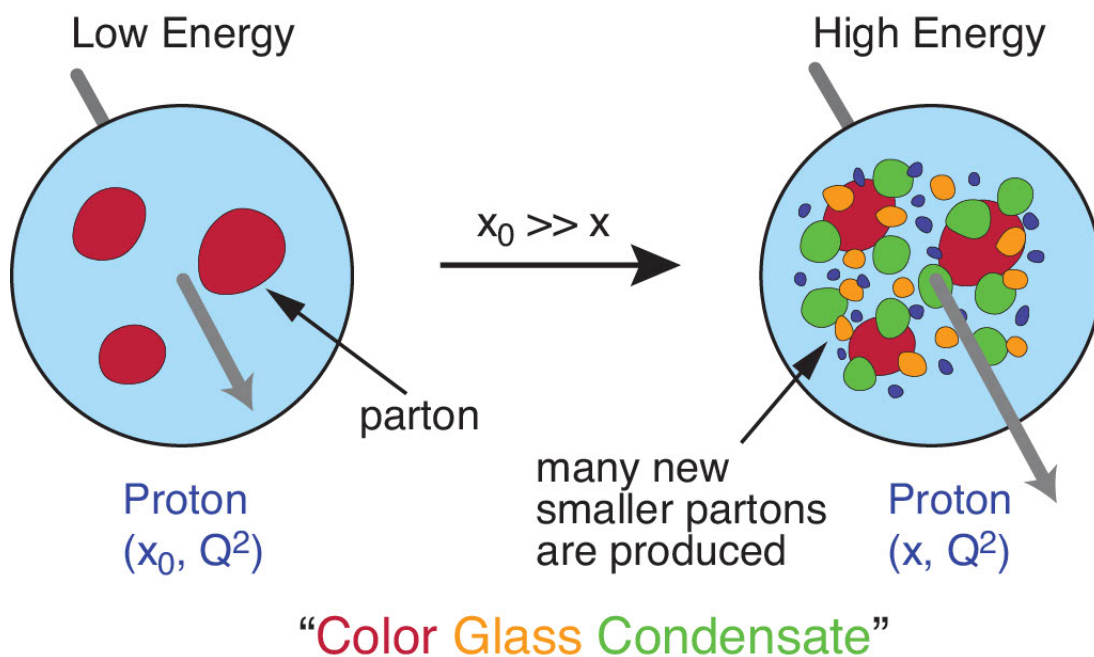


Figura 12: La función de onda del protón para valores de x pequeños (parte derecha) contiene un gran numero de gluones (y quarks) comparada con la misma función de onda para un valor $x = x_0$ más grande (parte izquierda). La imagen es una proyección del plano transversal al eje del haz (representado por flechas "saliendo" de la pagina, la longitud de las flechas refleja el momento del protón) [23].

Surge la pregunta de si es que las densidades del gluón y del quarks pueden crecer sin límite en valores de x pequeño. Si bien no existe un límite estricto sobre la densidad numérica de gluones en QCD, sí hay un límite en las secciones eficaces de dispersión que surge de la unitariedad. En efecto, un protón (o núcleo) con muchos gluones de "mar" es más susceptible a interactuar en una dispersión de alta energía, lo que conduce a secciones eficaces de dispersión más grandes. Por lo tanto, el límite en las secciones eficaces debería tener implicaciones para la densidad de gluones. El límite de la sección eficaz surge debido al límite del disco negro conocido por mecánica cuántica [23]. La sección eficaz total de dispersión de alta energía de una partícula en una esfera de radio R está limitada por

$$\sigma_{tot} \leq 2\pi^2 R. \quad (49)$$

El límite del disco negro es un tema interesante que espera estudiarse en proyectos posteriores, sin embargo, para esta ocasión es suficiente con mencionarlo como la razón física del límite de la sección eficaz de dispersión [23].

Ahora veamos cómo es que ocurre la saturación de gluones, las variables que hacen que exista una sobreproducción de gluones. La más importante de todas es la energía Q y acorde a la cantidad de energía con la que se trabaje es que dependen los siguientes puntos:

- El número de partones (quarks y gluones) que hay crece de forma $\ln Q^2$
- El tamaño efectivo disminuye de forma $1/Q^2$
- Jamás se encuentra un medio denso; al contrario, más y más diluido

Se muestra un breve ejemplo del formalismo que se utiliza llamado 'operator product expansion' o también conocido como factorización colineal. Básicamente se trata de una expansión de coordenadas de la cromodinámica cuántica (QCD) en $1/Q^2$ y después una de semis $(\alpha_s \ln Q^2)^2 \sim 1$. En donde α_s puede tomar un valor de 0.2 y $\ln Q^2$ un valor de 5 de forma que

$$\Sigma_n \alpha_s^n \delta_n \approx \alpha_s \delta_1 + \alpha_s^2 \delta_2 + \dots + \alpha_s^n \delta_n \quad (50)$$

La Ec. (50) se resuelve de forma que resulta en

$$\Sigma_n \alpha_s^n \delta_n = \Sigma_n (\alpha_s \ln Q^2)^n C_n \quad (51)$$

Lo que en realidad la evolución DGLAP.

En la dispersión inelástica profunda (DIS) no se trabaja solamente con $\ln Q^2$ sino que también con $\ln 1/x$ que se puede escribir como $\ln(1-x)$.

Ahora tenemos que la Ec. (51) necesita resolución en $1/x$, por lo tanto cambia a

$$\Sigma_n (\alpha_s \ln \frac{1}{x})^n \quad (52)$$

Además si x tiende a 10^{-4}

$$\Sigma_n (\alpha_s \ln \frac{1}{x} \ln Q^2)^n \quad (53)$$

Un trabajo similar a DGLAP, hecho por BFKL tiene las siguientes condiciones

- Expansión en x
- La resolución es de de igual manera $(\alpha_s \ln \frac{1}{x})^n$

Y su formalismo es de la siguiente forma

$$\frac{d}{d \ln \frac{1}{x}} G(x, \vec{k}) = \int \frac{d^2 l}{\pi} K(\vec{k}, \vec{l}) G(x, \vec{k}) \quad (54)$$

Para empezar a explicarlo correctamente empezamos con energías $Q \sim 1 - 2 \text{ GeV}$ donde el tamaño del protón es comparable a $1/Q$. Después si exploramos hacia una x mas pequeña las condiciones se mantienen igual.

Sin embargo, si hacemos que x tienda a 0 se esperarán efectos de reconsideración, un medio aun más denso y una mayor producción de gluones.

Se observa que a medida que disminuye el valor de x predominan la los gluones sobre los quarks, incluida la masa de los mismos. Los quarks en realidad solo se presentan como sea quarks en x muy pequeño.

A un nivel técnico se puede formular BFKL para las amplitudes de dipolo $N(x, \vec{r}, \vec{b})$ e introducimos

$$\sigma_{q\bar{q}}(x, r) = 2 \int d^2 s N(x, \vec{r}, \vec{b}) \quad (55)$$

donde el subíndice se refiere a la sección eficaz del dipolo BFKL.

$N = 1$ es un punto fijo y en consiguiente el valor de máximo de N . Como $N = 1$ es el valor máximo entonces

$$\sigma_{q\bar{q}}^{max} = \sigma_0 \cdot 1 \quad (56)$$

$$\sigma_0 = 2 \int d^2 s \quad (57)$$

Este ultimo resultado de la Ec. (57) es aproximadamente el tamaño del protón.

Dentro de la teoría de QCD, utilizando la factorización de amplitudes de dispersión en el límite de energía alta, es posible derivar la siguiente expresión para la amplitud dipolar

$$N(x, \vec{r}, \vec{b}) = \frac{1}{N_c} \langle tr(\hat{1} - V(\vec{b} + \frac{\vec{r}}{2}) V^\dagger(\vec{b} - \frac{\vec{r}}{2})) \rangle \quad (58)$$

donde $V(x)$ es una línea de Wilson, la cual resume el campo gluónico denso con $V(x) V^\dagger(x) = \mathbb{1}$ debido a la unitaridad. La expresión dentro del bra-cket $\langle \dots \rangle$ denota el promedio sobre el campo gluónico del objetivo en función de x . Si $\vec{r} = 0$ encontramos que $N = 0$ y por lo tanto no hay interacción. Dado que r denota la separación transversal entre el quark y el antiquark, sus posiciones coinciden y se neutralizan entre sí. No existe carga de color a la cual se pueda acoplar el campo gluónico. Si r es grande, el par quark-antiquark se encuentra demasiado separado y, por lo tanto, no está correlacionado.

Se puede demostrar que en ese caso en el que el par quark-antiquark está separado, el promedio $\langle \dots \rangle$ sobre $V(x)V(x)^\dagger$ produce un resultado de cero; $N = 1$ en ese caso. Por lo tanto, la amplitud del dipolo tiene dos valores extremos, a saber, 0 (máximamente correlacionada: sin interacción) y 1 (des correlación: interacción máxima). Estos límites también se pueden obtener como consecuencia de la ecuación de evolución no lineal de BK, véase [30].

En la reacción DIS, integramos el parámetro de impacto b , ya que no observamos los detalles asociados con la separación transversal del dipolo y el protón. A continuación asumimos que este tamaño transversal permanece constante durante la interacción y por lo tanto

$$\sigma_{q\bar{q}} = 2 \int d^2b N(x, \vec{r}, \vec{b}) = \sigma_0 N(x, \vec{r}) \quad (59)$$

donde $\sigma_{q\bar{q}}$ denota la sección eficaz del dipolo. Para modelar la dependencia de r y x , notamos además que los cálculos perturbativos, que son aplicables para tamaños de dipolos pequeños r , correspondientes a una escala grande $1/r$, indican que $\sigma_{q\bar{q}} \sim r^2$ para pequeños valores de r . Además, esperamos que la sección eficaz del dipolo crezca como la función de distribución de partón del gluón y, por tanto, como $x^{-\lambda}$. Finalmente, se llegan a las dimensiones correctas, ahora necesitamos introducir alguna escala de masa Q_0 . Es una convención establecer $Q_0 = 1 \text{ GeV}$, mientras que el valor numérico se tiene en cuenta mediante un parámetro x_0 .

GBW diluido:

Esta situación física se describe de forma exponencial

$$\sigma_{q\bar{q}} \sim e^{\lambda \ln \frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^\lambda \quad (60)$$

Para el caso diluido se ve claramente en los datos de HERA.

Cuando x se aproxima a 0 entonces $\sigma_{q\bar{q}}$ se aproxima a una constante la cual es bien conocida, σ_0 .

Existe impulso entre ambos y también se analiza $\sigma_{q\bar{q}}(r)$ con r siendo el tamaño de dipolo. Si r se aproxima a 0 todavía se comporta como un dipolo en el medio diluido. Si $r = 0$ los quarks y antiquarks se van a aniquilar tal que $\sigma_{q\bar{q}}(r = 0) = 0$.

El cálculo es $\sigma_{q\bar{q}}(r \rightarrow 0)$ en r^2 , por el otro lado $\sigma_{q\bar{q}}(r \rightarrow \infty) = \sigma_0$.

Ahora,

$$\sigma_{q\bar{q}}(x, r \rightarrow 0) = \sigma_0 r^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^\lambda Q_0^2 \quad (61)$$

Donde

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^\lambda Q_0^2 = Q_s^2 \quad (62)$$

Por lo tanto la Ec. (61) se convierte en

$$\sigma_{q\bar{q}}(x, r \rightarrow 0) = \sigma_0 r^2 Q_s^2 \quad (63)$$

Con diferentes condiciones llegamos al mismo resultado

$$\begin{aligned} \sigma_{q\bar{q}}(x, r \rightarrow \infty) &= \sigma_0 \\ \sigma_{q\bar{q}}(x \rightarrow 0, r) &= \sigma_0 \end{aligned} \quad (64)$$

Después de la breve explicación se sugiere una solución posible que es siguiente la definición de la siguiente escala de saturación

$$\sigma_{q\bar{q}}(x, r) = \sigma_0 \left(1 - e^{-\frac{r^2 Q_s^2(x)}{4}}\right) \quad (65)$$

$$\begin{aligned} Q_s^2 &= Q_0^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^\lambda \\ R_s^2 &\rightarrow 0 \text{ para } x \rightarrow 0 \\ Q_s^2 &= \frac{1}{R_s^2} \end{aligned} \quad (66)$$

También se puede definir como el valor $1/r$, en el cual el factor $e^{-\frac{r^2 Q_s^2(x)}{4}}$ de la Ec. (65) se reduce a $e^{-1/2}$, si $r = 2/Q_s(x)$ entonces $e^{-\frac{r^2 Q_s^2(x)}{4}}$ se reduce a e^{-1} .

4.7. Modelo de Saturación GBW

Para valores pequeños de la variable de Bjorken x , el formalismo de la función de onda fotónica ha sido establecida como una herramienta útil para calcular secciones eficaces inelásticas profundas y difractivas relacionadas para dispersión γ^*p [4, 30, 31]. Éste permite separar entre la función de onda del fotón que describe la disociación del fotón en un par quark-antiquark y la interacción del par quark-antiquark con el objetivo. La función de onda de fotones constituye la parte calculable del proceso mientras que

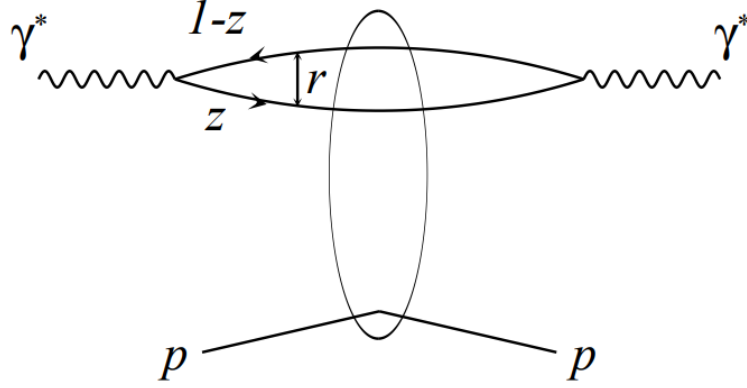


Figura 14: Representación del proceso básico como se discute en el texto [16].

el resto está sustancialmente influenciado por contribuciones no perturbativas y necesita ser modelado. El diagrama correspondiente se muestra en la Fig. (14). Se trabaja en un marco donde el fotón con momento q y el protón con momento p son colineales. En consecuencia, la distribución del par quark antiquark se da en términos de z y $(1-z)$, la fracción de momento con respecto a q , y la separación transversal relativa r . Para fotones polarizados transversales (T) y longitudinales (L) la sección eficaz γ^*p toma la forma [30, 31]

$$\sigma_{T,L}(x, Q^2) = \int d^2r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(z, r)|^2 \hat{\sigma}(x, r^2), \quad (67)$$

donde $W^2 = (p + q)^2$, $Q^2 = -q^2$ y $x = Q^2/(W^2 + Q^2)$. La función de onda cuadrada $\Psi_{T,L}$ es dada por

$$|\Psi_T(z, r)|^2 = \frac{6\alpha_{em}}{4\pi^2} \Sigma_f \{ [z^2 + (1-z)^2] \epsilon^2 K_1^2(\epsilon r) + m_f^2 K_0^2(\epsilon r) \} \quad (68)$$

y

$$|\Psi_L(z, r)|^2 = \frac{6\alpha_{em}}{4\pi^2} \Sigma_f e_f^2 \{ 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r) \}, \quad (69)$$

para los fotones transversales y longitudinales, respectivamente. En la fórmula de arriba

$$\epsilon^2 = z(1-z)Q^2 + m_f^2. \quad (70)$$

K_0 y K_1 son funciones McDonald y la sumatoria se realiza sobre los sabores del quark. Las secciones eficaces γ^*p son relacionadas a la función estructural F_2 de la siguiente manera:

$$F_2(x, Q^2) = F_T(x, Q^2) + F_L(x, Q^2) \quad (71)$$

y

$$F_{T,L}(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}}\sigma_{T,L}(x, Q^2) \quad (72)$$

La interacción del par $q\bar{q}$ con el protón es descrita por la sección eficaz $\hat{\sigma}(x, Q^2)$ la cual es modelada en nuestro análisis [16]. El elemento más crucial es la adopción del radio dependiente de x

$$R_0(x) = \frac{1}{Q_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\lambda/2} \quad (73)$$

el cual escala la separación quark-antiquark en la sección eficaz del dipolo

$$\hat{\sigma}(x, r^2) = \sigma_0 g(\hat{r}^2), \quad (74)$$

y

$$\hat{r} = \frac{r}{2R_0(x)} \quad (75)$$

$Q_0 = 1 \text{ GeV}$ in (73) define la dimensión. La función g en (74) no está completamente restringida. Sin embargo, es importante el aumento cuadrático en \hat{r} pequeño y el

aplanamiento en \hat{r} grande. Este último comportamiento proporciona la saturación de la sección eficaz (67), i.e. $\sigma^{\gamma^*p} = \sigma_T + \sigma_L \sim \text{const}$ para Q^2 pequeño. En \hat{r} pequeño, por otro lado, tenemos un comportamiento de escala simple (transparencia de color), $\sigma^{\gamma^*p} \sim 1/Q^2$, combinado con una dependencia de potencia de (74) en x como se observa típicamente en la dispersión inelástica profunda. Elegimos el siguiente Ansatz simple para la función g

$$g(\hat{r}^2) = 1 - e^{-\hat{r}^2} \quad (76)$$

Este Ansatz recuerda a una eikonalización. Debe ser mencionado, sin embargo, que un tratamiento eikonal completo requiere la incorporación de una función perfil objetivo. La forma (76) significaría en este contexto que la densidad gluónica dentro del protón se distribuye uniformemente sobre una área determinada dentro de un límite definido y cero más allá [16].

En nuestro análisis ajustamos 3 parámetros, σ_0 , x_0 y λ , de la sección eficaz dipolar. Antes de seguir con los detalles del ajuste, es conveniente ejecutar un análisis cualitativo del comportamiento de la sección eficaz (67) en nuestro modelo [16].

4.7.1. Análisis Cualitativo

En la discusión subsecuente nos enfocaremos en la sección eficaz σ_T en (67) la cual domina sobre σ_L . También ignoramos la masa del quark por simplicidad. El punto importante en el análisis cualitativo es el comportamiento de $K_1(\epsilon r)$ en (68) para valores pequeños de ϵr :

$$K_1(\epsilon r) \sim \frac{1}{\epsilon r} \quad (77)$$

Para valores grandes de ϵr la función K_1 es suprimida exponencialmente. Por lo tanto, con tal de obtener la contribución dominante realizamos una integración en la Ec. (67) para $\epsilon r < 1$ [16].

La virtualidad del fotón introduce la escala $1/Q$ para la dimensión transversal del par $q\bar{q}$. Un par es considerado "pequeño" cuando la condición $r < 1/Q$ se satisface y "grande" cuando $r > 1/Q$. Ahora analicemos la contribución de la ecuación (67) desde pares pequeños para los cuales la condición $\epsilon r = \sqrt{z(1-z)}rQ < 1$ se satisface para todos los valores de z . En el caso de $1/Q \ll R_0$, como se muestra en la Fig. (15a), el tamaño de los pares pequeños $q\bar{q}$ es mucho menos que el radio de saturación y $\hat{\sigma}(r) \sim \sigma \hat{r}^2/R_0^2$ [16]. La sección eficaz (67) exhibe el siguiente comportamiento

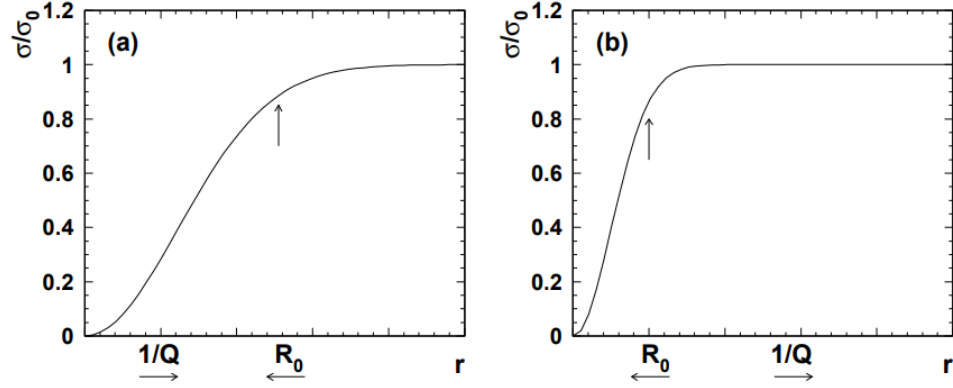


Figura 15: El perfil de la sección eficaz dipolar para diferentes Q . Las flechas pequeñas debajo de la figura muestran como los parámetros indicados cambian cuando Q disminuye (para W^2 fija) [16].

$$\sigma_T \sim \frac{\sigma_0}{R_0^2} \int dz \int_0^{1/Q^2} dr^2 \epsilon^2 \left(\frac{1}{\epsilon^2 r^2}\right) \hat{r}^2 \sim \frac{1}{Q^2} \frac{\sigma_0}{R_0^2} \quad (78)$$

donde la integración sobre z podría ser considerada después de la cancelación de los factores ϵ . Entonces para x constante la sección eficaz (78) exhibe el comportamiento familiar de la escala de corta distancia, i.e. la función de estructura correspondiente $F_2(x, Q^2)$ es aproximadamente constante en Q^2 [16].

Analicemos la situación esquemáticamente mostrada en la Fig. (15b) en la cual el tamaño del par $q\bar{q}$ es mayor que el radio de saturación $1/Q > R_0$. Para la contribución del pequeño par a σ_T ahora obtenemos

$$\sigma_T \sim \int_0^{R_0^2} dr^2 \left(\frac{1}{r^2}\right) \sigma_0 \left(\frac{r^2}{R_0^2}\right) + \int_{R_0^2}^{1/Q^2} dr^2 \left(\frac{1}{r^2}\right) \sigma_0 \sim \sigma_0 + \sigma_0 \log\left(\frac{1}{Q^2 R_0^2}\right). \quad (79)$$

Con respecto al comportamiento de potencia en Q^2 la sección eficaz puede ser vista como una constante. La divergencia potencial debido al logaritmo será regulada por la masa del quark en nuestro análisis completo. El valor actual de la masa juega un rol importante en la descripción de la región de fotoproducción.

Un análisis similar puede ser realizado para pares "grandes" en los cuales $r > 1/Q$. La condición de integración $\epsilon r < 1$ ahora se satisface cuando $z < 1/(r^2 Q^2)$ y la integración de z en (67) no puede desestimada. Debe ser hecha antes de integrar sobre r . El resultado al final es el mismo que para pares pequeños. Si el tamaño característico del

dipolo $q\bar{q}$ es menor que R_0 el comportamiento de la escala es obtenido. Para $1/Q \sim R_0^2$ la sección eficaz σ_T es constante en Q^2 . Un análisis más detallado ofrece modificaciones logarítmicas [16].

Por ahora en nuestra discusión hemos asumido un radio de saturación constante el cual permite una transición suave de σ_T entre la región de escala de Q^2 grande y la región de saturación de Q^2 baja (baja saturación Q^2). La característica principal de nuestro modelo, no obstante, es el hecho de que el radio de saturación depende de x ($R_0^2(x) \sim x^{\lambda/2}$ with $\lambda > 0$). De esta manera habremos introducido otro tipo de saturación la cual puede ser llamada la saturación x -pequeño. En términos de la perspectiva del partón está muy relacionado con la saturación de la densidad del gluón [16]. Una consecuencia importante es que para W fija el radio R_0^2 se vuelve independiente de Q lo que hace a la saturación mucho más dinámica. Como se ilustra en la Fig. (15) ambos R_0^2 y $1/Q$ se mueven hacia el otro, a cierta escala $Q=1/R_0^2$ se encuentran y se cruzan entre sí. En consecuencia, la saturación ocurre en mayores valores de Q^2 que en un modelo con un R_0^2 fijo. En adición, la transición de altas a bajas Q^2 es más rápida. La línea dada por la condición

$$R_0^2(x) = \frac{1}{Q^2} \quad (80)$$

será nombrada la línea crítica. En la imagen del partón describiría el límite de la densidad crítica [16]. El patrón preciso de saturación es determinada por los ajustes de los tres parámetros en (74) a los datos inclusivos DIS ya existentes.

4.7.2. Parametrización Simplificada y Línea Crítica

En esta sección analizamos la estructura analítica de la sección eficaz en plano complejo v , proceso que se extiende a la transformación de Mellin y no esta fuera del rango de estudio de este trabajo. La posición y características de las singularidades en el plano complejo v determina el comportamiento de la sección eficaz analizada. En general la integración v corre a lo largo del eje real, y dependiendo del argumento $(\frac{x_0}{x})^\lambda \frac{Q_0^2}{Q^2}$ uno puede cerrar el contorno en la parte superior o inferior del plano complejo. Por ejemplo, en el caso de Q^2 grande y x no tan pequeño (régimen "duro") el argumento mencionado es menor a 1 y el contorno tiene que ser cerrado en el plano inferior. La primera singularidad que se encuentra es el polo en $v=-i/2$. Dependiendo en el modelo de la sección eficaz dipolar, puede ser un doble o triple polo.

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^\lambda \frac{Q_0^2}{Q^2} \ln\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^\lambda \frac{Q^2}{Q_0^2}\right] \quad (81)$$

Uno debería notar que el logaritmo es debido a la función de onda del fotón y se relaciona a la división del gluón en un par quark-antiquark. El factor enfrente del logaritmo surge porque $1/2 + iv = 1$ y simplemente refleja el comportamiento de escala básico de F_2 combinado con un cierto comportamiento de potencia en x . Uno también reconoce que la contribución longitudinal solo tiene un único polo y por lo tanto no produce un logaritmo. Como no es la contribución principal lo ignoraremos en lo siguiente.

En el régimen "suave" donde $(\frac{x_0}{x})^\lambda \frac{Q_0^2}{Q^2}$ es mayor que 1 cerramos el contorno en plano superior y encontramos el polo principal en $v=i/2$. Para la sección eficaz junto con el modelo de la transformación de Mellin es nuevamente un polo doble que conduce al siguiente comportamiento

$$\ln\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^\lambda \frac{Q_0^2}{Q^2}\right] \quad (82)$$

Ahora podemos combinar los términos "duro" y "suave" dados por las Ecs. (81) y (82) en una sola expresión, la cual es la más importante en este documento ya que el ajuste de los datos experimentales se realizará en esta misma así como la gráfica resultante

$$\sigma^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \sigma'_0 \left\{ \ln\left[\left(\frac{x'_0}{x}\right)^{\lambda'} \frac{Q_0^2}{Q^2} + 1\right] + \left(\frac{x'_0}{x}\right)^{\lambda'} \frac{Q_0^2}{Q^2} \ln\left[\left(\frac{x}{x'_0}\right)^{\lambda'} \frac{Q^2}{Q_0^2} + 1\right] \right\} \quad (83)$$

donde hemos añadido la constante 1 en el argumento de los logaritmos con tal que se permita una transición suave entre el régimen "duro" y el régimen "suave". En adición, se introducen los parámetros primados, para indicar algo importante, que la forma funcional debe ser reajustada para poder obtener una buena descripción. A pesar de que la Ec. (83) es bien una aproximación cruda del enfoque original, ésta reproduce las características principales.

Como se discutió en nuestro análisis cualitativo se definió la saturación como la transición de distancias cortas a distancias largas con la escala característica dada por el radio de saturación $R_0(x)$. Al observar la Ec. (83) uno se da cuenta que la transición desde el régimen "duro" al "suave" ocurre cuando $(\frac{x_0}{x})^\lambda \frac{Q_0^2}{Q^2} = 1$. Esta igualdad define básicamente la misma línea crítica que en nuestro análisis cualitativo de la sección 4.7.1 (véase Ec. (80))

$$Q^2 = \frac{1}{Q_0^2} \left(\frac{x'_0}{x}\right)^{\lambda'} = \frac{1}{R_0^2}. \quad (84)$$

La ubicación precisa en el plano (x, Q^2) y la pendiente de la línea crítica es determinada por los ajustes adicionales que no se estudiarán para este documento.

4.8. Método de Minimización χ^2

El método χ^2 reducido es un método muy popular para la evaluación y comparación de modelos, diagnóstico de convergencia y estimación de errores en el campo de la física. Sin embargo existen dos problemas independientes en el método: (a) El número de grados de libertad sólo puede estimarse para modelos lineales. En lo que concierne a los modelos no lineales, se desconoce el número de grados de libertad, es decir, no es posible calcular el valor de χ cuadrado reducido. (b) Debido al ruido aleatorio en los datos, entonces también el valor del χ cuadrado reducido está sujeto al ruido, es decir, el valor es incierto. Esta incertidumbre perjudica la utilidad del χ cuadrado reducido para diferenciar entre modelos o evaluar la convergencia de un procedimiento de minimización. El impacto del ruido en el valor de χ cuadrado reducido es sorprendentemente grande, en particular para conjuntos de datos pequeños, que son muy comunes en problemas de física de partículas. Como consecuencia, χ cuadrada reducida puede ser utilizada con la debida precaución para modelos lineales, mientras que no debe usarse para modelos no lineales en lo absoluto [33].

Al momento de ajustar un modelo f con parámetros $\vec{\theta}$ a un conjunto de datos N con valores y_n , medidos con errores Gaussianos σ_n en posiciones x_n , se necesita minimizar

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^N \left(\frac{y_n - f(x_n; \vec{\theta})}{\sigma_n} \right)^2. \quad (85)$$

Esto es equivalente a maximizar la llamada "función de verosimilitud". Si los errores de las mediciones de los datos no son Gaussianos, χ^2 no debe ser utilizado debido a que no es la estimación de verosimilitud máxima. Por lo tanto, asumimos que los errores de los datos son de carácter Gaussiano. Si K denota el número de grados de libertad, entonces χ^2 reducido se define por

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{K}. \quad (86)$$

χ_{red}^2 es una cantidad ampliamente usada en la física. Se emplea esencialmente para los siguientes propósitos:

1. Evaluación de modelo único: Si un modelo se ajusta a un conjunto de datos y el χ_{red}^2 resultante es mucho más grande que uno, se considera como un "mal" ajuste, mientras que si $\chi_{red}^2 < 1$, se considera un sobre ajuste.

2. Comparación de modelos: Dado un conjunto de datos y un conjunto de modelos diferentes, surge la pregunta de qué modelo se ajusta mejor a los datos. Normalmente, cada modelo se ajusta al conjunto de datos seleccionado y los valores de χ_{red}^2 se comparan. El mejor modelo es aquel cuyo valor de χ_{red}^2 se acerca más a uno.
3. Diagnóstico de convergencia: Un ajuste suele ser un proceso iterativo que debe ser detenido una vez que haya convergido. A veces la convergencia se diagnostica al monitorear cómo es que el valor de χ_{red}^2 evoluciona durante la iteración y el ajuste se detiene tan pronto como χ_{red}^2 alcanza un valor suficientemente cercano a uno. Por consiguiente, a veces se puede afirmar que “el ajuste ha alcanzado nivel ruido”.
4. Estimación del error: Se ajusta un determinado modelo a un conjunto de datos dado minimizando χ^2 y luego se reescalan los errores de los datos de modo que el valor de χ_{red}^2 es exactamente igual a uno. Luego, se calculan los errores de los parámetros del modelo. (Ya ha sido discutido por Andrae (2010) que este método no es del todo correcto, por lo que no se suele considerar) [33].

En todos estos casos, χ_{red}^2 destaca por su simplicidad, ya que todo lo que hay que hacer es dividir el valor de χ^2 por el número de grados de libertad y comparar el valor resultante de χ_{red}^2 a uno [33].

4.8.1. Grados de Libertad

Dada la definición de χ_{red}^2 , evidentemente es necesario saber el número de grados de libertad del modelo en cuestión. Para N puntos de datos y P parámetros de ajuste, una suposición ingenua es que el número de grados de libertad es $N - P$ para cualquier modelo. Sin embargo, esto no es cierto en general. La determinación de los “grados de libertad” se realiza para tres tipos de casos: En primer lugar, los modelos lineales, luego los modelos lineales con antecedentes y por último los modelos no lineales.

Para una estimación de parámetro dada, por ejemplo, un modelo ajustado a un conjunto de datos, los grados de libertad son el número de piezas de información independientes que se utilizaron. El concepto de “grados de libertad” se puede definir de diferentes maneras. Aquí se ofrece una definición general y sencilla. En otros trabajos se da una definición más técnica que solo se aplica a modelos lineales [33].

Supongamos que tenemos N mediciones y_n y un modelo con P parámetros libres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan se encuentran minimizando χ^2 . Esto quiere decir que nosotros imponemos P restricciones del tipo

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \theta_P} = 0 \quad \forall p = 1, 2, \dots, P \quad (87)$$

en nuestro sistema N -dimensional. Por tanto, el número de grados de libertad es $K = N - P$. A primera vista, ésta parece una definición concisa e infalible. No obstante, este no es el caso para todos los modelos [33].

5. Metodología

En esta sección se explicará a detalle el procedimiento que se realizó, tanto teórico como experimental, para lograr obtener los resultados finales del proyecto y realizar un análisis conciso. [19], [7], [34].

A lo largo del trabajo se ha explicado los fundamentos teóricos necesarios para poder comprender la motivación de la investigación. A continuación, se explica de forma detallada el proceso con el que se recopilaron datos y se obtuvieron resultados numéricos relevantes a los objetivos del trabajo. Como se ha mencionado, se busca replicar los hallazgos de los artículos de investigación llamados 'Saturation Effects in Deep Inelastic Scattering at Low Q^2 ' [16] y 'Saturation model of DIS:an update [15] por lo que iniciamos el proceso buscando las fuentes de donde provienen los datos experimentales que se utilizaron para plasmar gráficas. Las dos principales colaboraciones que trabajan con el análisis de datos extraídos de los experimentos del colisionador HERA son ZEUS y H1.

Se hizo una búsqueda exhaustiva en las referencias del artículo, la cual encontró que los datos provenían de otro artículo de investigación de nombre 'Measurement of the Proton Structure Function F_2 and $\sigma_{tot}^{\gamma^*p}$ at Low Q^2 and Very Low x at HERA' [10]. Estos datos fueron útiles para poder realizar un ajuste de la Ec. (83), el cual es considerado como 'crudo' y simple, pero sirvió como un ejercicio adecuado para aprender a programar en C++ y utilizar el ambiente ROOT para el manejo de datos. La segunda etapa del proyecto fue mas retadora debido a que ahora se buscó realizar un nuevo ajuste con una ecuación mas completa que incluyera más detalles importantes del modelo como las contribuciones de los quarks. Sin embargo, al momento de buscar los datos del documento fue complicado, ya que tiene varios años vigente y la información no se ofrece fácilmente. Por esta razón es que se utilizó la base de datos HEP Data la cual es conocida por su amplia colección de documentos y la veracidad de su información.

5.1. Procedimiento GBW Modelo de Saturación

Para este método fue necesario comprender, analizar y conectar procesos matemáticos y conceptos físicos importantes de múltiples artículos de investigación acerca del tema debido a que la línea de investigación es muy extensa y puede derivarse en estudiar incontables conceptos, cada uno tan importante como el otro. Como tal, se combinaron o mejor dicho unieron procedimientos para poder llegar a los resultados finales. En primera instancia, se explicará el proceso matemático que se utilizó en el artículo [10], ya que la tabla 9 fue extraída del mismo artículo.

La sección eficaz medida para una colisión ep en el rango cinemático de HERA puede ser expresada en términos de funciones estructurales del protón o también como secciones eficaces para interacciones virtuales fotón-protón como es explica en la Ec. (88)

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} &= \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4 x} \left(2 - 2y + \frac{y^2}{1+R}\right) F_2(x, Q^2) \\ &= \Gamma[\sigma_T(x, Q^2) + \epsilon(y)\sigma_L(x, Q^2)] \equiv \Gamma\sigma_{\gamma^*p}^{eff}(x, y, Q^2).\end{aligned}\quad (88)$$

Aquí $R = F_L/(F_2 - F_L)$ donde F_L es la función estructural longitudinal, α es la constante de estructura fina, y σ_L y σ_T son las secciones eficaces para los fotones virtuales polarizados transversal y longitudinalmente. EL factor de flujo, Γ , y la razón del flujo longitudinal al transversal, ϵ , se toman como

$$\Gamma = \frac{\alpha(2 - 2y + y^2)}{2\pi Q^2 x}, \quad \epsilon(y) = \frac{2(1 - y)}{2 - 2y + y^2}.\quad (89)$$

La cantidad $\sigma_{\gamma^*p}^{eff}$ se conoce como la sección eficaz efectiva medida del fotón-protón virtual para colisiones ep dentro de nuestro rango cinemático. Ésta puede ser determinada directamente de los datos sin suposiciones para R. La sección eficaz total del fotón-protón virtual se define aquí como

$$\sigma_{\gamma^*p}^{tot} = \sigma_T(x, Q^2) + \sigma_L(x, Q^2) \simeq \frac{4\pi^2\alpha}{Q^2} F_2(x, Q^2).\quad (90)$$

En esta definición $\sigma_{\gamma^*p}^{tot}$ depende solo de Q^2 y x (o W) y así los resultados de experimentos diferentes pueden ser fácilmente comparados.

Ahora para extraer la función estructural F_2 de estas mediciones se debe hacer una suposición para la función estructural longitudinal F_L , ya que ésta no se ha sido medida en la región cinemática. En este análisis el modelo de [37] se aplica para poder calcular R. Estos valores de R después se utilizan para determinar los valores de F_2 . El modelo se basa en el proceso de fusión fotón-gluon y tiene el límite adecuado para $Q^2 \rightarrow 0$ donde F_L debería desaparecer $\propto Q^4$. Las predicciones de este modelo para los valores de R en nuestra región cinemática varía desde 0.1 en $Q^2 = 0.35$ GeV hasta 0.3 en $Q^2 = 3.5$ GeV. Las predicciones de R para Q^2 mayores concuerdan con las mediciones de experimentos con un target fijo. Es importante mencionar que este es un modelo y futuras mediciones podrían revelar valores de R bastante diferentes. Sin embargo, solo el punto de la variable x mas bajo en cada Q^2 se ve afectado de manera significativa por la suposición hecha para R. Si R se toma se considera como cero en lugar de los valores obtenidos utilizando el modelo anterior, la variación en F_2 es de 5 a 10 % para el valor más alto de y (el valor más bajo de x) en cierto valor de Q^2 , y mas pequeño en cualquier otra región [9].

Los datos obtenidos por las mediciones del artículo de investigación [9] se observan en la tabla 9.

Una vez que se recopilaron los datos se continuó a analizarlos debido a que estos mismos datos no fueron del todo concisos o con el enfoque deseado para realizar correctamente el ajuste experimental. Fue necesario realizar otras operaciones adicionales para poder transformar los datos a los deseados. En la tabla 9 apreciamos la 5ta columna la cual tiene datos para $\kappa\sigma_{\gamma^*p}^{eff}$ y nosotros deseamos obtener solo el resultado de $\sigma_{\gamma^*p}^{eff}$ por lo que se decidió dividir cada dato de esa columna entre el valor de κ el cual es $\kappa = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha}$, con $\alpha = 1/137$ con esa modificación y además que se obtuvo el nuevo error en el eje y por medio de multiplicar la columna final de error total δ_{tot} por el nuevo valor de σ . En consecuencia obtuvimos los datos experimentales de las tablas 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16. Cada tabla tendrá un comportamiento diferente a la hora de graficar los datos.

Con estos datos organizados de forma que cada tabla es un set de mediciones en los que no se repite la medición de energía Q^2 fue posible realizar un ajuste a la Ec. (83). Dicho ajuste se presenta mas adelante en la sección de resultados junto con su análisis.

Después de conseguir realizar un ajuste adecuado para una versión simplificada de la Ec. (67) se continuó con un ajuste para la ecuación original, la cual describe mejor la situación física al considerar varios otros detalles que la Ec. (83) pasa por alto. A continuación se explica el procedimiento matemático que se siguió para llegar a la ecuación final a la que se le haría el ajuste.

Partiendo de la Ec. (72) podemos despejar para la sección eficaz σ^{γ^*p} de forma que

$$\sigma^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2) \quad (91)$$

Esta relación (91) es la que ajusta la función estructural del protón F_2 calculada por los datos de HERA sobre la sección eficaz γ^*p , (91) es valida en la aproximación para x pequeña. En los ajustes se intentó tomar en cuenta datos con $x \leq 10^{-2}$ y $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ con un valor mínimo de $Q^2 = 0,15 \text{ GeV}^2$.

La fórmula teórica básica para F_2 corresponde a la imagen dipolar de la dispersión inelástica profunda (DIS) en x pequeño en el que el fotón virtual se disocia en un par quark-antiquark (un dipolo qq^-) y posteriormente interactúa con el protón. Dicha es formula es en realidad la Ec. (71) que se puede ver de una forma mas clara a continuación, como la igualdad entre (71) y (72)

$$F_2 = F_T + F_L = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} (\sigma_T^{\gamma^*p} + \sigma_L^{\gamma^*p}) \quad (92)$$

donde sabemos que T y L se refieren la polarización del fotón virtual, transversal y longitudinal. Por lo tanto la Ec. (67) se modifica de forma que el término dipolar se

incluya

$$\sigma_{T,L} = \Sigma_f \int d^2r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(z, r, Q^2, m_f)|^2 \sigma_{dip}(r, x), \quad (93)$$

La sección eficaz dipolar del modelo GBW esta dada por

$$\sigma_{dip}(r, x) = \sigma_0 (1 - e^{-r^2 Q_s^2(x)/4}) \quad (94)$$

donde tiene una forma parecida a la Ec. (74) donde la modificación se presenta al añadir el termino de la escala de saturación Q_s , pero en realidad es la misma ecuación solo que en (94) está escrita de manera explícita. Ahora, se define la escala de saturación Q_s como

$$Q_s^2(x) = Q_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\lambda} \quad (95)$$

con nuevamente $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$. La sección eficaz anterior tiene una propiedad en especifico de escala geométrica [15],

$$\sigma_{dip}(r, x) = \sigma_{dip}(r Q_s(x)), \quad (96)$$

ahora (94) se convierte en una función de una sola variable, $r Q_s$, para todos los valores de r y de x . Los tres parámetros del ajuste con el modelo GBW como ya se conoce son: σ_0 , x_0 y λ .

Por lo tanto se debió modificar toda la secuencia de ecuaciones para poder obtener resultados similares a los del artículo de investigación 'Saturation model of DIS: an update' [15].

Finalmente para la última parte de este procedimiento y considero que la mas importante se buscó continuar con la investigación al revisar los procedimientos del artículo [21] donde se introduce una nueva expresión, la sección eficaz reducida con corriente neutra $\sigma_{r,NC}^{\pm}$, a la cual se le aplicaría un ajuste de mínimos cuadrados para dos variables independientes.

Las secciones eficaces de dispersión inelástica $e^{\pm}p$ profunda reducida de corriente neutra (NC) están dadas por una combinación lineal de funciones estructurales generalizadas. Para la dispersión $e^{\pm}p$ no polarizada, las secciones eficaces reducidas, después de la corrección para los efectos radiativos QED, pueden ser expresadas en términos de funciones estructurales como

$$\sigma_{r,NC}^{\pm} = \frac{d^2\sigma_{NC}^{e\pm p}}{dx_{Bj}dQ^2} \cdot \frac{Q^4 x_{Bj}}{2\pi\alpha^2 Y_{\pm}} = \tilde{F}_2 \mp \frac{Y_{-}}{Y_{+}} x\tilde{F}_3 - \frac{y^2}{Y_{+}}, \quad (97)$$

donde la constante de estructura fina, α , la cual se define cuando la transferencia de momento es cero, el propagador de fotones y el factor de helicidad son absorbidos por las definiciones de $\sigma_{r,NC}^{\pm}$ y $Y_{\pm} = 1 \pm (1-y)^2$. Las funciones estructurales generales \tilde{F}_2 , \tilde{F}_L y $x\tilde{F}_3$, son sumas de las funciones estructurales F_X , $F_X^{\gamma Z}$ y F_X^Z . Éstas están relacionadas al intercambio de fotones, la interferencia del fotón Z y el intercambio Z, respectivamente y dependen de algunos parámetros electro-débiles. Dichos parámetros electro-débiles no se explican debido a que los datos experimentales con los que se trabaja el ajuste son para valores bajos de Q^2 y la contribución del intercambio Z es despreciable y como resultado

$$\sigma_{r,NC}^{\pm} = F_2 - \frac{y^2}{Y_{+}} F_L. \quad (98)$$

La contribución del termino que contiene la función estructural \tilde{F}_L solo afecta de forma importante para valores de y y mas grandes que aproximadamente 0.5.

La Ec. (98) es finalmente la función a la cual se le aplica el ajuste para obtener los resultados finales del trabajo con los parámetros σ_0 , x_0 y λ como principal objetivo. Los datos experimentales que se utilizarían en el ajuste se extrajeron del mismo documento [21], el cual tomó en cuenta el trabajo de recolección de datos de las colaboraciones H1 y ZEUS, con la meta de combinar las mediciones y así obtener un rango mas amplio de datos de Q^2 , x_{Bj} y $\sigma_{r,NC}^{\pm}$. En este caso el conjunto de datos extraídos contiene una cantidad de 485 mediciones con su respectivo error a un valor de energía de centro de masa de $\sqrt{s} = 318 GeV$, el cual es esencial para describir la escala de energía de la interacción en cuestión, ya sea electrón-protón e^-p o positrón-electrón e^+p .

Con tal de obtener la incertidumbre total δ_{tot} de forma precisa para todos los datos de la sección eficaz reducida con corriente neutra $\sigma_{r,NC}^{\pm}$ se sumó la cuadratura de todas las incertidumbres: la incertidumbre estadística δ_{stat} , la incertidumbre sistemática correlacionada δ_{cor} , la incertidumbre sistemática no correlacionada δ_{cor} y las incertidumbres procedimentales. En esta parte se consideró un mayor número de puntos para una mejor comprensión y análisis de la estructura interna del protón con esperanza de descubrir una novedad.

Por último, al finalizar el ajuste y obtener resultados satisfactorios de los parámetros σ_0 , x_0 y λ se calculó el valor estadístico χ^2 reducido, el cual evalúa la efectividad de ajuste de un modelo estadístico a un conjunto de datos. En otras palabras, determina qué tan bien un modelo estadístico, en este caso el modelo de saturación GBW, se ajusta a un conjunto de observables. Por lo tanto es una medida de la eficacia del modelo estadístico. En la siguiente sección se presentan los resultados junto con su análisis.

6. Resultados y Discusión

En primera instancia, una vez ya recopilados los datos necesarios para realizar el ajuste, el cual es representado por la expresión (83) al combinar los términos "suave" y "duro" de las Ecs. (81) y (82). Los datos fueron registrados directamente por la colaboración H1 la cual es reconocida por su sobresaliente trabajo en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC, por sus siglas en inglés). Fue posible acceder a estos datos gracias a la base de datos especializada en artículos de investigación conocida como HEP Data la cual ofrece un amplio rango de información correspondiente a diversos experimentos en varias áreas de la física. En este caso, fuimos capaces de extraer este grupo de datos buscando palabras clave sobre el artículo de investigación.

Es importante mencionar que para la Fig. (16) los datos que corresponden a la sección eficaz σ_{γ^*p} del eje vertical fueron multiplicados por la constante 128 en específico para la tabla 10, esto con el fin de que imiten los resultados publicados en [9]. Lo mismo sucedió con las tablas 11, 12, 13, 14, 15 y 16, pero se multiplicaría por una constante que disminuiría de forma 2^x por lo tanto la tabla 11 por 64, la 12 por 32 y así hasta llegar a la última. Esta modificación de los datos fue debido a que en el documento [9] se explica que las secciones eficaces para valores de energía de centro de masa (W) consecutivos en la tabla 9 se multiplican por los factores que se mencionaron hace poco. En adición, la razón por la cual no consideramos el error en X es que los valores de energía Q^2 recopilados son directos a diferencia de la sección eficaz σ .

El ajuste fue obtenido gracias al código computacional realizado en el ambiente especializado en gestión de datos para experimentos de física de alta energía conocido como ROOT por parte del CERN. Al comparar el ajuste obtenido con aquél del documento [16] podemos observar que las curvas se comportan de forma similar. Sin embargo, se debe mencionar que para nuestro resultado el rango de energías es limitado. Esto debido a que los datos que se utilizaron justamente solo cubren el rango, $0.35 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 3.5 \text{ GeV}^2$, ya que son datos recopilados de la colaboración H1 específicamente para pequeños valores de x_{Bj} como se observa en la tabla 9. Otro conjunto de datos que son útiles, pero no nos fue posible encontrar son los de la colaboración ZEUS que si se usaron para el ajuste de [16] junto con datos de H1, pero para valores más grandes de x_{Bj} .

Los datos muestran una continuación fluida de las mediciones del objetivo fijo hacia la región de valores de x bajo en HERA. En la Fig. (16) se aprecia cómo la sección eficaz decrece a medida que la transferencia de momento del fotón Q^2 aumenta. Esto quiere decir que si el proceso DIS es de carácter más energético de forma que la escala de energía Q^2 aumenta entonces existe una menor probabilidad de interacción entre el fotón virtual y el objetivo hadrónico. Sin embargo, la característica más destacable de la sección eficaz en la Fig. (16) no se pudo observar como en la gráfica obtenida en el documento [16]. La característica que se esperaba observar es el cambio de comportamiento de las curvas hacia valores pequeños de Q^2 . La sección eficaz deja de incrementar y empieza a tomar un valor constante cuando se exploran valores pequeños de Q^2 de forma que se puede decir que las curvas giran levemente hasta aplanarse. Esto ilustra el cambio entre la región de escala y la región de saturación para Q^2 alto y bajo, respectivamente.

Ajuste γ -p

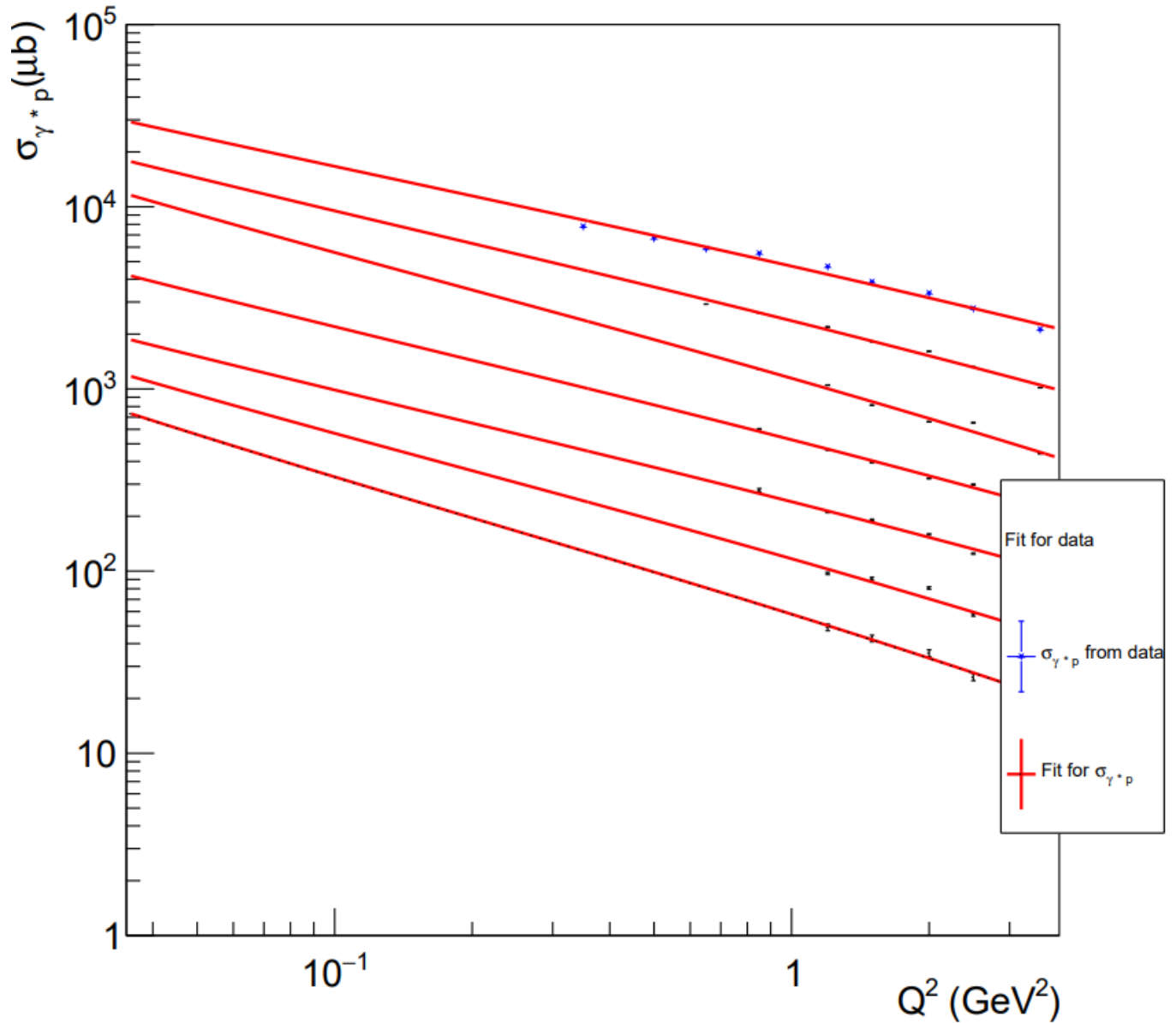


Figura 16: Ajuste de la sección eficaz fotón-protón σ_{γ^*p} en función de Q^2 para varias energías. Los errores representan los errores sistemáticos agregados en cuadratura.

Como se ha mencionado antes, la razón por la cual no fue posible ver este interesante comportamiento fue el rango de los datos recopilados, ya que la fuente de donde fueron extraídos no ofrecía datos para $Q^2 < 0.30 \text{ GeV}^2$ y el cambio en el comportamiento solo se puede apreciar a partir de valores menores a $Q^2 = 0.012$ lo cual es una pena. A pesar de ello fue posible obtener resultados satisfactorios para los parámetros y un ajuste que modela el comportamiento deseado dentro del rango a disposición.

Ajuste	m_l	m_c	m_b	$\sigma_0 [mb]$	λ	$x_0/10^{-4}$	χ^2/N_{dof}
[16]	0.14	-	-	23.02	0.288	3.04	2.86
[16]	0.14	1.40	-	29.12	0.277	0.41	3.78
[15]	0.14	-	-	23.58	0.270	2.24	1.83
[15]	0.14	1.40	-	27.32	0.248	0.42	1.60
[15]	0.14	1.40	4.60	27.43	0.248	0.40	1.61

Tabla 2: Resultados de los ajustes realizados a los datos de HERA para $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ con $N_p = 228$ puntos, utilizando la sección eficaz (95). Las masas de los quarks están dadas en GeV.

En las primeras dos filas de la tabla 2 mostramos el valor de χ^2/N_{dof} o χ^2 reducido, donde $N_{dof} = N_p - (\# \text{ de parámetros})$, calculado con los parámetros originales del modelo GBW [16]. Altos valores de χ^2/N_{dof} lejanos a 1 sugieren la necesidad de nuevos ajustes con la intención de mejorar la efectividad de los mismos. Después, en las siguientes tres filas, se muestran los resultados de los ajustes que actualizan los parámetros originales del modelo. El ajuste fue realizado con ayuda de MINOS del paquete MINUIT [15], que utilizaron Sapeta y Golec-Biernat en el trabajo para minimizar χ^2 .

Ajuste	$\sigma_0 [mb]$	λ	$x_0/10^{-4}$	χ^2	χ^2/N_{dof}
0	41.86 ± 1.58	0.523 ± 0.014	7.44 ± 0.33	189.01	4.61

Tabla 3: Resultados del ajuste de mínimos cuadrados de la Ec. (83). No se consideraron masas para el ajuste por la naturaleza de la ecuación.

Si comparamos los valores de los parámetros con aquellos del artículo de investigación [16], los cuales se muestran en la tabla 2, donde se ejecuta el análisis original podemos argumentar que los valores de nuestro ajuste resultaron ligeramente lejanos de los valores originales, pero con una orden de magnitud adecuada para el valor del parámetro en cuestión. Es comprensible la lejanía entre los resultados debido a que la Ec. (83) es una versión simplificada de la Ec. (67), ya que no involucra integrales ni funciones especiales como la función MacDonal y además se puede trabajar en términos de una sola variable (de preferencia Q^2). Sin mencionar la ausencia de propiedades intrínsecas de los quarks como lo son la masa y la carga, las cuales contribuyen de forma importante a la efectividad del ajuste. Se caracteriza como un aproximación cruda, pero funcional

debido a que reproduce las principales características del comportamiento.

Posteriormente se continuó la investigación con el segundo ajuste, el cual se realizó ahora en Python por la razón de que programar un código es relativamente más sencillo en comparación a C++ debido a la diferencia en la sintaxis. C++ es un lenguaje de programación estructural mientras que Python es un lenguaje de programación orientado a objetos por lo que es más flexible y manipulable a la hora de programar. Para este ajuste se tuvo que estructurar el procedimiento completo partiendo de la Ec. (67) como se explica en la metodología, se utilizaron paqueterías para poder ejecutar las funciones especiales e integrales necesarias de forma sencilla. Sin embargo, el problema que surgió al cambiar de lenguaje fue que al compilar la variedad de códigos para el ajuste y las gráficas el tiempo que tardó para arrojar resultados fue bastante, en ocasiones un código podía compilar en un par de días. La paquetería mas relevante que se utilizó fue `lmfit` la cual utiliza el algoritmo Levenberg-Marquardt para realizar el ajuste de mínimos cuadrados y realmente es muy versátil ya que ofrece un reporte de los resultados muy claro y conciso sin necesidad de mas cálculos. Tanto los parámetros como el valor estadístico χ^2 reducido se muestran en el reporte final.

En las figuras (17) y (18) se presentan los datos combinados de corriente neutra para la dispersión positrón-protón e^+p para Q^2 muy bajo con energías del haz de protones 920 y 820 GeV. Estos datos fueron tomados durante el período HERA I y se muestran en la tabla 8 para los rangos $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ y $x_{Bj} \leq 10^{-2}$. Aparte de los datos, también se muestra el ajuste obtenido para múltiples valores de Q^2 , en la primera figura únicamente para valores muy bajos de Q^2 mientras que para la segunda son valores moderados.

Observamos en cada una de las gráficas de las figuras (17) y (18) que a medida que la fracción de momento x_{Bj} disminuye el valor de la sección eficaz reducida $\sigma_{r,NC}^+$ aumenta, es decir, a menor fracción de momento que tengan los partones dentro del protón es que será más probable que exista la dispersión entre el fotón virtual y un quark. El comportamiento de la gráfica es coherente ya que un protón o un núcleo con muchos sea quarks es más susceptible a interactuar en una dispersión de alta energía debido a que valores bajos de fracción de momento se traducen en una mayor densidad numérica de partones (quarks, sea quarks y gluones) y por lo tanto una mayor probabilidad de dispersión. Ahora, las curvas en las gráficas surgen a medida que aumentamos los valores de energía Q^2 y las podemos interpretar como que en cierto punto la densidad partónica deja de crecer con x_{Bj} decreciente. A muy baja fracción de momento llega un punto en el que la probabilidad de dispersión baja y una razón posible es que las partículas se vuelven más pequeñas y entonces es más difícil que el fotón encuentre un quark con el cual dispersarse, pues a mayor energía el tamaño efectivo de los partones disminuye de forma $1/Q^2$.

Sabemos de los fundamentos teóricos que para los valores de transferencia de momento Q^2 por debajo de la escala de saturación en cuestión, Q_s^2 , las funciones de distribución de partones (PDFs) en un hadrón se encuentran en el régimen de saturación donde los efectos no lineales de la QCD se vuelven dominantes. En la mayoría de las gráficas se puede apreciar que el ajuste de los datos experimentales tiene un comportamiento no

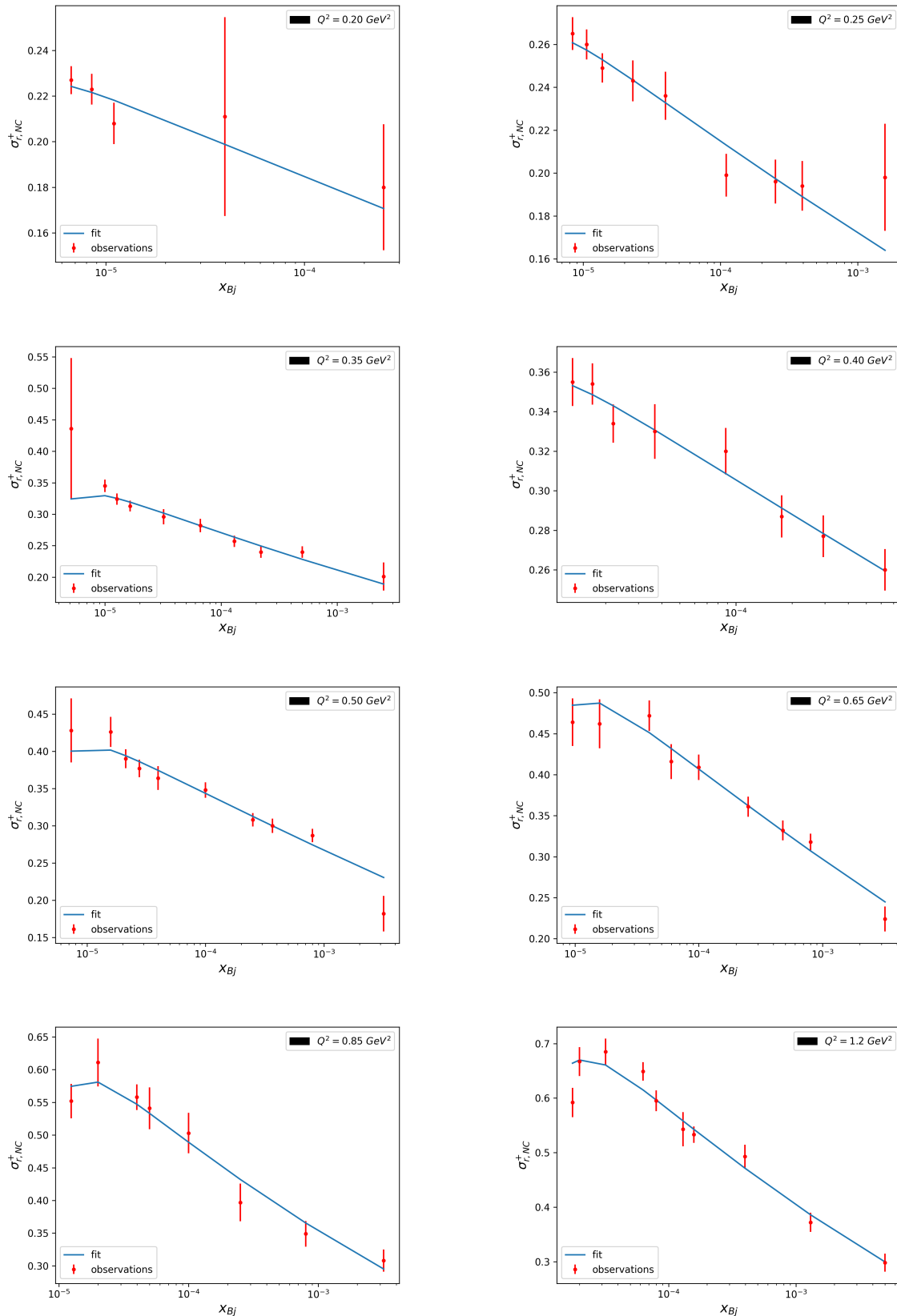


Figura 17: Los datos combinados extraídos de HERA para las secciones eficaces reducidas inclusivas NC e^+p a un valor $\sqrt{s} = 318$ GeV como función de x_{Bj} a valores muy bajos de Q^2 y el ajuste experimental correspondiente. Las barras de error representan la incertidumbre total.

lineal cuando x_{Bj} disminuye que es lo mismo que decir que cuando Q^2 aumenta ya que son inversamente proporcionales. Por el otro lado, si nos movemos a valores más altos de Q^2 las funciones de distribución de partones ahora están en el régimen perturbativo donde se pueden aplicar las ecuaciones de evolución lineales de la QCD. De la misma manera, al analizar la gráfica vemos que cuando x_{Bj} aumenta el comportamiento es lineal.

Ajuste	m_u	m_d	m_s	m_c	m_b	σ_0 [mb]	λ	$x_0/10^{-4}$
1	-	-	-	-	-	11.26 ± 0.39	0.283 ± 0.004	6.03 ± 0.46
2	0.0022	0.0047	0.0934	-	-	19.04 ± 0.67	0.281 ± 0.004	5.68 ± 0.45
3	0.0022	0.0047	0.0934	1.27	-	20.98 ± 0.88	0.250 ± 0.003	1.04 ± 0.11
4	0.0022	0.0047	0.0934	1.27	4.18	21.12 ± 0.89	0.249 ± 0.003	0.96 ± 0.11
5	0.0022	0.0047	0.0934	1.48	4.18	21.07 ± 0.86	0.252 ± 0.003	1.17 ± 0.12

Tabla 4: Valores de los parámetros con su respectiva incertidumbre del ajuste realizado a los datos combinados de HERA para $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ y $x_{Bj} \leq 0,01$ con $N_p = 168$ puntos, utilizando la Ec. (98). Las masas de los quarks están dadas en GeV fueron extraídas directamente de [36]. Los parámetros del ajuste 5 se utilizan para un análisis más detallado.

Ajuste	χ^2/N_{dof}
1	1.26
2	1.27
3	1.38
4	1.41
5	1.37

Tabla 5: Resultados de la calidad del ajuste realizado a los datos combinados de HERA para $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ y $x_{Bj} \leq 0,01$ con $N_p = 168$ puntos, utilizando la Ec. (98).

Los resultados de nuestros ajustes [21] se resumen en la tabla 4. En la tabla 5 se muestran los resultados de la calidad de nuestros ajustes (1-5) en un intento de optimizar χ^2 reducido. La incertidumbre experimental de los parámetros obtenidos en la tabla 4 está dada por la herramienta 'Model' proveniente de la paquetería lmfit que también minimizaría χ^2 en nuestro trabajo.

Observamos una muy buena calidad de ajuste, teniendo en cuenta la precisión de los datos del acelerador HERA y un número mínimo de parámetros (3) ajustados. Los nuevos parámetros son cercanos a los actualizados, sorprendentemente cercanos, con valores más pequeños por parte del parámetro σ_0 en aproximadamente un 25 % y en lo que concierne al parámetro λ se nota una disminución de menos del 3 %. Además, a diferencia de los resultados del ajuste actualizado [15] se recopilaron los datos de la masa

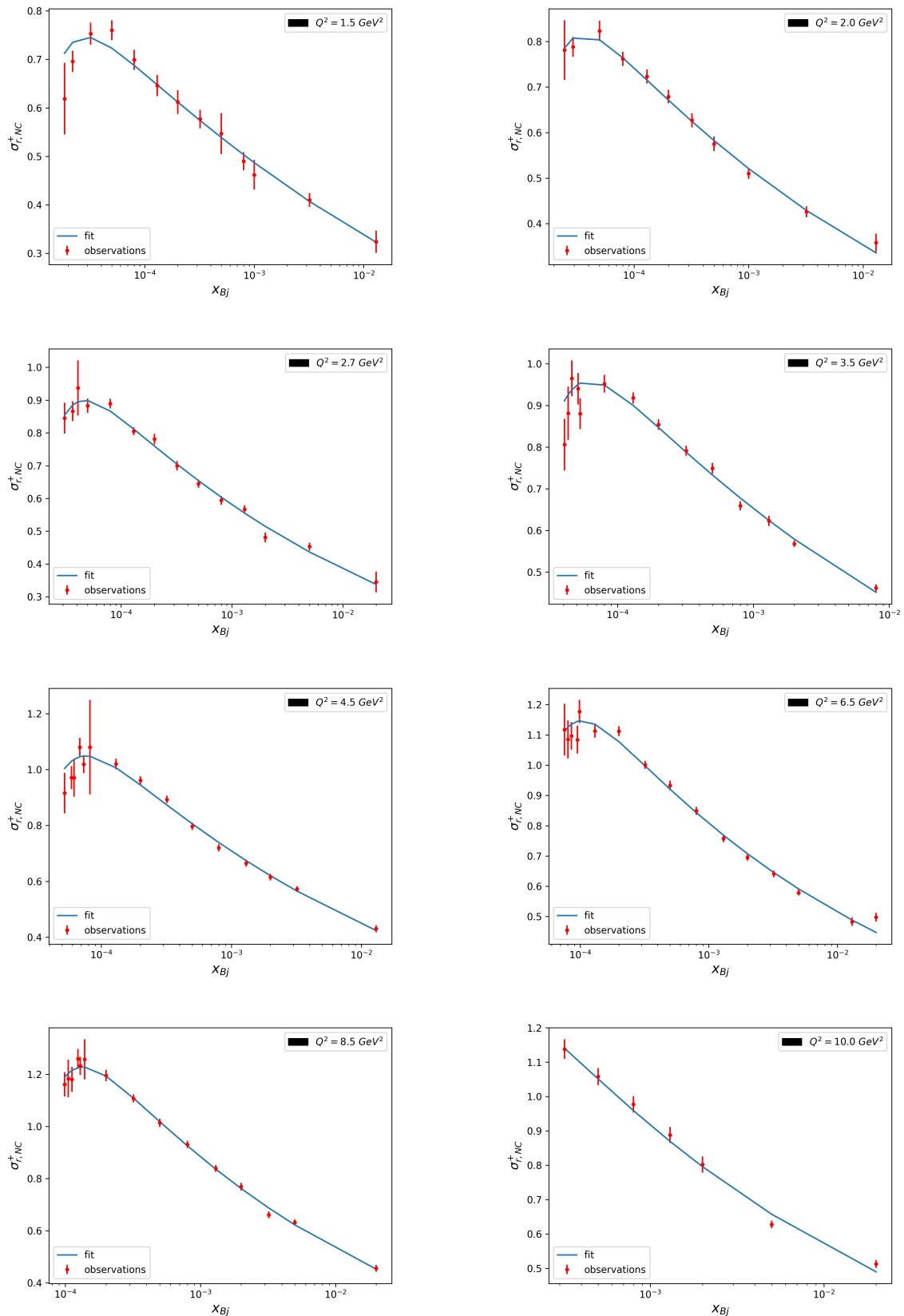


Figura 18: Los datos combinados extraídos de HERA para las secciones eficaces reducidas inclusivas NC e^+p a un valor $\sqrt{s} = 318 \text{ GeV}$ como función de x_{Bj} a valores moderados de Q^2 hasta $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ y el ajuste experimental correspondiente. Las barras de error representan la incertidumbre total.

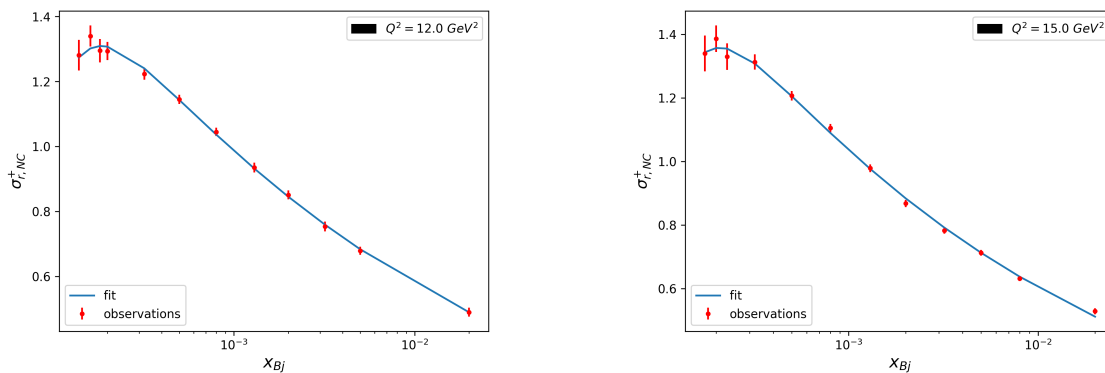


Figura 19: Los datos combinados extraídos de HERA para las secciones eficaces reducidas inclusivas NC e^+p a un valor $\sqrt{s} = 318$ GeV como función de x_{Bj} a valores de Q^2 mayores a $Q^2 = 10$ GeV² y el ajuste experimental correspondiente. Las barras de error representan la incertidumbre total.

de los quarks directamente del 'Particle Data Group' (PDG) para una mejor precisión en los resultados. Se realizaron cinco ajustes, cada uno con un enfoque diferente, pues se pretendió modificar los datos de masa de quarks para cada uno. Para el primer ajuste no se incluyeron masas y aunque se considera buen ajuste, es el que más refleja discrepancia en los valores de los parámetros. Después, en el segundo se consideró las masas de los quarks ligeros (up, down y strange) con un valor de 0.14 GeV y se acercaron los valores de los parámetros. Para el tercer ajuste se añadió la masa del charm la cual es considerablemente mayor en comparación a los otros quarks y es evidente que mejora la descripción de los datos. Por último, en los ajustes 4 y 5 se añade la contribución del bottom quark, pero con diferentes valores de charm a pesar de que la masa del bottom es muy pequeña para $Q^2 \leq 10$ GeV², tomamos los parámetros del ajuste 5 para un análisis más detallado con el objetivo de comprender mejor el comportamiento del modelo con quarks pesados.

Al comparar todos los valores de los ajustes entre sí podemos notar una tendencia de χ_{red}^2 a crecer a medida se añaden más sabores al modelo lo que claramente incluye sus masas. Esto es entendible debido a que cualquier procedimiento numérico sufrirá un aumento en sus errores o incertidumbre a medida que se le agreguen más procesos o más datos. Sin embargo, es interesante que para el ajuste 5 el valor de χ_{red}^2 no crece, más bien disminuye con un valor de diferente de la masa del charm, $m_c = 1.48$ GeV, el cual es un valor comúnmente usado en la comunidad de física de partículas. Por consiguiente, esta es la razón por la cual se elige el ajuste 5 para profundizar nuestro análisis.

Finalmente, se estudió la sensibilidad de la calidad del ajuste al observar el cambio en resultados si se establece un valor máximo de la virtualidad del fotón, Q_{max}^2 . Los resultados de los ajustes con cinco sabores para los valores indicados de Q_{max}^2 se muestran en la tabla 6. No es necesario poner los errores de los parámetros, ya que sus valores numéricos son muy cercanos a los del ajuste 5 en la tabla 2. Vemos que la decisión de

tomar el límite de $Q_{max}^2 = 10 \text{ GeV}^2$ es la óptima, aunque ampliar la aplicabilidad del modelo GBW hasta $Q_{max}^2 = 20 \text{ GeV}^2$ sigue siendo aceptable.

$Q_{max}^2 [\text{GeV}^2]$	N_p	$\sigma_0 [\text{mb}]$	λ	x_0	χ^2/N_{dof}
5	134	21.25	0.244	1.09×10^{-4}	1.35
10	168	21.07	0.252	1.17×10^{-4}	1.37
15	190	20.70	0.262	1.35×10^{-4}	1.57
20	202	20.48	0.267	1.45×10^{-4}	1.63

Tabla 6: Valores de los parámetros σ_0 , x_0 y λ obtenidos resultado del ajuste de mínimos cuadrados de la Ec. (98).

Ahora, con la finalidad de explorar los resultados para otros rangos analizamos la tabla 7. Observamos que aunque los conjuntos de datos que se trabajan en estos rangos son menores al conjunto de datos para $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ el valor de χ^2 reducido aumenta lo que confirma una vez más que el límite escogido para un análisis más detallado es el adecuado para realizar el ajuste.

Rango [GeV^2]	N_p	$\sigma_0 [\text{mb}]$	λ	x_0	χ^2/N_{dof}
$1 < Q^2 \leq 10$	108	22.80	0.248	0.74×10^{-4}	1.52
$1 < Q^2 \leq 15$	130	21.76	0.260	1.03×10^{-4}	1.77

Tabla 7: Valores de los parámetros σ_0 , x_0 y λ obtenidos resultado del ajuste de mínimos cuadrados de la Ec. (98).

El primer parámetro σ_0 se refiere al tamaño de la sección eficaz (mb) del protón desde una perspectiva bidimensional como una tortilla. El parámetro toma un rol clave al determinar el comportamiento del modelo estadístico de saturación, ya que busca la escala energía en la cual los efectos de saturación se vuelven relevantes. El segundo parámetro, λ es adimensional y se conoce como la potencia de la escala de saturación en el modelo, este parámetro en mi opinión es el más importante debido a que determina la velocidad a la que la escala de saturación varía con respecto de Q^2 , ofrece un valor numérico para la saturación de gluones en función de la escala de energía. Por último, x_0 es el valor inicial de la escala Bjorken en el momento que se manifiesta la saturación y está relacionado fuertemente con σ_0 .

En resumen, el modelo GBW ofrece una buena descripción de los datos de HERA para valores pequeños y moderados de $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$, teniendo en cuenta que el modelo GBW fue diseñado originalmente para describir la transición de las funciones estructurales y las secciones eficaces DIS a valores pequeños de Q^2 tal que $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$. Esto se logra con la idea de saturación de partones y solo tres parámetros ajustados.

7. Conclusiones y Recomendaciones

Las datos experimentales utilizados en el proyecto fueron recopilados de los trabajos de las colaboraciones H1 y ZEUS [21], las cuales realizaron mediciones de secciones eficaces de dispersión inclusiva $e^\pm p$ en el acelerador HERA de 1994 a 2007. Los datos se extrajeron de dos configuraciones de haz distintas, llamadas HERA I y HERA II, con cuatro energías de centro de masa diferentes \sqrt{s} y con dos detectores diferentes que cambian y mejoran con el tiempo. Todos los datos inclusivos se combinaron para crear un conjunto consistente de mediciones de sección eficaz NC para dispersión $e^\pm p$ no polarizada, que abarca seis órdenes de magnitud tanto en transferencia negativa de cuadrimento al cuadrado, Q^2 , como en x de Björken. Para el enfoque de este proyecto fue necesario reducir la extensión de los datos combinados a $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ y $x_{Bj} < 10^{-2}$ con una única energía de centro de masa $\sqrt{s} = 318 \text{ GeV}$ debido a que el modelo estadístico deseado, el modelo de saturación GBW, funciona de manera óptima solo para valores bajos y moderados de Q^2 , cuando procesa datos tales que $Q^2 > 15 \text{ GeV}^2$ la precisión del modelo disminuye drásticamente. La acción de delimitar los rangos de las mediciones a nuestra conveniencia nos permitió abordar la cuestión de cómo es que funciona el modelo de saturación de DIS desarrollado por Golec-Biernat y Wüsthoff hace más de 20 años.

Al analizar y evaluar los resultados del modelo podemos argumentar que los valores de los tres parámetros obtenidos en este trabajo, σ_0 , x_0 y λ , tanto como del ajuste crudo de la ecuación (83) como del ajuste más completo y formal de la ecuación (98) son sólidos aunque se perciban un poco alejados de aquellos valores obtenidos por los artículos de investigación [16], [15] y [21]. El primer ajuste como se discutió fue realizado con una versión simplificada de la ecuación original donde no se consideran las masas de los quarks ni otros detalles importantes por lo que los resultados para este primer ajuste fueron más alejados de lo normal con un valor de χ^2 reducido moderado lo que indica que no fue tan buen ajuste. Sin embargo, podemos argumentar que encontramos una muy buena calidad de ajuste para la Ec. (98), la cual incluye todas las consideraciones necesarias del modelo GBW, ya que todos los ajustes realizados poseen un valor de χ_{red}^2 muy cercano a 1. En específico, los ajustes 4 y 5 de la tabla 2 los cuales incluyen las contribuciones de la masas de los quarks charm y bottom arrojan resultados muy favorables. Los parámetros reajustados en este trabajo son extremadamente cercanos a los valores originales y más aun a los valores de la actualización GBW [15] con una disminución de alrededor de un 25 % en el tamaño del protón σ_0 y de menos del 3 % en la potencia λ de la escala de saturación. Como consecuencia podemos confirmar que el modelo de saturación GBW aún proporciona una descripción acertada de los datos sobre funciones estructurales y las secciones eficaces DIS para valores $Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ y $x_{Bj} < 10^{-2}$.

Es de suma importancia mencionar que así como en cualquier experimento de la física no existen resultados perfectos, ya sea en un simple experimento sobre movimiento rectilíneo uniforme utilizando herramientas básicas como lo son un flexómetro y un cronómetro o en un experimento de colisión de partículas utilizando una instalación tecnológica de primer nivel en el que se necesitan de miles de personas para completarlo. Siempre se pueden optimizar resultados y mejorar incertidumbres, esta tesis no es la ex-

cepción. Es posible obtener resultados más precisos o un ajuste más efectivo al emplear otros modelos estadísticos como, por ejemplo, el modelo DGLAP el cual es una versión mejorada del modelo GBW ya que es capaz de realizar ajustes de buena calidad para valores de Q^2 mayores a 10 GeV^2 . El modelo DGLAP calcula correctamente la sección eficaz dipolar tanto para valores bajos de Q^2 como para valores altos, lo que le permite estudiar el comportamiento de dipolos grandes conservando las características más importantes del modelo GBW con una escala de saturación similar. Aparte de la variedad de modelos que se puedan emplear como alternativa también se recomienda desarrollar un programa computacional en un lenguaje diferente a Python, tal vez un lenguaje de programación estructural. Esta opción debido a que el tiempo de compilación de los códigos se consideró muy largo y es una razón para retomar el ambiente de análisis de datos ROOT o intentar uno nuevo.

En conclusión, el modelo de saturación GBW se mantiene relevante a pesar del paso del tiempo y se considera una contribución formidable a nuestra comprensión del fenómeno de la dispersión inelástica profunda (DIS) para pequeños valores de x_{Bj} . Se espera que el trabajo plasmado en esta tesis sirva como motivación a continuar con el estudio de modelos estadísticos que describen fenómenos tan complejos como lo son las interacciones entre partículas a muy altas energías, cuyos avances no solo contribuyen al área de física de partículas, pero también a la descripción del universo como lo conocemos. A medida que continuamos expandiendo los límites del conocimiento en esta área, la estructura interna del protón sigue siendo un tema fascinante, ofreciendo prometedores caminos para futuras investigaciones y descubrimientos.

Referencias

- [1] First observation of quark-gluon plasma? *American Physical Society*. <https://www.aps.org/publications/apsnews/199807/observation.cfm>, 1998.
- [2] The standard model. *CERN*. URL: <https://www.home.cern/science/physics/standard-model>, 2017.
- [3] The physics. *ATLAS experiment*. URL: <https://atlas.cern/Discover/Physics>, 2018.
- [4] A.H.Mueller. Parton distributions at very small x-values. *Nucl. Phys. B* 335, 1990.
- [5] J. Allday. *Quarks, Leptons and the Big Bang, 2nd edition*. IoP Publishing Ltd, 2002.
- [6] N. Armesto and C. Pajares. Cromodinámica cuántica. *Universidad de Compostela*, page 30, 2008.
- [7] N. Armesto and A. H. Rezaeian. Exclusive vector meson production at high energies and gluon saturation. *Physical Review D*, 90(5), page 20, 2014.
- [8] V. Barone and E. Predazzi. *Deep Inelastic Scattering*. 01 2002.
- [9] H1 Collaboration. Measurement of the proton structure function $f_2(x, q^2)$ at low x and low q^2 . *Nuclear Physics B* 497:3-30, page 28, 1977.
- [10] ZEUS Collaboration. Measurement of the proton structure function f_2 and $\sigma_{tot}^{\gamma^*p}$ at low q^2 and very low x at hera. *Phys. Lett. B* 407:432-448, page 25, 1977.
- [11] K. Cooper. Quarks: What are they? *Space*. <https://www.space.com/quarks-explained>, 2022.
- [12] K. Cooper. Leptons: The elementary particles explained. *Space*. <https://www.space.com/leptons-facts-explained>, 2023.
- [13] J. Jalilian-Marian F. Gelis, E. Iancu and R. Venugapalan. The color glass condensate. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*60:463-489, page 41, 2010.
- [14] H. Fritzsche. The history of qcd. *CERN Courier*. <https://cerncourier.com/a/the-history-of-qcd/>, 1998.
- [15] K. Golec-Biernat and S. Sapeta. Saturation model of dis: an update. *Journal of High Energy Physics*, page 17, 2018.
- [16] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff. Saturation effects in deep inelastic scattering at low q^2 and its implications on diffraction. *Physical Review D*, 59(1), page 25, 1998.
- [17] D. J. Gross and F. Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.* 30 1343-1346, 1973.
- [18] H. Leutwyler H. Fritzsche, M. Gell-Mann. Advantages of the color octet gluon picture. *Phys. Rev. Lett. B* 47 365-368, 1973.
- [19] L. Motyka G. Watt H. Kowalski. Exclusive diffractive processes at hera within the dipole picture. *Physical Review D*, 74(7), page 48, 2006.
- [20] H1 and ZEUS Collaborations. The theory of deeply inelastic scattering. *DESY 12-096; DO-TH-12/19; SFB/PPP-12-38; LPN 12-056*, page 78, 2012.

- [21] H1 and ZEUS Collaborations. Combination of measurements of inclusive deep inelastic $e^\pm p$ scattering cross sections and qcd analysis of hera data. *Eur. Phys. J. C* (2015) 75 :580, page 98, 2015.
- [22] F. Halzen and A. D. Martin. *Quarks and Leptons: an Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley and Sons Ltd, 1984.
- [23] et. al. J. Accardi L. Albacete. Electron ion collider: The next qcd frontier. *BNL-98815-2012-JA; JLAB-PHY-12-1652*, page 180, 2012.
- [24] J. W. Huston J. M. Campbell and W. J. Stirling. Hard interactions of quarks and gluons: a primer for lhc physics. *Reports of Progress in Physics*, page 118, 2006.
- [25] Y. V. Kovchegov and E. Levin. *Quantum Chromodynamics at High Energy*. Cambridge University Press, 2013.
- [26] K. Kutak. Gluon saturation and gluon density. *Proceedings of Science*, page 6, 2015.
- [27] R. Lea. Higgs boson: The 'god particle' explained. *Space*. <https://www.space.com/higgs-boson-god-particle-explained>, 2023.
- [28] B. R. Martin. *Nuclear and Particle Physics*. John Wiley and Sons Ltd, 2006.
- [29] L. McLerran. Gluon saturation and the formation stage of heavy ion collisions. *Journal of High Energy Physics*, page 26, 2008.
- [30] B.G.Zakharov N.Nikolaev. The bfgl-regge phenomenology of deep inelastic scattering. *Z. Phys. C* 49, 1990.
- [31] B.G.Zakharov N.Nikolaev, E.Predazzi. Unitarization of structure functions at large $1/x$. *Phys. Lett. B* 326, 1994.
- [32] H. D. Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.* 30 1346-1349, 1973.
- [33] T. Schulze-Hartung R. Andrae and P.Melchior. Dos and dont's of reduced chi-squared. *Astronomy B*76, 204, 2010.
- [34] A. H. Rezaeian and I. Schmidt. Impact-parameter dependent color glass condensate dipole model and new combined hera data. *Physical Review D*, 78(1), page 19, 2013.
- [35] J. J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, 2011.
- [36] R.L. Workman. Particle data group. *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 083C01, 2022.
- [37] F. J. Ynduráin. *The Theory of Quark and Gluon Interactions*. Cambridge University Press, 2006.

Apéndice

Q^2 (GeV^2)	x_{Bj}	$\sigma_{r,NC}^+$	δ_{tot}
0.15	0.502×10^{-5}	0.185	0.010440017
0.2	0.669×10^{-5}	0.227	0.006127108
0.2	0.849×10^{-5}	0.223	0.006785066
0.2	0.110×10^{-4}	0.208	0.00911828
0.2	0.398×10^{-4}	0.211	0.043552537
0.2	0.251×10^{-3}	0.18	0.027610463
0.25	0.836×10^{-5}	0.265	0.00766771
0.25	0.106×10^{-4}	0.26	0.006989504
0.25	0.138×10^{-4}	0.249	0.00682746
0.25	0.230×10^{-4}	0.243	0.00957238
0.25	0.398×10^{-4}	0.236	0.011223704
0.25	0.110×10^{-3}	0.199	0.00999309
0.25	0.251×10^{-3}	0.196	0.010230411
0.25	0.394×10^{-3}	0.194	0.011582677
0.25	0.158×10^{-2}	0.198	0.024977981
0.35	0.512×10^{-5}	0.436	0.11199214
0.35	0.100×10^{-4}	0.345	0.009932106
0.35	0.127×10^{-4}	0.324	0.009086973
0.35	0.165×10^{-4}	0.313	0.008561852
0.35	0.320×10^{-4}	0.296	0.012199546
0.35	0.662×10^{-4}	0.282	0.010493091
0.35	0.130×10^{-4}	0.257	0.009022164
0.35	0.220×10^{-3}	0.24	0.009323807
0.35	0.500×10^{-3}	0.24	0.009090489
0.35	0.251×10^{-2}	0.201	0.02236347
0.4	0.133×10^{-4}	0.355	0.012101908
0.4	0.170×10^{-4}	0.354	0.010455173
0.4	0.220×10^{-4}	0.334	0.009725424
0.4	0.368×10^{-4}	0.33	0.01383263
0.4	0.883×10^{-4}	0.32	0.011812162
0.4	0.176×10^{-3}	0.287	0.010703369
0.4	0.294×10^{-3}	0.277	0.010543335
0.4	0.631×10^{-3}	0.26	0.010512845

Tabla 8: Datos de HERA de las secciones eficaces reducidas combinadas $\sigma_{r,NC}^+$ para dispersión de corriente neutra NC e^+p en $\sqrt{s} = 318$ GeV. Los datos de esta tabla fueron utilizados para realizar los ajustes definitivos del modelo GBW. δ_{tot} representa la incertidumbre total del cálculo de la sección eficaz reducida [21].

Tabla 8: Continuación

Q^2 (GeV^2)	x_{Bj}	$\sigma_{r,NC}^+$	δ_{tot}
0.5	0.732×10^{-5}	0.428	0.043032394
0.5	0.158×10^{-4}	0.426	0.020227465
0.5	0.212×10^{-4}	0.39	0.01267236
0.5	0.276×10^{-4}	0.377	0.011888538
0.5	0.398×10^{-4}	0.364	0.015991453
0.5	0.100×10^{-3}	0.348	0.010350938
0.5	0.251×10^{-3}	0.308	0.008948394
0.5	0.368×10^{-3}	0.3	0.009583157
0.5	0.800×10^{-3}	0.287	0.008918684
0.5	0.320×10^{-2}	0.182	0.023949485
0.65	0.952×10^{-5}	0.464	0.029020186
0.65	0.158×10^{-4}	0.462	0.029978923
0.65	0.398×10^{-4}	0.472	0.018676176
0.65	0.598×10^{-4}	0.416	0.021342422
0.65	0.100×10^{-3}	0.409	0.01560398
0.65	0.251×10^{-3}	0.361	0.01230793
0.65	0.478×10^{-3}	0.332	0.01205832
0.65	0.800×10^{-3}	0.318	0.0101139
0.65	0.320×10^{-2}	0.224	0.015253232
0.85	0.124×10^{-4}	0.552	0.026278447
0.85	0.200×10^{-4}	0.611	0.036481203
0.85	0.398×10^{-4}	0.558	0.019621537
0.85	0.500×10^{-4}	0.541	0.032061725
0.85	0.100×10^{-3}	0.503	0.030872401
0.85	0.251×10^{-3}	0.397	0.028728924
0.85	0.800×10^{-3}	0.349	0.01967738
0.85	0.320×10^{-2}	0.308	0.016975383
1.2	0.176×10^{-4}	0.592	0.026852013
1.2	0.200×10^{-4}	0.667	0.026541823
1.2	0.320×10^{-4}	0.685	0.024092337
1.2	0.631×10^{-4}	0.649	0.017060061
1.2	0.800×10^{-4}	0.595	0.019142085
1.2	0.130×10^{-3}	0.543	0.031476348
1.2	0.158×10^{-3}	0.533	0.015089643
1.2	0.398×10^{-3}	0.493	0.021471494
1.2	0.130×10^{-2}	0.372	0.017577738
1.2	0.500×10^{-2}	0.298	0.016497792

Tabla 8: Continuación

Q^2 (GeV^2)	x_{Bj}	$\sigma_{r,NC}^+$	δ_{tot}
1.5	0.185×10^{-4}	0.619	0.073811435
1.5	0.220×10^{-4}	0.696	0.021918586
1.5	0.320×10^{-4}	0.753	0.022941304
1.5	0.500×10^{-4}	0.76	0.020399736
1.5	0.800×10^{-4}	0.699	0.020551551
1.5	0.130×10^{-3}	0.646	0.021815584
1.5	0.200×10^{-3}	0.612	0.024462016
1.5	0.320×10^{-3}	0.577	0.019198326
1.5	0.500×10^{-3}	0.547	0.042383959
1.5	0.800×10^{-3}	0.49	0.018528027
1.5	0.100×10^{-2}	0.462	0.030597343
1.5	0.320×10^{-2}	0.41	0.014449752
1.5	0.130×10^{-1}	0.324	0.022946109
2	0.247×10^{-4}	0.781	0.06537068
2	0.293×10^{-4}	0.788	0.021765353
2	0.500×10^{-4}	0.823	0.022230295
2	0.800×10^{-4}	0.762	0.015686099
2	0.130×10^{-3}	0.723	0.015433468
2	0.200×10^{-3}	0.679	0.015102065
2	0.320×10^{-3}	0.627	0.015511377
2	0.500×10^{-3}	0.575	0.015938498
2	0.100×10^{-2}	0.51	0.012270032
2	0.320×10^{-2}	0.426	0.012284617
2.7	0.309×10^{-4}	0.845	0.047356125
2.7	0.366×10^{-4}	0.866	0.030274473
2.7	0.409×10^{-4}	0.937	0.084153347
2.7	0.500×10^{-4}	0.883	0.021954761
2.7	0.800×10^{-4}	0.889	0.014817259
2.7	0.130×10^{-3}	0.805	0.011743899
2.7	0.200×10^{-3}	0.781	0.016384628
2.7	0.320×10^{-3}	0.7	0.014500648
2.7	0.500×10^{-3}	0.645	0.012624382
2.7	0.800×10^{-3}	0.594	0.013567797
2.7	0.130×10^{-2}	0.567	0.011998851
2.7	0.200×10^{-2}	0.481	0.01502923
2.7	0.500×10^{-2}	0.453	0.012149609

Tabla 8: Continuación

Q^2 (GeV^2)	x_{Bj}	$\sigma_{r,NC}^+$	δ_{tot}
3.5	0.406×10^{-4}	0.806	0.061662846
3.5	0.432×10^{-4}	0.881	0.063967699
3.5	0.460×10^{-4}	0.965	0.043005666
3.5	0.512×10^{-4}	0.94	0.037933047
3.5	0.531×10^{-4}	0.88	0.037141109
3.5	0.800×10^{-4}	0.952	0.021320337
3.5	0.130×10^{-3}	0.918	0.013458644
3.5	0.200×10^{-3}	0.854	0.0124684
3.5	0.320×10^{-3}	0.791	0.012109536
3.5	0.500×10^{-3}	0.749	0.01316494
3.5	0.800×10^{-3}	0.659	0.01113359
3.5	0.130×10^{-2}	0.623	0.012257753
3.5	0.200×10^{-2}	0.568	0.008000134
3.5	0.800×10^{-2}	0.462	0.008598911
4.5	0.522×10^{-4}	0.916	0.072376232
4.5	0.592×10^{-4}	0.971	0.041338037
4.5	0.618×10^{-4}	0.97	0.0672464
4.5	0.683×10^{-4}	1.08	0.033313055
4.5	0.732×10^{-4}	1.019	0.03211273
4.5	0.818×10^{-4}	1.08	0.169348029
4.5	0.130×10^{-4}	1.02	0.018745813
4.5	0.200×10^{-3}	0.961	0.015254797
4.5	0.320×10^{-3}	0.893	0.01374437
4.5	0.500×10^{-3}	0.797	0.012894662
4.5	0.800×10^{-3}	0.72	0.013147444
4.5	0.130×10^{-2}	0.665	0.012808977
4.5	0.200×10^{-2}	0.615	0.01171684
4.5	0.320×10^{-2}	0.572	0.010270546
6.5	0.754×10^{-4}	1.117	0.085455026
6.5	0.803×10^{-4}	1.085	0.062898658
6.5	0.855×10^{-4}	1.097	0.045670391
6.5	0.951×10^{-4}	1.084	0.046234347
6.5	0.986×10^{-4}	1.177	0.038321247
6.5	0.130×10^{-3}	1.113	0.02221906
6.5	$0.200E \times 10^{-3}$	1.112	0.016391725
6.5	0.320×10^{-3}	1.001	0.013627577

Tabla 8: Continuación

Q^2 (GeV^2)	x_{Bj}	$\sigma_{r,NC}^+$	δ_{tot}
6.5	0.500×10^{-3}	0.933	0.015740072
6.5	0.800×10^{-3}	0.849	0.013334977
6.5	0.130×10^{-2}	0.758	0.012343303
6.5	0.200×10^{-2}	0.695	0.010155803
6.5	0.320×10^{-2}	0.641	0.011045492
6.5	0.500×10^{-2}	0.579	0.009725132
8.5	0.986×10^{-4}	1.161	0.046652413
8.5	0.105×10^{-3}	1.183	0.072022746
8.5	0.112×10^{-3}	1.18	0.047571126
8.5	0.124×10^{-3}	1.259	0.037954831
8.5	0.129×10^{-3}	1.232	0.034705683
8.5	0.139×10^{-3}	1.257	0.076863469
8.5	0.200×10^{-3}	1.195	0.022175221
8.5	0.320×10^{-3}	1.107	0.015411174
8.5	0.500×10^{-3}	1.014	0.015586931
8.5	0.800×10^{-3}	0.931	0.013885327
8.5	0.130×10^{-2}	0.839	0.013000981
8.5	0.200×10^{-2}	0.769	0.014630819
8.5	0.320×10^{-2}	0.661	0.013085797
8.5	0.500×10^{-2}	0.632	0.011657445
10	0.320×10^{-3}	1.138	0.028412421
10	0.500×10^{-3}	1.058	0.024768275
10	0.800×10^{-3}	0.977	0.023803738
10	0.130×10^{-2}	0.888	0.02368098
10	0.200×10^{-2}	0.802	0.023355143
10	0.500×10^{-2}	0.628	0.011070092

Q^2 (GeV^2)	x	y	W (GeV)	$\kappa\sigma_{\gamma^*p}^{eff}$	R	F_2	δ_{stat} (%)	δ_{syst} (%)	δ_{tot} (%)
0.35	0.0000061	0.640	240.	0.384	0.10	0.397	5.5	14.5	15.5
0.50	0.0000086	0.640	240.	0.473	0.13	0.494	3.6	11.1	11.7
0.65	0.0000112	0.640	240.	0.539	0.16	0.568	3.6	10.4	11.0
0.65	0.0000164	0.440	199.	0.536	0.15	0.547	2.9	8.8	9.2
0.85	0.0000138	0.682	248.	0.664	0.19	0.713	5.0	13.0	13.9
0.85	0.000020	0.470	206.	0.628	0.19	0.646	2.6	6.6	7.1
0.85	0.000032	0.294	163.	0.615	0.18	0.621	2.4	7.2	7.6
0.85	0.000050	0.188	130.	0.576	0.18	0.578	2.8	8.1	8.6
0.85	0.000080	0.118	103.	0.533	0.17	0.534	3.1	15.4	15.7
1.20	0.000020	0.664	245.	0.793	0.23	0.857	3.5	10.5	11.0
1.20	0.000032	0.415	194.	0.741	0.22	0.759	2.6	7.1	7.6
1.20	0.000050	0.266	155.	0.709	0.22	0.715	2.2	6.9	7.2
1.20	0.000080	0.166	122.	0.626	0.21	0.627	2.1	8.9	9.2
1.20	0.000130	0.102	96.	0.569	0.21	0.570	2.4	5.1	5.6
1.20	0.000200	0.066	77.	0.525	0.21	0.525	2.4	5.2	5.8
1.20	0.000320	0.042	61.	0.531	0.21	0.531	2.4	7.9	8.3
1.50	0.000032	0.519	217.	0.817	0.25	0.855	3.2	8.8	9.4
1.50	0.000050	0.332	173.	0.771	0.25	0.783	2.7	5.9	6.4
1.50	0.000080	0.208	137.	0.687	0.24	0.690	2.4	6.9	7.3
1.50	0.000130	0.128	107.	0.668	0.23	0.669	2.5	6.6	7.1
1.50	0.000200	0.083	87.	0.645	0.23	0.645	2.5	7.4	7.8
1.50	0.000320	0.052	68.	0.613	0.23	0.613	2.5	6.9	7.4
1.50	0.000500	0.033	55	0.577	0.23	0.577	2.5	7.9	8.3
2.00	0.000032	0.692	250.	0.945	0.29	1.048	5.0	12.9	13.9
2.00	0.000050	0.443	200.	0.908	0.28	0.939	3.2	6.0	6.8
2.00	0.000080	0.277	158.	0.743	0.27	0.751	2.9	5.8	6.5
2.00	0.000130	0.170	124.	0.727	0.26	0.729	2.7	7.6	8.0
2.00	0.000200	0.111	100.	0.716	0.26	0.717	2.8	5.8	6.4
2.00	0.000320	0.069	79.	0.727	0.25	0.727	2.8	5.9	6.6
2.00	0.000500	0.044	63.	0.639	0.25	0.639	2.9	8.3	8.8
2.50	0.000050	0.554	224.	0.973	0.30	1.034	4.3	11.2	12.0
2.50	0.000080	0.346	177.	0.932	0.29	0.950	3.3	5.4	6.3
2.50	0.000130	0.213	139.	0.917	0.28	0.922	2.9	7.6	8.1
2.50	0.000200	0.138	112.	0.840	0.27	0.842	2.8	6.8	7.4
2.50	0.000320	0.086	88.	0.702	0.27	0.703	3.1	5.3	6.1
2.50	0.000500	0.055	71.	0.649	0.26	0.649	3.2	6.8	7.6
2.50	0.000800	0.035	56.	0.590	0.26	0.590	3.3	8.2	8.9
3.50	0.000080	0.484	209.	1.045	0.32	1.094	4.1	8.6	9.5
3.50	0.000130	0.298	164.	1.003	0.31	1.018	3.5	5.0	6.1
3.50	0.000200	0.194	132.	0.869	0.30	0.873	3.3	7.2	7.9
3.50	0.000320	0.121	105.	0.898	0.29	0.899	3.2	8.5	9.1
3.50	0.000500	0.077	84.	0.863	0.28	0.864	3.4	6.5	7.3
3.50	0.000800	0.048	66.	0.686	0.28	0.686	3.6	7.4	8.2
3.50	0.001300	0.030	52.	0.663	0.27	0.663	3.6	7.5	8.3

Tabla 9: Función estructural del protón $F_2(x, Q^2)$ y la sección eficaz fotón-protón virtual efectiva $\sigma_{\gamma^*p}^{eff}(W, Q^2)$ escalado por el factor cinemático $\kappa = Q^2/(4\pi\alpha)$ con δ_{stat} , δ_{syst} y δ_{tot} [9].

Q^2	$\sigma_{\gamma*p}$	X Error	Y Error
0.35	7787.093	0.0	9.430
0.50	6714.340	0.0	6.137
0.65	5885.557	0.0	5.058
0.85	5544.487	0.0	6.021
1.20	4690.338	0.0	4.031
1.50	3865.832	0.0	2.839
2.00	3353.621	0.0	3.642
2.50	2762.390	0.0	2.590
3.50	2119.144	0.0	1.573

Tabla 10: Datos experimentales modificados para la primera curva.

Q^2	$\sigma_{\gamma*p}$	X Error	Y Error
0.65	2921.116	0.0	4.199
0.85	2617.207	0.0	2.903
1.20	2187.431	0.0	2.598
1.50	1820.793	0.0	1.821
2.00	1608.249	0.0	1.709
2.50	1320.606	0.0	1.300
3.50	1015.150	0.0	0.968

Tabla 11: Datos experimentales modificados para la segunda curva.

Q^2	$\sigma_{\gamma*p}$	X Error	Y Error
0.85	1285.594	0.0	3.053
1.20	1049.815	0.0	2.362
1.50	813.791	0.0	1.856
2.00	660.095	0.0	1.341
2.50	651.744	0.0	1.650
3.50	441.163	0.0	1.089

Tabla 12: Datos experimentales modificados para la tercera curva.

Q^2	$\sigma_{\gamma*p}$	X Error	Y Error
0.85	602.034	0.0	3.236
1.20	463.458	0.0	2.665
1.50	395.642	0.0	1.756
2.00	322.940	0.0	1.615
2.50	298.509	0.0	1.381
3.50	227.943	0.0	1.296

Tabla 13: Datos experimentales modificados para la cuarta curva.

Q^2	$\sigma_{\gamma*p}$	X Error	Y Error
0.85	278.545	0.0	5.466
1.20	210.629	0.0	1.474
1.50	191.010	0.0	1.862
2.00	159.027	0.0	1.312
2.50	124.734	0.0	0.951
3.50	109.529	0.0	0.999

Tabla 14: Datos experimentales modificados para la quinta curva.

Q^2	$\sigma_{\gamma*p}$	X Error	Y Error
1.20	97.171	0.0	1.409
1.50	90.767	0.0	1.679
2.00	80.735	0.0	1.332
2.50	57.658	0.0	1.096
3.50	43.533	0.0	0.892

Tabla 15: Datos experimentales modificados para la sexta curva.

Q^2	$\sigma_{\gamma*p}$	X Error	Y Error
1.20	49.141	0.0	2.039
1.50	42.718	0.0	1.773
2.00	35.481	0.0	1.561
2.50	26.208	0.0	1.166
3.50	21.036	0.0	0.873

Tabla 16: Datos experimentales modificados para la séptima curva.

Listing 1: Código computacional del ajuste al modelo GBW

```

# some basic imports
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from lmfit import Model, models
from uncertainties import umath
%matplotlib inline
import math
from sympy import Symbol
import scipy.special as special
from scipy.special import kv
import scipy.integrate as integrate

Q0 = 1 #GeV
alpha = 1/137
##### quark masses GeV
mu = 2.16/1000 #up
md= 4.67/1000 #down
ms = 93.4/1000 #strange
mc = 1.48 #charm
mb = 4.18 #bottom
mt = 172.69 ## top, we will not use it
sqrts = 318 #GeV
s = 318**2 #GeV
#sigma0 = 59.1454 #GeV --> 23.03 mb
#x0 = 3.04*10**(-4)
#lamb = 0.288
#x = 0.0002
#ef2=10/9
eu2 = 4/9
ed2 = 1/9

def Qs2(x, x0, lamb):
    return (Q0**2)*(x0/x)**(lamb)

def sigmaqqb(x, r, x0, lamb, sigma0):
    #print(type(x),type(r))
    return sigma0*(1 - np.exp(-(Qs2(x,x0, lamb)/4)*r**2))

def epsilon2(z, Q2, mf):
    return z*(1-z)*Q2 + mf**2

def epsilon(z, Q2, mf):
    return np.sqrt(z*(1-z)*Q2 + mf**2)

```

```

def psiT2(z, r, Q2, mf, ef2):
    return ((6*alpha)/(4*(math.pi**2)))*(ef2)
        *(z**2+(1-z)**2)*epsilon2(z, Q2, mf)
        *((special.kv(1, epsilon(z, Q2, mf)*r))**2)
        + (mf**2)*(special.kv(0, epsilon(z, Q2, mf)*r))**2))

def psiL2(z, r, Q2, mf, ef2):
    return ((6*alpha)/(4*np.pi**2))*(ef2)
        *(4*Q2*(z**2)*((1-z)**2)*(special.kv(0, epsilon(z, Q2, mf)*r))**2))

def psiR2flav(z, r, Q2, y, mf, ef2):
    return (psiT2(z, r, Q2, mf, ef2)
        + (1-y**2/(1 + (1 - y)**2))* psiL2(z, r, Q2, mf, ef2) )

def psiR2(z, r, Q2, y):
    return (psiR2flav(z, r, Q2, y, mu, eu2) #up quark
        + psiR2flav(z, r, Q2, y, md, ed2) # down quark
        + psiR2flav(z, r, Q2, y, ms, ed2) # strange quark
        + psiR2flav(z, r, Q2, y, mc, eu2) # charm quark
        + psiR2flav(z, r, Q2, y, mb, ed2)) # bottom quark

def sigmaredInt(r,z, x, Q2, x0,lamb, sigma0):
    return (psiR2(z, r, Q2, Q2/s/x)*sigmaqqb(x, r,x0,lamb, sigma0)
        *2*math.pi*r*Q2/(4*math.pi**2*alpha))

def sigmared(x, Q2, x0,lamb, sigma0):
# Make q iterable if it is only a float/int
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        x = np.array([x])
    if not hasattr(Q2, '__iter__'):
        Q2 = np.array([Q2])

# try to write it simpler ... take an element from the list,

# insert, then append
    resultint = []
    for i in range(0, len(Q2)):

        xd = x[i]
        Q2d = Q2[i]
#         print(Q2d)
        to_be_integrated = lambda r, z, xd, Q2d,x0, lamb, sigma0:

```



```

        sigmaredInt(r, z, xd, Q2d, x0, lamb, sigma0)
        resultint.append(integrate.dblquad(sigmaredInt,
        0,1, 0, 30, args=(xd, Q2d, x0, lamb, sigma0))[0])

    return np.array(resultint)

##### start with the fit #####

def fitfunction(x, Q2, x0=0.000545, lamb=0.3, sigma0=60):
    return sigmared(x, Q2, x0, lamb, sigma0)

model = Model(fitfunction, independent_vars=['x', 'Q2'])

params = model.make_params(x0=dict(value =0.000545,

min = 0.0000545, max=0.00545 ),
lamb=dict(value=0.3, min = 0.01, max = 0.6),

sigma0= dict(value = 60, min = 1, max = 1000))

xdat = np.array(xdat, dtype=float)
Q2dat = np.array(Q2dat, dtype=float)
sigdat = np.array(sigdat, dtype=float)
uncert = np.array(uncert, dtype=float)

result= model.fit(sigdat, params, x=xdat, Q2=Q2dat, weights=1/uncert)

print(result.fit_report())

### Plot

import matplotlib.patches as mpatches
plt.errorbar(xdat, sigdat, yerr=uncert, fmt='r.', label='observations')
plt.plot(xdat, result.best_fit, '-', label='fit')
plt.xscale("log")

my_variable_list = ['Q^{2}', 'x_{Bj}', '\sigma_{r, NC}^{+}']
leg1 = plt.legend(loc='lower left')
plt.gca().add_artist(leg1)
Q2 = mpatches.Patch(color='black', label='$Q^{2} = 10.0 \text{ GeV}^{2}$')
plt.legend(handles=[Q2])
plt.xlabel(r'$ %s $' % my_variable_list[1], fontsize=14)
plt.ylabel(r'$ %s $' % my_variable_list[2], fontsize=13)
#plt.savefig('Q2=10.png', dpi=300)
plt.show()

```