

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ACTUARÍA, FÍSICA Y MATEMÁTICAS



**Aplicación del álgebra  
cuaterniónica en las ecuaciones  
de Maxwell**

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA  
DE HONORES PRESENTA EL/LA ESTUDIANTE

ANGELA ESTHER RAMOS SALGADO

163639

DR. MARCO ANTONIO PÉREZ DE LA ROSA

SAN ANDRÉS CHOLULA, PUEBLA.

PRIMAVERA, 2022

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA  
DE HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE ANGELA ESTHER  
RAMOS SALGADO Y 163639

DIRECTOR DE TESIS

---

Dr. Marco Antonio Pérez De La Rosa

PRESIDENTE DE TESIS

---

Dr. Gerardo Arizmendi Echegaray

SECRETARIO DE TESIS

---

Dr. Wanderson Maia Pimenta

# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Álgebra cuaterniónica en los números reales</b>	<b>8</b>
2.1	Propiedades de la Conjugación cuaterniónica . . . . .	10
2.2	Propiedades relacionadas con la norma de los cuaternios . . . . .	12
2.3	Ecuaciones lineales y cuadráticas con coeficientes reales . . . . .	18
2.3.1	Ecuaciones cuaterniónicas de primer grado . . . . .	18
2.3.2	Ecuaciones cuadráticas cuaterniónicas en $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ . . . . .	19
2.4	Álgebra cuaterniónica en los números complejos . . . . .	21
2.4.1	Propiedades de la conjugación cuaterniónica en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ . . . . .	23
2.4.2	Propiedades de la conjugación compleja en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ . . . . .	23
2.4.3	Propiedades de la conjugación compleja y cuaterniónica . . . . .	25
2.5	Representaciones de los cuaternios reales . . . . .	25
2.6	Análisis Vectorial . . . . .	32
2.6.1	Derivadas parciales de vectores . . . . .	32
2.6.2	Gradiente, divergencia y rotacional . . . . .	33
2.6.3	Integración vectorial . . . . .	37
2.7	Operadores de Cauchy . . . . .	39
2.7.1	Funciones armónicas . . . . .	39
2.8	Divisores de Ceros . . . . .	40
2.9	Funciones cuaterniónicas complejas . . . . .	42
2.10	Operador diferencial Moisil - Theodoresco . . . . .	42
2.11	Operador $D + \alpha I$ . . . . .	45
2.11.1	Ecuación de Onda de Hemiholtz y sus soluciones fundamentales . . . . .	46
2.11.2	Representaciones integrales en dominios con fronteras . . . . .	47
2.12	Ecuaciones de Maxwell y la teoría electromagnética . . . . .	49
2.13	Integrales de tipo Stratton -Chu . . . . .	56
2.13.1	Ecuaciones de Maxwell para medios homogéneos en la forma cuaterniónica . . . . .	56
2.13.2	Aplicación del operador cuaterniónico de Maxwell en una carga móvil . . . . .	59
2.14	Ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo . . . . .	63
2.14.1	Operador de Maxwell cuaterniónico en el tiempo de forma matricial . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Separación de los campos electromagnéticos de la Tierra usando las integrales de Stratton-Chu</b>	<b>74</b>
3.1	Condiciones de frontera . . . . .	74
3.2	Relación con los campos monocromáticos . . . . .	76
3.3	Campos electromagnéticos cuasi-estacionarios . . . . .	77
3.4	Ecuaciones de onda de campo . . . . .	78
3.5	Ecuaciones de campo con cargas y corrientes magnéticas . . . . .	78
3.6	Campo electromagnético estacionario . . . . .	79

3.7	Ecuaciones de integración para un campo vectorial arbitrario . . .	80
3.7.1	Identidades integrales auxiliares . . . . .	80
3.8	Vectores análogos de las fórmulas de Pompeiu . . . . .	82
3.8.1	Fórmulas de Stratton-Chu para un campo electromagnético transitorio . . . . .	84
3.8.2	Fórmulas de Stratton-Chu para campos cuasi-estático . . .	87
3.8.3	Modelo de Onda de un campo . . . . .	90
3.8.4	Fórmulas de Stratton-Chu para campos estacionarios . . .	92
3.8.5	Fórmulas de Stratton - Chu para un campo monocromático	93
3.8.6	Modificación de las fórmulas de Stratton - Chu para un campo monocromático . . . . .	95
3.8.7	Fórmulas de Stratton - Chu en 2D . . . . .	98
3.8.8	Fórmulas Stratton - Chu como análogos de las fórmulas de Cauchy . . . . .	99
3.9	Integrales tipo Stratton - Chu . . . . .	100
3.9.1	Integral Stratton - Chu para un campo monocromático . .	100
3.9.2	Propiedades de las integrales tipo Stratton - Chu . . . . .	101
3.9.3	Integrales de Stratton - Chu modificadas . . . . .	105
3.9.4	Las integrales Stratton - Chu para campo cuasi - esta- cionarios . . . . .	107
3.10	Campos electromagnéticos con transformadas integrales . . . . .	108
3.10.1	Condiciones de integrales de frontera para un campo elec- tromagnético sobre un dominio homogéneo . . . . .	108
3.10.2	Determinación de un campo electromagnético para una discontinuidad específica . . . . .	111
3.10.3	Fórmulas de inversión para las integrales de Stratton - Chu	111
3.10.4	Transformadas integrales de Stratton - Chu en el plano . .	114
3.11	Técnicas para la separación de los campos electromagnéticos de la Tierra . . . . .	115
3.11.1	Separación del campo en partes externas e internas . . . .	115
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>120</b>

### **Abstract**

El electromagnetismo es una de las ramas fundamentales en la Física y de las responsables de los beneficios del mundo actual. Sus diversas aplicaciones en la vida del ser humano moderno son incalculables, y cada vez más tecnologías buscan una forma innovadora en su empleo. De igual manera, esta rama es una de las responsables de las investigaciones de fenómenos naturales en la Tierra, como lo es el campo electromagnético de la Tierra. Debido a que realizar cálculos con matemática convencional sería arduo y extremadamente largo, se usan las integrales de Stratton - Chu. Estas ecuaciones son altamente funcionales con la implementación de álgebra cuaterniónica en ellas, manteniendo las propiedades de las ecuaciones de Maxwell intrínsecamente para el estudio de los campos electromagnéticos.

**Palabras clave:** ecuaciones de Maxwell, álgebra cuaterniónica, teoría electromagnética, integrales de Stratton - Chu, campos electromagnéticos.

# 1 Introducción

En el presente trabajo se estudiará la aplicación de el álgebra cuaterniónica en las ecuaciones de Maxwell, las cuales se encargan de analizar el área del electromagnetismo en la Física. Los cuaternios se emplearán con las integrales de Stratton - Chu [13] para los campos monocromáticos homogéneos electromagnéticos.

El álgebra cuaterniónica con aplicación en el electromagnetismo surgió cuando James Clark Maxwell al desarrollar la Teoría Electromagnética en los años de 1855 y 1864, hoy simplificada en las ecuaciones de Maxwell hizo uso de los vectores hamiltonianos y los cuaternios. Este interés surgió debido a que Maxwell vio en los números de Hamilton una concepción geometrizada del cálculo y no únicamente una aplicación con procedimientos o métodos para operar con ellos. En las investigaciones de electromagnetismo, Maxwell usó los cuaternios como notación concisa y eficaz para el manejo de vectores espaciales, aunque en forma simplificada.

En la época de Maxwell surgió una gran polémica acerca si los cuaternios tenían un futuro, principalmente en el área de la Física. Uno de sus oponentes fue Oliver Heaviside (1850 - 1925), creador del Cálculo Operacional y Vectorial, debido a que consideraba los cuaternios eran antifísicos y antimatemáticos pues no se adaptaban con la realidad. Posteriormente, en 1882, se concibió en el área de la Física, la definición de que un cuaternio no era ni un escalar o vector, sino una combinación de ambos. Es un concepto abstracto sin representación física.

Sin embargo, el propósito real de Hamilton era la creación de "un sistema puramente matemático (...), el cuaternio nace indirectamente de la voluntad una interpretación matemática del mundo real" [1].

El álgebra cuaterniónica es una rama de los números reales y de los números complejos, los cuales son números cuatro dimensionales que se forman de una parte escalar y de una parte vectorial, representado por  $q$ . Los cuaternios como números, comparten propiedades similares a los números complejos, excepto una que es la conmutatividad.

Históricamente, el nacimiento de los cuaternios surgió de la mente del matemático irlandés, Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865), uno de los matemáticos más importantes del siglo XIX, aunque existen datos que señalan que Leonard Euler (1707 - 1783) en una carta dirigida a Christian Goldbach (1690 - 1764), en 1798, definía a los cuaternios implícitamente. Sin embargo, Euler no reconoció el carácter fundamental de estos entes matemáticos y no los estudió arduamente. Un siglo después, el matemático francés Benjamín Olinde Rodrigues (1775 - 1851) hizo uso de un tipo de números similares para la descripción de las rotaciones en espacios tridimensionales e incluso Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) elaboró una fórmula cuaterniónica que no fue publicada.

No obstante, la paternidad cuaterniónica se le atribuye a Hamilton [1], demostrando que los números complejos constituían un álgebra adoptando que los cuadrados de las unidades reales e imaginarias se igualaran a uno,  $1^2 = 1$  y menos uno  $i^2 = -1$  respectivamente. Durante más de diez años intentó extender este resultado a sus triadas de números a los cuales más tarde denominó

vectores, sin lograrlo.

Aunque hasta que introdujo otra unidad imaginaria adicional (aparte de  $i$  y  $j$ ) y consideró que la conmutatividad no se cumplía en el producto cuaterniónico, y de esta manera, concretó la creación del álgebra cuaterniónica. Este hallazgo estuvo motivado por la esperanza de crear un tipo de números hipercomplejos referidos al espacio tridimensional al que está acostumbrada la intuición visual. Hamilton comprendió que la construcción debía ser una analogía con la manera en que los números complejos usuales se vinculan con el plano, pero añadiendo una cuarta dimensión y renunciando a la conmutatividad del producto.

Sir William esculpió incluso, rápidamente en un piedra con ayuda de una navaja, la famosa fórmula:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

El 14 de noviembre de 1843 apareció el primer artículo de Hamilton en relación con los números cuaterniónicos. Su único discípulo, Peter Guthrie Tait (1831 - 1901) comentó: "Cuaternio en Latín significa conjunto de cuatro; la traducción griega de esta palabra es *Tetractys*. Hamilton era conocedor de la lengua griega y reverenciaba la escuela pitagórica, muestra haber construido un puente entre esta estructura y el *Tetractys* pitagórico que era considerado la fuente de todas las cosas.

Un problema que surgió, además de que eran antifísicos y antimatemáticos como se mencionó antes, fue la visualización geométrica de los cuaternios. De esta manera, si bien los números complejos favorecieron las indagaciones sobre tales operaciones muy asociadas a magnitudes físicas, sus nociones no resultaron suficientes puesto que la acción de fuerzas sobre cuerpos y que podían ponerlos en rotación, contenían casos en los que dichas fuerzas estaban en planos diferentes; lo que llevó a reflexionar sobre posibles versiones tridimensionales de esos números. Luego la cuestión de si existían o se podían descubrir otros sistemas numéricos que modelaran la rotación en el espacio tridimensional, se convirtió en un problema intensamente estudiado que resultó en una obsesión para el propio Hamilton.

Un importante paso hacia la solución de este problema fue dado por Hamilton a mediados de los años treinta del siglo XIX. Su definición formal de números complejos como pares ordenados de números reales (1835), le surgió la idea de tratar los entes buscados en términos algebraicos y como ternas ordenadas de números reales  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de manera que:

$$z = \alpha + \beta i + \gamma j, \quad i^2 = j^2 = -1$$

Sin embargo, le tomó casi diez años comprender que sin la cuarta dimensión y sin abandonar la conmutatividad de la multiplicación, esta clase de sistemas no podían existir.

Hamilton concluyó así que los cuaterniones debían estar representados por expresiones de la forma:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad q_m \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, 2, 3$$

Y retomando su fórmula:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Después demostró cuidadosamente que, con excepción de la propiedad de la conmutatividad del producto, las propiedades de un sistema numérico y, en particular, la propiedad asociativa de la multiplicación, son válidas, mientras que para todo cuaternio no nulo, su inverso quedaba expresado en términos de:

$$q^{-1} = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{-2}(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) = |q|^{-2}\bar{q}$$

El descubrimiento de Hamilton anunció una época de oro para el Álgebra pues a pesar del interés suscitado por las ecuaciones algebraicas, el estudio de las estructuras algebraicas se convirtió en la principal línea de investigación.

El interés de Hamilton en que los cuaternos fueran asociados con aplicaciones prácticas se debe a que él era un físico reconocido por sus trabajos en la Óptica Geométrica.

A pesar de todo esta extenuante labor, la difusión de los cuaternos fue obstaculizada debido al formalismo matemático que contenían y su aplicabilidad cuestionada por otras figuras matemáticas como Heaviside. No fue hasta los trabajos desarrollados por William Kingdom Clifford (1845 - 1879) que los secretos de este sistema numérico resultaron revelados de una manera más satisfactoria.



## 2 Álgebra cuaterniónica en los números reales

En el álgebra cuaterniónica con números reales  $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ , el cuaternio real se escribe

$$q = q_0 + \vec{q} = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3 \quad (1)$$

**Definición 1** *Un cuaternio real es una cuádrupla de los números reales de la forma  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ , es decir, cierto elemento del espacio  $\mathbb{R}^4$  que puede representarse como una combinación de elementos de la base ortonormal.*

Dos cuaternios  $q_1$  y  $q_2$  son iguales si y sólo si, se cumple que las respectivas componentes de las tríadas son iguales [1]:

$$q_{10} = q_{20}, q_{11} = q_{21}, q_{12} = q_{22}, q_{13} = q_{23}. \quad (2)$$

Ahora, se definirán las operaciones principales de los cuaternios reales, la suma y el producto. En el caso de la suma de cuaternios, se define de la siguiente manera. La suma de dos cuaternios da como resultado un nuevo cuaternio, cuyas componentes son el resultado de sumar las componentes correspondientes con cada entrada, escalar y vectorial.

**Definición 2** *Sea  $p, q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$*

$$\begin{aligned} p + q &= (p_0 + \vec{p}) + (q_0 + \vec{q}) \\ &= (p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3) + (q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3) \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) e_1 + (p_2 + q_2) e_2 + (p_3 + q_3) e_3 \end{aligned} \quad (3)$$

El producto cuaterniónico es una de las operaciones fundamentales cuando se opera con estos números, uno de los motivos relevantes es que aquí es donde se puede visualizar la propiedad de la anticonmutatividad.

**Definición 3** *Sea el espacio  $\mathbb{R}^4$  y la componente  $e$  dada a los vectores:*

$$i_0 = (1, 0, 0, 0), i_1 = (0, 1, 0, 0), i_2 = (0, 0, 1, 0), i_3 = (0, 0, 0, 1). \quad (4)$$

*Sea el conjunto integrado por las cuádruplas ordenadas de números reales:*

$$\mathbb{H} = \{q : q = (q_0, q_1, q_2, q_3)\}, q_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, 3 \quad (5)$$

*Sea  $p, q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ , entonces la multiplicación de dos cuaternios reales es igual a:*

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3)(q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3) \\ &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) i_0 \\ &\quad + (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2) i_1 \\ &\quad + (p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3) i_2 \\ &\quad + (p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1) i_3 \end{aligned}$$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Table 1: Tabla de Cayley.

Entonces  $\mathbb{R}^4$  se vuelve un álgebra real, asociativa, no conmutativa, llamada el álgebra cuaterniónica de los cuaternios reales. Notesé que la unidad imaginaria  $i$  no es igual a  $i_k$  que es el unidad del cuaternio.

Otra reescritura y definición del producto de dos cuaternios se muestra a continuación.

**Definición 4** Sea  $p, q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$

$$pq = p_0q_0 + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p} \times \vec{q}] \quad (6)$$

Para facilitar este cálculo, existe una tabla, llamada la tabla de Cayley donde se muestra qué productos pertenecen a tal cuádrupla. Es importante señalar que la componente  $i_k$  puede ser también los componentes de vectores unitarios  $i, j, k$ , pues así se muestran la tabla 1.

De manera resumida, se visualiza de la siguiente forma:

$$ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik \quad (7)$$

La siguiente operación a tratar es la del producto escalar por un cuaternio real. En este caso el escalar se multiplica entrada por entrada, con el cuaternio correspondiente.

Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ , entonces

$$\begin{aligned} \lambda q &= \lambda(q_0 + q_1i_1 + q_2i_2 + q_3i_3) \\ &= (\lambda q_0) + (\lambda q_1)i_1 + (\lambda q_2)i_2 + (\lambda q_3)i_3 \end{aligned}$$

En el álgebra cuaterniónica existe una operación llamada conjugación cuaterniónica, denotada por  $\bar{q}$ .

**Definición 5** Sea el cuaternio  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \vec{q} \\ \bar{q} &= q_0 - \vec{q} \end{aligned}$$

A esta operación se le llama conjugación cuaterniónica.

A simple vista se puede observar que la conjugación cuaterniónica afecta al cuaternio en la parte vectorial mientras que la parte escalar es inafectada. Debido a esto es importante señalar que a diferencia de los números complejos pues en estos sus complejos conjugados respectivamente, sólo se realiza la diferencia en el signo de las partes imaginarias, pero con los números reales esto nunca sucede.

Otro aspecto relevante respecto a los cuaternios reales es que dos cuaternios escalares iguales, tienen una parte imaginaria nula. La parte escalar de un cuaternio es igual a la semisuma de un cuaternio y de su conjugado, y en el caso de la parte vectorial es la semiresta de un cuaternio y su conjugado, he aquí otra analogía con los números complejos, donde para obtener la parte real de un número complejo se realiza la semisuma y, para la parte imaginaria se calcula la semi resta.

Sea  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ , entonces su parte escalar

$$Sc(q) = \frac{q + \bar{q}}{2}. \quad (8)$$

Sea  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ , entonces su parte vectorial

$$Vec(q) = \frac{q - \bar{q}}{2}. \quad (9)$$

Habiendo ya planteado las operaciones anteriores, se puede iniciar con una de las definiciones más importantes del álgebra cuaterniónica de los números reales, que es la norma euclideana o el módulo de un cuaternio.

**Definición 6** *La norma euclideana de un cuaternio es el número  $|q|$ , tal que su cuadrado es igual al producto cuaterniónico de dicho cuaternio por su conjugado, de modo que:*

$$|q|^2 = q\bar{q}. \quad (10)$$

Si la norma de un cuaternio es igual a uno, dicho cuaternio se denomina unitario [1]. El módulo, haciendo uso de la definición de producto cuaterniónico, se puede escribir de la siguiente forma:

$$|q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \sum_{k=0}^3 q_k^2$$

## 2.1 Propiedades de la Conjugación cuaterniónica

Sean dos elementos pertenecientes al álgebra de los cuaternios reales y un escalar real lambda:

$$q_1, q_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{R}) \quad y \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Las siguientes propiedades son válidas para conjugación cuaterniónica:

• **Propiedad C1.**

El conjugado del cuaternion conjugado es el mismo cuaternion.

Demostración

Sea  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$  y  $q = q_0 + \vec{q}$ . Por definición de conjugado,

$$\begin{aligned}\bar{\bar{q}} &= q_0 - \vec{q} \\ \bar{\bar{\bar{q}}} &= q_0 + \vec{q} \\ \bar{\bar{\bar{\bar{q}}}} &= q\end{aligned}$$

■

• **Propiedad C2.**

El conjugado de una suma de cuaternios es igual a la suma de los conjugados correspondientes:

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2.$$

Demostración

Sea  $q_1 = q_{10} + \vec{q}_1$ , y  $q_2 = q_{20} + \vec{q}_2$ . Por definición de suma de cuaternios, se clasifican las partes escalares y vectoriales:

$$\begin{aligned}q_1 + q_2 &= (q_{10} + \vec{q}_1) + (q_{20} + \vec{q}_2) \\ &= (q_{10} + q_{20}) + (\vec{q}_1 + \vec{q}_2).\end{aligned}$$

Ahora, teniendo la definición de un cuaternion conjugado, el producto de un cuaternion por un número real y agrupando nuevamente, resulta:

$$\begin{aligned}\overline{q_1 + q_2} &= (q_{10} + q_{20}) - (\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \\ &= (q_{10} - \vec{q}_1) + (q_{20} - \vec{q}_2) \\ &= \bar{q}_1 + \bar{q}_2.\end{aligned}$$

■

• **Propiedad C3.**

El conjugado de un producto de cuaternios es igual al producto de los conjugados en orden inverso:

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1.$$

Demostración

Sea  $q_1 = q_{10} + \vec{q}_1$ , y  $q_2 = q_{20} + \vec{q}_2$ , y por ende  $\bar{q}_1 = q_{10} - \vec{q}_1$  y  $\bar{q}_2 = q_{20} - \vec{q}_2$ , entonces

$$\begin{aligned}q_1 q_2 &= (q_{10} + \vec{q}_1)(q_{20} + \vec{q}_2) \\ &= q_{10} q_{20} + q_{10} \vec{q}_2 + q_{20} \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle + [\vec{q}_1 \times \vec{q}_2]\end{aligned}$$

Conjugando el producto anterior, se obtiene:

$$\overline{q_1 q_2} = q_{10} q_{20} - q_{10} \vec{q}_2 - q_{20} \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle - [\vec{q}_2 \times \vec{q}_1]$$

Ahora, se realiza el producto conjugado inverso de los cuaternios:

$$\begin{aligned} \overline{q_2} \overline{q_1} &= (q_{20} - \vec{q}_2)(q_{10} - \vec{q}_1) \\ &= q_{20} q_{10} - q_{20} \vec{q}_1 - q_{10} \vec{q}_2 - \langle \vec{q}_2, \vec{q}_1 \rangle + [\vec{q}_2 \times \vec{q}_1] \end{aligned}$$

Pero dada las propiedades del producto escalar y vectorial conocida del álgebra de vectores:

$$- \langle \vec{q}_2, \vec{q}_1 \rangle = - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle \quad \text{y} \quad [\vec{q}_2 \times \vec{q}_1] = -[\vec{q}_1 \times \vec{q}_2]$$

y la conmutatividad del producto de números reales, se tiene:

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}.$$

■

- **Propiedad C4.**

El conjugado del producto de un número real y un cuaternio es igual al producto del número real y el conjugado del mismo cuaternio:

$$\overline{\lambda q} = \lambda \overline{q}.$$

Demostración

Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $q \in \mathbb{R}$ . Entonces, en virtud de la definición de un cuaternio conjugado y producto escalar por un cuaternio, se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{\lambda q} &= \overline{\lambda(q_0 + \vec{q})} \\ &= \overline{\lambda q_0 + \lambda \vec{q}} \\ &= \lambda q_0 - \lambda \vec{q} \\ &= \lambda(q_0 - \vec{q}) \\ &= \lambda \overline{q} \\ \overline{\lambda q} &= \lambda \overline{q}. \end{aligned}$$

■

## 2.2 Propiedades relacionadas con la norma de los cuaternios

La norma de los cuaternios satisface las siguientes propiedades enlistadas:

- **Propiedad N1.**

La norma de la parte escalar de un cuaternio es menor o igual que la norma del cuaternio:

$$|Sc(q)| \leq |q|.$$

Demostración

Sea  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$  y  $q = q_0 + \vec{q}$ .

$$|Sc(q)| = |q_0| = \sqrt{q_0^2} \leq \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = |q|.$$

■

Es menor o igual porque se desconoce la parte escalar de la norma de un cuaternio, al desconocer si el escalar de un cuaternio es mayor o igual que una parte escalar; se puede concluir que el módulo es mayor o igual que una parte escalar.

- **Propiedad N2.**

La norma de la parte vectorial de un cuaternio es menor o igual que el módulo de un cuaternio:

$$|Vec(q)| \leq |q|.$$

Demostración

Sea  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$  y  $q = q_0 + \vec{q}$ .

$$\begin{aligned} |Vec(q)| &= |q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3| \\ &= \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \leq \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ &= |q|. \end{aligned}$$

■

Análogamente a la parte escalar, la norma de la parte vectorial de un cuaternio es menor o igual que la norma de un cuaternio porque se desconoce si la parte escalar es un valor mayor o igual que la norma de la parte vectorial del cuaternio a tratar.

- **Propiedad N3.**

La norma de los cuaternios satisface la desigualdad triangular:

$\forall q_1$  y  $q_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ , se cumple  $|q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$ .

Demostración

En virtud de la definición de norma de un cuaternio dada por la norma,

las propiedades de la conjugación cuaterniónica, se tiene:

$$\begin{aligned}
|q_1 + q_2|^2 &= (q_1 + q_2)(\overline{q_1 + q_2}) = (q_1 + q_2)(\overline{q_1} + \overline{q_2}) \\
&= q_1\overline{q_1} + q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1} \\
&= |q_1|^2 + q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1} + |q_2|^2 \\
&= |q_1|^2 + q_1\overline{q_2} + \overline{q_1q_2} + |q_2|^2.
\end{aligned}$$

Porque:  $q_2\overline{q_1} = q_1\overline{q_2}$ . Pero sabe que la parte escalar de un cuaternio es igual a la semisuma del cuaternio y de su conjugado:

$$Sc(q) = \frac{q + \overline{q}}{2}.$$

De modo que:

$$\begin{aligned}
Sc(q_1\overline{q_2}) &= \frac{q_1\overline{q_2} + \overline{q_1\overline{q_2}}}{2} \\
2Sc(q_1\overline{q_2}) &= q_1\overline{q_2} + \overline{q_1\overline{q_2}}.
\end{aligned}$$

Así resulta que:

$$\begin{aligned}
|q_1 + q_2|^2 &= |q_1|^2 + q_1\overline{q_2} + \overline{q_1\overline{q_2}} + |q_2|^2 \\
&= |q_1|^2 + 2Sc(q_1\overline{q_2}) + |q_2|^2.
\end{aligned}$$

Por otra parte, las propiedades de la conjugación cuaterniónica y la aplicación de la propiedad N1, se cumple que:

$$|2Sc(q_1\overline{q_2})| \leq 2|q_1\overline{q_2}| = 2|q_1||\overline{q_2}| = 2|q_1||q_2|.$$

Por ende, haciendo uso de las propiedades N1 y N2, y mayorando el término mixto  $2Sc(q_1\overline{q_2})$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
|q_1 + q_2|^2 &= |q_1|^2 + 2Sc(q_1\overline{q_2}) + |q_2|^2 \leq |q_1|^2 + 2|q_1||q_2| + |q_2|^2 \\
|q_1 + q_2|^2 &\leq |q_1|^2 + 2|q_1||q_2| + |q_2|^2.
\end{aligned}$$

Extrayendo raíces a ambos miembros de la desigualdad:

$$|q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|.$$

■

• **Propiedad N4.**

$\forall q_1$  y  $q_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$  se cumple:

$$||q_1| - |q_2|| \leq |q_1 - q_2|.$$

Demostración

Usando la propiedad de la desigualdad del triángulo:

$$-|q_1 - q_2| \leq |q_1| - |q_2| \leq |q_1 q_2|$$

donde:  $|q_2| = |q_2 + q_1 - q_1|$

$$\begin{aligned} |q_2 + q_1 - q_1| &\leq |q_2 - q_1| + |q_1| \\ |q_2| - |q_1| &\leq |q_2 - q_1| = |q_1 - q_2| \\ |q_1| - |q_2| &\geq -|q_1 - q_2| \\ ||q_1| - |q_2|| &\leq |q_1 - q_2| \end{aligned}$$

■

• **Propiedad N5.**

El cuadrado de la norma euclidiana de un cuaternio es igual al cuadrado de la norma euclideana de su conjugado:

$$|q|^2 = |\bar{q}|^2.$$

Demostración

Por la definición del módulo:

$$|q|^2 = q\bar{q}.$$

Aplicando la definición del producto cuaterniónico, las propiedades de suma y multiplicación por un escalar, resulta que:

$$|q|^2 = q\bar{q} = (q_0 + \vec{q})(q_0 - \vec{q}) = (q_0)^2 - \vec{q}\vec{q} = (q_0)^2 + \langle \vec{q}\vec{q} \rangle - [\vec{q} \times \vec{q}].$$

Recordando las expresiones de los productos escalar y vectorial en forma coordenada, se obtiene que:

$$|q|^2 = q\bar{q} = q_0^2 + \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle - [\vec{q} \times \vec{q}] = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2.$$

Por otra parte, basándose en la misma definición, la norma de un cuaternio conjugado, cumple que:

$$|q|^2 = \bar{q}q = (q_0 - \vec{q})(q_0 + \vec{q}).$$

A partir del empleo de razonamientos análogos a los utilizados en la primera parte de la demostración, resulta:

$$|q|^2 = \bar{q}q = q_0^2 + \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle - [\vec{q} \times \vec{q}] = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2.$$

Por tanto:

$$|q| = q\bar{q} = |\bar{q}|^2 = \bar{q}q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2.$$

■



Es importante ver que la norma de un cuaternio y un cuaternio conjugado tienen el mismo resultado que son números reales. Si:

$$|q| = q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,$$

entonces si el cuaternio no es nulo, su norma no se anula, de modo que el inverso de un cuaternio no nulo, como se visualiza a continuación:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{\bar{q}}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (12)$$

Lo anterior tiene estrecha relación con el hecho de que el álgebra de los cuaternios reales no constituye un campo propiamente sino lo que se denomina un cuasi campo o un campo no conmutativo por cuanto (11) define el elemento inverso para la multiplicación [1].

Otro dato importante es que el producto de un cuaternio distinto de cero por su inverso, es igual a la unidad real. Considerando la propiedad C4 y la referida al producto de un número real y un cuaternio en conjunto con la definición del inverso de un cuaternio no nulo, las relaciones que surgen se muestran enseguida:

$$qq^{-1} = q \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{1}{|q|^2} q\bar{q} = \frac{1}{|q|^2} |q|^2 = 1.$$

- **Propiedad N6.**

La norma del inverso de un cuaternio no nulo es igual al inverso de la norma:

$$|q^{-1}| = |q|^{-1}.$$

Demostración:

De acuerdo con la definición de un inverso de un cuaternio no nulo dada por (11), considerando que la norma de un cuaternio es igual a la norma de su conjugado y aplicando propiedades del cociente de potencias de igual base, se tiene:

$$|q^{-1}| = \left| \frac{\bar{q}}{|q|^2} \right| = \frac{|\bar{q}|}{|q|^2} = \frac{|q|}{|q|^2} = |q|^{-1}$$

■

- **Propiedad N7.**

La norma del producto de dos cuaternios  $q_1$  y  $q_2$  es igual al producto de las normas de los cuaternios correspondientes, o sea:

$$|q_1 q_2| = |q_1| |q_2|$$

Demostración:

De la definición de módulo y las propiedades C3 y C4, así como la definición de multiplicación de cuaternios por números reales, permiten expresar que:

$$|q_1 q_2|^2 = q_1 q_2 \bar{q}_1 \bar{q}_2 = q_1 q_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1 = q_1 |q_2|^2 \bar{q}_1 = q_1 \bar{q}_1 |q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2$$

Así:

$$|q_1 q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2$$

Extrayendo raíces:

$$\begin{aligned}\sqrt{|q_1 q_2|^2} &= \sqrt{|q_1|^2} \sqrt{|q_2|^2} \\ |q_1 q_2| &= |q_1| |q_2|.\end{aligned}$$

■

Existen otras propiedades de la norma cuaterniónica para los cuaternios reales, estas se enlistan a continuación:

$$|q_1 q_2|^2 = q_1 q_2 \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 \overline{q_2} \overline{q_1} = q_1 |q_2|^2 \overline{q_1} = |q_2|^2 q_1 \overline{q_1} = |q_2|^2 |q_1|^2$$

A continuación, se muestra otra operación del álgebra cuaterniónica en cuaternios reales llamada Automorfismo. El automorfismo  $Z_{\mathbb{H}}$  puede ser representado como un producto

$$Z_{\mathbb{H}} = Z_1 Z_2 Z_3 = Z_1 Z_3 Z_2 = \dots = Z_3 Z_2 Z_1$$

de operaciones  $Z_1, Z_2, Z_3$ :  $Z_k$  cambia la unidad imaginaria  $i_k$  a  $-i_k$ ,  $Z_1 [q] := q_0 - q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3$ , etc. En ocasiones se le llama  $Z_k$  "k -enésima conjugación parcial". Son llamadas involuciones lineales,  $Z_k (p + q) = Z_k p + Z_k q$ ,  $Z_k [Z_k [q]] = q$ , pero  $Z_k (p * q) = Z_k (p) * Z_k (q)$ . Así cada  $Z_k$  es un automorfismo (no un antiautomorfismo) de  $\mathbb{H}$ .

El automorfismo de un cuaternio en una de sus componentes se puede ver de la siguiente manera, por ejemplo, en  $Z_1$

$$\begin{aligned}Z_1(q) &= Z_1(q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3) \\ &= q_0 - q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3.\end{aligned}$$

Si se aplica el automorfismo aplicado a un cuaternio al que ya se aplicó un automorfismo, se obtendrá el mismo cuaternio; se toma nuevamente como ejemplo  $Z_1$ ,

$$\begin{aligned}Z_1(Z_1(q)) &= Z_1(Z_1(q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3)) \\ &= Z_1(q_0 - q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3) \\ &= q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3.\end{aligned}$$

En el caso del automorfismo aplicado a una suma de dos cuaternios, es igual a la suma de los cuaternios con el automorfismo aplicado previamente

$$\begin{aligned}Z_1(p + q) &= Z_1(p) + Z_1(q) \\ &= Z_1(p_0 + p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3) + Z_1(q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3) \\ &= (p_0 - p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3) + (q_0 - q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3) \\ &= (p_0 + q_0) - (p_1 + q_1) i_1 + (p_2 + q_2) i_2 + (p_3 + q_3) i_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_1(p) + Z_1(q) &= Z_1(p + q) \\
&= Z_1((p_0 + p_1i_1 + p_2i_2 + p_3i_3) + (q_0 + q_1i_1 + q_2i_2 + q_3i_3)) \\
&= Z_1((p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i_1 + (p_2 + q_2)i_2 + (p_3 + q_3)i_3) \\
&= (p_0 + q_0) - (p_1 + q_1)i_1 + (p_2 + q_2)i_2 + (p_3 + q_3)i_3.
\end{aligned}$$

Ahora, el automorfismo en el producto cuaterniónico se puede emplear a un producto de dos cuaternios, o bien, a cada cuaternio pero, con orden inverso, y luego proseguir a realizar la multiplicación, nuevamente se aplicará  $Z_1$

$$\begin{aligned}
Z_1(pq) &= Z_1(q) * Z_1(p) \\
&= Z_1((p_0 + p_1i_1 + p_2i_2 + p_3i_3)(q_0 + q_1i_1 + q_2i_2 + q_3i_3)) \\
&= Z_1((p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\
&\quad + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i_1 \\
&\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)i_2 \\
&\quad + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)i_3) \\
&= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\
&\quad - (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i_1 \\
&\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)i_2 \\
&\quad + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)i_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_1(q) * Z_1(p) &= Z_1(pq) \\
&= Z_1(p_0 + p_1i_1 + p_2i_2 + p_3i_3) * Z_1(q_0 + q_1i_1 + q_2i_2 + q_3i_3) \\
&= (q_0 - q_1i_1 + q_2i_2 + q_3i_3) * (p_0 - p_1i_1 + p_2i_2 + p_3i_3) \\
&= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\
&\quad - (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i_1 \\
&\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)i_2 \\
&\quad + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)i_3.
\end{aligned}$$

Las operaciones previas pueden ser aplicadas a  $Z_2$  y  $Z_3$  de igual manera.

## 2.3 Ecuaciones lineales y cuadráticas con coeficientes reales

### 2.3.1 Ecuaciones cuaterniónicas de primer grado

La ecuación del tipo:

$$aq + bq_1 = cq_2,$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$  constituye un caso simple de ecuación cuaterniónica de primer grado con coeficientes reales. Utilizando las propiedades de suma y resta de cuaternios, así como el producto de cuaternios reales, se llega a una solución:

$$q = \frac{c}{a}q_2 - \frac{b}{c}q_1.$$

Una reescritura se presenta a continuación:

$$q = \frac{c}{a}q_{20} - \frac{b}{c}q_{10} + \left(\frac{c}{a}q_{21} - \frac{b}{c}q_{11}\right)e_1 + \left(\frac{c}{a}q_{22} - \frac{b}{c}q_{12}\right)e_2 + \left(\frac{c}{a}q_{23} - \frac{b}{c}q_{13}\right)e_3.$$

Y la solución es un tercer cuaternio con parte escalar y vectorial:

$$\begin{aligned} Sc(q) &= \frac{c}{a}q_{20} - \frac{b}{c}q_{10}, \\ Vec(q) &= \left(\frac{c}{a}q_{21}\right) - \left(\frac{b}{c}q_{11}\right)e_1 + \left(\frac{c}{a}q_{22} - \frac{b}{c}q_{12}\right)e_2 + \left(\frac{c}{a}q_{23} - \frac{b}{c}q_{13}\right)e_3, \end{aligned}$$

Un conjunto de soluciones particulares se pueden obtener, teniendo en cuenta el carácter puramente escalar vectorial de los cuaternios  $q_1$  y  $q_2$  [1]. En el dado caso de que  $q_2$  sea un escalar puro, resulta:

$$q = \frac{c}{a}q_{20} - \frac{b}{c}q_{10} - \frac{b}{c}q_{11}e_1 - \frac{b}{c}q_{12}e_2 - \frac{b}{c}q_{13}e_3.$$

### 2.3.2 Ecuaciones cuadráticas cuaterniónicas en $\mathbb{H}(\mathbb{R})$

Sea la ecuación siguiente:

$$q^2 - 2q_{10}q + |q_1|^2 \tag{13}$$

Por su estructura, la ecuación es de segundo grado, con la particularidad de que la incógnita  $q$  contituye una variable cuaterniónica. Por tanto, se está en presencia de una ecuación cuadrática con su respectiva incógnita cuaterniónica  $q$  [1]. Por esta razón la ecuación tiene dos soluciones, las cuales se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{10} + \vec{q}_{11}, \\ q_2 &= q_{10} - \vec{q}_{11}. \end{aligned}$$

Para ello se sustituyen estas soluciones en la ecuación anterior y se hace uso de las propiedades vista anteriormente. Al sustituir  $q_1$ , se obtiene:

$$q^2 - 2q_{10}q + |q_1|^2 = (q_{10} + \vec{q}_{11})(q_{10} + \vec{q}_{11}) - 2q_{10}(q_{10} + \vec{q}_{11}) + (q_{10} + \vec{q}_{11})(\overline{q_{10} + \vec{q}_{11}})$$

Haciendo las operaciones en la izquierda, resulta:

$$q_{10}^2 + 2q_{10}\vec{q}_{11} + \vec{q}_{11}\vec{q}_{11} - 2q_{10}^2 - 2q_{10}\vec{q}_{11} + q_{10}^2 + q_{10}\vec{q}_{11} - q_{10}\vec{q}_{11} - \vec{q}_{11}\vec{q}_{11}.$$

Tal y como se observa al reducir términos semejantes, la expresión se anula, lo cual prueba la ecuación planteada en un inicio, satisfaciendo con  $q_1$ . Análogamente se verifica con  $q_2$ .

A partir de esto, una serie de proposiciones relacionadas surgen.

**Proposición 1** *Un cuaternio cualquiera constituye un vector diferente del vector nulo si y sólo si su cuadrado es un número real diferente de cero y negativo.*

Demostración

Sea un cuaternio cualquiera  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ . Siendo su cuadrado:

$$q^2 = (q_0 + \vec{q})(q_0 + \vec{q}) = q_0^2 - |\vec{q}|^2 + 2q_0\vec{q}$$

En caso en que el cuaternio sea un vector puro no nulo; su parte escalar es cero y se obtiene:

$$q = \vec{q} \neq 0 : q^2 = -|\vec{q}|^2 \neq 0.$$

Sea ahora  $q^2 < 0 \in \mathbb{R}$ . Sigue esto:

$$2q_0\vec{q} = q^2 - q_0^2 + |\vec{q}|^2.$$

La expresión anterior se anula en dos casos: si  $q_0 = 0$  en cuyo caso queda demostrada la proposición; si  $\vec{q} = 0$ , de donde resulta que:

$$q_0^2 = q^2 \quad y \quad q^2 = q_0^2.$$

Aunque esto contradice el hecho de suponer a  $q^2 < 0 \in \mathbb{R}$ . Esto último es falso.

■

**Proposición 2** *Un cuaternio diferente de cero constituye un número real si y sólo si  $q^2$  es un número real positivo.*

Demostración

Sea  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ , se calcula su cuadrado:

$$q^2 = (q_0 + \vec{q})(q_0 + \vec{q}) = q_0^2 - |\vec{q}|^2 + 2q_0\vec{q}$$

donde  $q^2 > 0$ .

Si la parte escalar  $q_0 = 0$ , entonces

$$q^2 = -|\vec{q}|^2 \neq 0$$

donde  $q^2$  es un vector puro, cumple que sea un número real diferente a cero pero, contradice que sea positivo pues siempre se obtiene la parte vectorial negativa.

Otro caso es que  $q^2 < 0 \in \mathbb{R}$ ; sin embargo contradice la proposición de que el número real sea positivo, y si el vector es  $\vec{q} = 0$  y  $q_0 = 0$  resulta  $q_0^2 = q^2$ .

■

**Proposición 3** Una ecuación cuadrática en  $\mathbb{H}(\mathbb{R})$  con coeficientes reales tiene una solución real, dos soluciones reales o un conjunto de soluciones tales que las componentes las componentes del cuaternio que resulta satisfacen la ecuación de una esfera en  $\mathbb{R}^3$ .

Demostración

Sea la ecuación cuadrática:

$$q^2 + 2bq + c = 0 \quad b, c \in \mathbb{R} \quad (14)$$

Se completa el cuadrado:

$$(q + b)(q + b) = (q + b)^2 = b^2 - c$$

Si el término derecho es un número real positivo, entonces de la proposición 2 se deduce que la raíz de la ecuación cuadrática cuaterniónica (13) es el número:

$$q = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.$$

Si  $c = 0$  se tienen soluciones  $q = 0$  y  $q = -2b$ . Si  $b^2 = c$ , la ecuación tiene una sola solución  $q = -b$  [1].

Si es negativo, según la proposición 1, se tiene que cumplir que el cuaternio  $q + b$  es un cuaternio puramente imaginario con módulo que cumple:

$$(q + b)^2 = -|\vec{v}|^2 = b^2 - c, \quad \text{de donde:} \quad |\vec{v}|^2 = c - b^2, \quad |\vec{v}| = \sqrt{c - b^2}. \quad (15)$$

Y por cuanto un vector de  $\mathbb{R}^3$  tiene tres componentes  $v_1, v_2, v_3$ , la expresión anterior puede reescribirse en la forma:

$$|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = c - b^2.$$

Entonces, la ecuación (14) constituye la ecuación de una esfera tridimensional con radio igual a el valor de la raíz cuadrada de  $c - b^2$ .

■

## 2.4 Álgebra cuaterniónica en los números complejos

Si en la definición de cuaternios reales se consideran que cada una de las componentes de la cuádrupla  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ , constituyen números complejos ( $q_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ) y se introduce una regla adicional de multiplicación correspondiente, llegando así a la noción de cuaternio complejo [1]. La importancia del uso de los números complejos, es que este conjunto al definirle operaciones es considerado como un campo [4].

Este cuaternio complejo se define a continuación.

**Definición 7** Un cuaternio  $q$ , se denomina complejo si tiene la forma

$$q = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 = \sum_{k=0}^3 q_k e_k, \quad (q_k \in \mathbb{C}), \quad (16)$$

donde  $q_k$  tendrán su parte real e imaginaria al ser números complejos.

Si la definición anterior cumple con la regla de conmutación para  $i$ :

$$e_k i = i e_k, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Por tanto, la unidad imaginaria  $i$  conmuta con el resto de las unidades imaginarias cuaterniónicas  $(e_1, e_2, e_3)$ . El conjunto de los cuaternios complejo o el Álgebra de Cuaternios Complejos se denota por  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ .

La diferencia esencial entre  $\mathbb{H}(\mathbb{R})$  y  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  es que en la última existen dos formas de conjugación: la conjugación compleja y la conjugación cuaterniónica.

Si se tiene un cuaternio  $q$ , donde se alteran sus componentes por las correspondientes componentes complejas conjugadas y su parte vectorial por la opuesta, se denomina cuaternio complejo conjugado de  $q$ :

$$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$

entonces el cuaternio complejo conjugado se define de la siguiente forma:

$$q^* = q_0^* e_0 + q_1^* e_1 + q_2^* e_2 + q_3^* e_3.$$

Para el caso del cuaternio conjugado  $q$ , se cambia el signo a la parte vectorial:

$$\bar{q} = q_0 e_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3$$

**Definición 8** *Se dice que dos elementos  $q_1$  y  $q_2$  no nulos, constituyen divisores de cero si su producto  $q_1 q_2$  es igual a cero.*

Sean el cuaternio complejo  $q = 1 + i e_1$ . Entonces, el cuaternio conjugado correspondiente es  $\bar{q} = 1 - i e_1$ . Distintos de cero. El producto de ambos resulta, aplicando las reglas de multiplicación, la unidad imaginaria  $i$ , donde  $i^2 = -1$ , y las propiedades correspondientes:

$$q \bar{q} = (1 + i e_1)(1 - i e_1) = 1 - i e_1 + i e_1 - i e_1 i e_1 = 1 - i^2 e_1 e_1 = 1 - 1 = 0$$

El resultado anterior significa el producto de un cuaternio complejo conjugado por su cuaternio complejo conjugado, distintos de cero, es cero. Esto es imposible en los reales  $\mathbb{R}$ , en los complejos  $\mathbb{C}$  y en el álgebra de los cuaternios reales  $\mathbb{H}(\mathbb{R})$  pues en ellos, el producto de dos elementos distintos de cero es distinto de cero. Esto se puede ver el previa definición del módulo de un cuaternio real.

Esto apenas ilustra un primer acercamiento en como  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  los resultados comentado son curiosos, algo semejante sucede al emplear matrices. El resultado obtenido en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  está en correspondencia con el conocido teorema de Ferdinand Georg Frobenius según el cual, las únicas álgebras de división sobre  $\mathbb{R}$  las constituyen el propio  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}(\mathbb{R})$  [1].

### 2.4.1 Propiedades de la conjugación cuaterniónica en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$

La conjugación cuaterniónica en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  (denotada por una barra encima del elemento a conjugar) cumple las siguientes propiedades enlistadas:

- **Propiedad C1:**  $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}$
- **Propiedad C2:**  $\overline{\overline{q}} = q$
- **Propiedad C3:**  $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$

Como se puede ver estas propiedades son iguales a las que se aplican  $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ , por lo que su demostración es la misma a la realizada previamente.

### 2.4.2 Propiedades de la conjugación compleja en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$

La conjugación compleja (denotada por un asterisco encima del elemento a conjugar) cumple estas propiedades:

- **Propiedad 1C:**  $(q_1 q_2)^* = q_1^* q_2^*$

Demostración

Sea  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  donde:

$$q = [Re(q_0) + iIm(q_0)] + [Re(q_1) + iIm(q_1)] + [Re(q_2) + iIm(q_2)] + [Re(q_3) + iIm(q_3)]$$

Entonces, aplicando la conjugación compleja y la definición del producto de dos cuaternios:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= q_{10} q_{20} + q_{10} \vec{q}_2 + q_{20} \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle + [\vec{q}_1 \times \vec{q}_2] \\ &= q_{10}^* q_{20}^* + q_{10}^* \vec{q}_2^* + q_{20}^* \vec{q}_1^* - \langle \vec{q}_1^*, \vec{q}_2^* \rangle + [\vec{q}_1^* \times \vec{q}_2^*] \\ &= (q_1 q_2)^* &= (q_1^*)(q_2^*) \\ &= [q_{10}^* - \vec{q}_1^*][q_{20}^* - \vec{q}_2^*] \\ &= ([Re(q_{10}) - iIm(q_{10})] + [Re(q_1) - iIm(q_1)] \\ &\quad + [Re(q_2) - iIm(q_2)] + [Re(q_3) - iIm(q_3)]) \\ &\quad ([Re(q_{20}) - iIm(q_{20})] + [Re(q_1) - iIm(q_1)] \\ &\quad + [Re(q_2) - iIm(q_2)] + [Re(q_3) - iIm(q_3)]) \\ &= q_1^* q_2^* \end{aligned}$$

■



• **Propiedad 2C:**  $(q^*)^* = q$

Demostración

Sea  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ , donde  $q = q_0 + \vec{q}$

$$\begin{aligned}
q &= ([Re(q_0) + iIm(q_0)] + [Re(q_1) + iIm(q_1)] \\
&\quad + [Re(q_2) + iIm(q_2)] + [Re(q_3) + iIm(q_3)]) \\
q^* &= ([Re(q_0) + iIm(q_0)] + [Re(q_1) + iIm(q_1)] \\
&\quad + [Re(q_2) + iIm(q_2)] + [Re(q_3) + iIm(q_3)])^* \\
&= ([Re(q_0) - iIm(q_0)] + [Re(q_1) - iIm(q_1)] \\
&\quad + [Re(q_2) - iIm(q_2)] + [Re(q_3) - iIm(q_3)]) \\
(q^*)^* &= ([Re(q_0) - iIm(q_0)] + [Re(q_1) - iIm(q_1)] \\
&\quad + [Re(q_2) - iIm(q_2)] + [Re(q_3) - iIm(q_3)])^* \\
&= ([Re(q_0) + iIm(q_0)] + [Re(q_1) + iIm(q_1)] \\
&\quad + [Re(q_2) + iIm(q_2)] + [Re(q_3) + iIm(q_3)]) \\
(q^*)^* &= q
\end{aligned}$$

■

• **Propiedad 3C:**  $(q_1 + q_2)^* = q_1^* + q_2^*$

Demostración

Sea  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  donde:  $q_1 = q_{10} + \vec{q}_1$ ,  $q_2 = q_{20} + \vec{q}_2$

$$\begin{aligned}
(q_1 + q_2) &= (q_{10} + q_{20}) + (\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \\
&= [(Re(q_{10}) + Re(q_{20})) + (iIm(q_{10}) + iIm(q_{20}))] + \\
&\quad [(Re(q_{11}) + Re(q_{21})) + (iIm(q_{11}) + iIm(q_{21}))] + \\
&\quad [(Re(q_{12}) + Re(q_{22})) + (iIm(q_{12}) + iIm(q_{22}))] + \\
&\quad [(Re(q_{13}) + Re(q_{23})) + (iIm(q_{13}) + iIm(q_{23}))] \\
(q_1 + q_2)^* &= (q_{10} + q_{20})^* + (\vec{q}_1 + \vec{q}_2)^* \\
&= [(Re(q_{10}) + Re(q_{20})) - (iIm(q_{10}) + iIm(q_{20}))] + \\
&\quad [(Re(q_{11}) + Re(q_{21})) - (iIm(q_{11}) + iIm(q_{21}))] + \\
&\quad [(Re(q_{12}) + Re(q_{22})) - (iIm(q_{12}) + iIm(q_{22}))] + \\
&\quad [(Re(q_{13}) + Re(q_{23})) - (iIm(q_{13}) + iIm(q_{23}))] \\
&= [(Re(q_{10}) - iIm(q_{10})) + (Re(q_{11}) - iIm(q_{11})) \\
&\quad + (Re(q_{12}) - iIm(q_{12})) + (Re(q_{13}) - iIm(q_{13}))] \\
&\quad [(Re(q_{20}) - iIm(q_{20})) + (Re(q_{21}) - iIm(q_{21})) \\
&\quad + (Re(q_{22}) - iIm(q_{22})) + (Re(q_{23}) - iIm(q_{23}))] \\
(q_1 + q_2)^* &= q_1^* + q_2^*
\end{aligned}$$

■

### 2.4.3 Propiedades de la conjugación compleja y cuaterniónica

- **Propiedad 1:**  $(\overline{q_1 q_2})^* = \overline{q_2^*} q_1^*$

Demostración

Sea  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  donde:  $q_1 = q_{10} + \vec{q}_1$ ,  $q_2 = q_{20} + \vec{q}_2$

$$\begin{aligned}
 q_1 q_2 &= q_{10} q_{20} + q_{10} \vec{q}_2 + q_{20} \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle + [\vec{q}_1 \times \vec{q}_2] \\
 (q_1 q_2)^* &= q_{10}^* q_{20}^* + q_{10}^* \vec{q}_2^* + q_{20}^* \vec{q}_1^* - \langle \vec{q}_1^*, \vec{q}_2^* \rangle + [\vec{q}_1^* \times \vec{q}_2^*] \\
 (\overline{q_1 q_2})^* &= q_{20}^* q_{10}^* - q_{20}^* \vec{q}_1^* - q_{10}^* \vec{q}_2^* - \langle \vec{q}_2^*, \vec{q}_1^* \rangle + [\vec{q}_2^* \times \vec{q}_1^*] \\
 &= (q_{20}^* - \vec{q}_2^*)(q_{10}^* - \vec{q}_1^*) \\
 &= \overline{q_2^*} q_1^* \\
 (\overline{q_1 q_2})^* &= \overline{q_2^*} q_1^*
 \end{aligned}$$

■

**Definición 9** Sea un cuaternio complejo  $q$ , entonces su norma o módulo un número real:

$$|q|_c = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2i \text{Vec}(\alpha \overline{\beta}) \quad (17)$$

donde:  $\alpha = (Re(q_0) + Re(q_1) + Re(q_2) + Re(q_3))^2$   
 $\beta = |iIm(q_0) + iIm(q_1)e_1 + iIm(q_2)e_2 + iIm(q_3)e_3|^2$

$$\begin{aligned}
 q\overline{q}^* &= ([Re(q_0) + iIm(q_0)] + [Re(q_1) + iIm(q_1)] + \\
 &\quad [Re(q_2) + iIm(q_2)] + [Re(q_3) + iIm(q_3)]) \\
 &\quad ([Re(q_0) - iIm(q_0)] - [Re(q_1) - iIm(q_1)] - \\
 &\quad [Re(q_2) - iIm(q_2)] - [Re(q_3) - iIm(q_3)]) \\
 &= (Re(q_0) + Re(q_1) + Re(q_2) + Re(q_3))^2 + \\
 &\quad (iIm(q_0) + iIm(q_1) + iIm(q_2) + iIm(q_3))^2 \\
 &\quad - 2i((Re(q_0) + Re(q_1) + Re(q_2) + Re(q_3)) \\
 &\quad (iIm(q_0) + iIm(q_1) + iIm(q_2) + iIm(q_3))) \\
 q\overline{q}^* &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2i \text{Vec}(\alpha \overline{\beta})
 \end{aligned}$$

### 2.5 Representaciones de los cuaternios reales

A pesar de las representaciones antes mostradas, existen otras formas de representar los cuaternios reales. Ahora, inicialmente los escalares y vectores tienen una naturaleza diferente y debido a esto no pueden ser sumados entre sí. Sin embargo, la suma cuaterniónica permite sumar escalares y vectores sin que exista una pérdida en sus naturalezas propias.

Sea  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $p = p_0 + \vec{p}$ ,  $q = q_0 + \vec{q}$ . Entonces el producto cuaterniónico  $pq$

se presenta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
pq &= \left( a_0 b_0 - \sum_{k=1}^3 p_k q_k \right) i_0 + \\
&+ p_0 \sum_{k=1}^3 q_k i_k + q_0 \sum_{k=1}^3 p_k i_k + \\
&+ \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} i_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} i_3 \right)
\end{aligned}$$

Es importante recordar el producto escalar y vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y, realizando los cálculos correspondientes, se obtiene la ecuación vista en la Definición 4.

En esta ecuación, se tienen varias multiplicaciones: una de dos escalares, de vectores por escalares, y dos tipos de producto entre vectores. En particular esto dice que

$$\begin{aligned}
Sc(pq) &= Sc(p)Sc(q) - \langle Vec(a); Vec(b) \rangle; \\
Vec(pq) &= Sc(p)Vec(q) + Sc(q)Vec(p) + [Vec(p); Vec(q)]
\end{aligned}$$

Un caso específico es si  $a_0 = b_0 = 0$ :

$$\vec{p}\vec{q} = -\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p} \times \vec{q}] \quad (18)$$

Observando la ecuación anterior el lector puede ver poque el producto escalar y el vectorial en  $\mathbb{R}^3$  carece de casi todas las propiedades aritméticas de reales y complejos.

A continuación se enlistaran algunas proposiciones que surgen a partir de las ecuaciones vistas.

**Proposición 4** *Producto escalar y vectorial de vectores, y multiplicación cuaterniónica.*

Sea  $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ . Entonces

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = -\frac{1}{2}(\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p}); \quad [\vec{p} \times \vec{q}] = \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{q} - \vec{q}\vec{p}) \quad (19)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle &= (\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p}) \\
 &= (-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p}, \vec{q}]) + (-(-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p}, \vec{q}])) \\
 &= -2\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle \\
 &= -\frac{1}{2}(\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p})
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 [\vec{p} \times \vec{q}] &= (\vec{p}\vec{q} - \vec{q}\vec{p}) \\
 &= (-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p}, \vec{q}]) - (-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p}, \vec{q}]) \\
 &= 2[\vec{p}, \vec{q}] \\
 &= \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{q} - \vec{q}\vec{p})
 \end{aligned}$$

■

**Proposición 5** *Ortogonalidad y colinealidad de vectores en términos cuaterniónicos.*  
 Sea  $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ . Entonces

$$\vec{p} \perp \vec{q} \iff (\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p}) = 0; \quad \vec{p} \parallel \vec{q} \iff (\vec{p}\vec{q} - \vec{q}\vec{p}) = 0 \quad (20)$$

Demostración

Si  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  son perpendiculares ( $\theta = 90$ ), por definición de ortogonalidad y el producto escalar

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta = 0$$

Haciendo uso de la conmutatividad en el producto escalar, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \vec{p} \perp \vec{q} &= (-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p}, \vec{q}]) + (-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle - [\vec{p}, \vec{q}]) \\
 &= -2\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle \\
 &= -2\left(-\frac{1}{2}(\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p})\right) \\
 &= (\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

Si  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  son paralelos o colineales ( $\theta = 0$ ), entonces su producto cruz

$$[\vec{p} \times \vec{q}] = |\vec{p}||\vec{q}| \sin \theta = 0$$

Teniendo en consideración las propiedades de anticonmutatividad y el producto

cruz

$$\begin{aligned}
\vec{p} \parallel \vec{q} &= (-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p}, \vec{q}]) - (-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle - [\vec{p}, \vec{q}]) \\
&= [\vec{p}, \vec{q}] + [\vec{p}, \vec{q}] \\
&= 2[\vec{p}, \vec{q}] \\
&= 2\left(\frac{1}{2}(\vec{p}\vec{q} - \vec{q}\vec{p})\right) \\
&= \vec{p}\vec{q} - \vec{q}\vec{p} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

**Proposición 6** *Vectores dobles y producto de vectores mixtos, y multiplicación cuaterniónica.*

Sea  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} = \frac{1}{4}(\vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}\vec{a} - \vec{b}\vec{a}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}\vec{b}) \quad (21)$$

$$(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) := \langle [\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c} \rangle = \frac{1}{4}(\vec{b}\vec{a}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}\vec{b}) \quad (22)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} &= \frac{1}{2}([\vec{a} \times \vec{b}]\vec{c} - \vec{c}[\vec{a} \times \vec{b}]) \\
&= \frac{1}{4}((\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})\vec{c} - \vec{c}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})) \\
&= \frac{1}{4}(\vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}\vec{a} - \vec{b}\vec{a}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}\vec{b})
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\langle [\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c} \rangle &= -\frac{1}{2} \left( [\vec{a} \times \vec{b}] \vec{c} + \vec{c} [\vec{a} \times \vec{b}] \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \right) \vec{c} + \vec{c} \left( \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \right) \right) \\
&= -\frac{1}{4} \left( (\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \vec{c} + \vec{c} (\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( (\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}) \vec{c} + \vec{c} (\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \vec{b}\vec{a}\vec{c} - \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}\vec{a} - \vec{c}\vec{a}\vec{b} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \vec{b}\vec{a}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}\vec{b} \right)
\end{aligned}$$

■

**Proposición 7** *Propiedades del producto vectorial vía operaciones cuaterniónicas.*  
Sea  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces

$$[\vec{a} \times \vec{a}] = 0 \quad (23)$$

$$[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = [\vec{a} \times \vec{c}] + [\vec{b} \times \vec{c}] \quad (24)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad [\lambda \vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \times \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}] \quad (25)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
[\vec{a} \times \vec{a}] &= \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{a} - \vec{a}\vec{a}) \\
&= \frac{1}{2} (0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] &= \frac{1}{2} \left( (\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} - \vec{c} (\vec{a} + \vec{b}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{a} - \vec{c}\vec{b} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \vec{a}\vec{c} - \vec{c}\vec{a} + \vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( (\vec{a}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}) + (\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b}) \right) \\
&= \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}) + \frac{1}{2} (\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b}) \\
&= [\vec{a} \times \vec{c}] + [\vec{b} \times \vec{c}]
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
[\lambda \vec{a} \times \vec{b}] &= \frac{1}{2} (\lambda \vec{a} \vec{b} - \vec{b} \lambda \vec{a}) \\
&= \frac{1}{2} (\lambda (\vec{a} \vec{b} - \vec{b} \vec{a})) \\
&= \frac{1}{2} (\vec{a} \lambda \vec{b} - \lambda \vec{b} \vec{a}) \\
&= [\vec{a} \times \lambda \vec{b}]
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
[\lambda \vec{a} \times \vec{b}] &= \frac{1}{2} (\lambda \vec{a} \vec{b} - \vec{b} \lambda \vec{a}) \\
&= \frac{1}{2} (\lambda (\vec{a} \vec{b} - \vec{b} \vec{a})) \\
&= \frac{\lambda}{2} (\vec{a} \vec{b} - \vec{b} \vec{a}) \\
&= \lambda \left( \frac{1}{2} (\vec{a} \vec{b} - \vec{b} \vec{a}) \right) \\
&= \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]
\end{aligned}$$

■

**Proposición 8** *Propiedades del producto vectorial vía operaciones cuaterniónicas.*  
Sea  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces

$$(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = (\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}) = (\vec{c}; \vec{a}; \vec{b}) \quad (26)$$

Si dos vectores son paralelos (en particular, iguales) entonces su triple producto escalar es cero.

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] - \vec{a} \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = [\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} \quad (27)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) &= \langle [\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c} \rangle \\
&= -\frac{1}{2} ([\vec{a} \times \vec{b}] \vec{c} + \vec{c} [\vec{a} \times \vec{b}]) \\
&= -\frac{1}{2} (\vec{b} \times \vec{c} \vec{a} + \vec{a} [\vec{b} \times \vec{c}]) \\
&= \langle [\vec{b} \times \vec{c}], \vec{a} \rangle \\
&:= (\vec{b}; \vec{c}; \vec{a})
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) &= \langle [\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c} \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \left( [\vec{a} \times \vec{b}] \vec{c} + \vec{c} [\vec{a} \times \vec{b}] \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( [\vec{c} \times \vec{a}] \vec{b} + \vec{b} [\vec{c} \times \vec{a}] \right) \\
&= \langle [\vec{c} \times \vec{a}], \vec{b} \rangle \\
&:= (\vec{c}; \vec{a}; \vec{b})
\end{aligned}$$

■

Sea  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  y son paralelos, por lo que su ángulo es cero; entonces

$$\begin{aligned}
\vec{a}[\vec{a} \times \vec{b}] &= \vec{a}[\vec{a} \times \vec{b}] \\
&= \vec{a}0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] - \vec{a} \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle &= \left[ \vec{a} \times \frac{1}{2} (\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b}) \right] + \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{c}\vec{b}) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \vec{a} \frac{1}{2} (\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b}) - \frac{1}{2} (\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b}) \vec{a} \right] + \frac{1}{2} \vec{a}\vec{b}\vec{c} \frac{1}{2} \vec{a}\vec{c}\vec{b} \\
&= \frac{1}{4} (\vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c}\vec{b} - \vec{b}\vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b}\vec{a}) + \frac{1}{2} \vec{a}\vec{b}\vec{c} \frac{1}{2} \vec{a}\vec{c}\vec{b} \\
&= \frac{3}{4} \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{4} \vec{a}\vec{c}\vec{b} - \frac{1}{4} \vec{b}\vec{c}\vec{a} + \frac{1}{4} \vec{c}\vec{b}\vec{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} &= \left[ \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \times \vec{c} \right] + \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{b}\vec{a}\vec{c}) \\
&= \frac{1}{4} (\vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}\vec{a} - \vec{b}\vec{a}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}\vec{b}) + \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{b}\vec{a}\vec{c}) \\
&= \frac{3}{4} \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{4} \vec{b}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{4} \vec{c}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{4} \vec{c}\vec{b}\vec{a}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} (\vec{a}\vec{c}\vec{b} + \vec{c}\vec{a}\vec{b}) &= \frac{1}{4} (\vec{b}\vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}\vec{a}) \\
\frac{1}{4} (\vec{a}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}) \vec{b} &= \frac{1}{4} \vec{b} (\vec{a}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}) \\
-\frac{1}{2} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} &= -\frac{1}{2} \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle
\end{aligned}$$

■

**Proposición 9** Sea  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = \lambda (\vec{a}^2 \vec{c} + \vec{c} \vec{a}^2 - \vec{a}^2 \vec{c} - \vec{c} \vec{a}^2) = 0$

Demostración

$$\begin{aligned}
\langle [\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c} \rangle &= -\frac{1}{2} \left( [\vec{a} \times \vec{b}] \vec{c} + \vec{c} [\vec{a} \times \vec{b}] \right) \\
&= \frac{1}{4} (\vec{b}\vec{a}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}\vec{b}) \\
&= \frac{1}{4} (\lambda\vec{a}\vec{a}\vec{c} + \vec{c}\lambda\vec{a}\vec{a} - \vec{a}\lambda\vec{a}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}\lambda\vec{a}) \\
&= \lambda \left( \frac{1}{4} (\vec{a}^2 \vec{c} + \vec{c} \vec{a}^2 - \vec{a}^2 \vec{c} - \vec{c} \vec{a}^2) \right) \\
&= \lambda \left( \frac{1}{4} (0) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

## 2.6 Análisis Vectorial

En el álgebra cuaterniónica es fundamental el uso de análisis vectorial debido a las unidades vectoriales. Esto lleva a introducir el tópico de derivadas parciales de vectores; no se incluye la derivación en una variable por la naturaleza del álgebra cuaterniónica.

### 2.6.1 Derivadas parciales de vectores

Suponga que  $\vec{A}$  depende de más de una variable, en este caso  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Entonces  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ . La derivada parcial de  $\vec{A}$  con respecto a  $x$  si el existe el límite [12]:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x + \Delta x, y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Esta expresión se extiende hasta las derivadas parciales respecto a  $y$  y  $z$ , respectivamente, cuando existe el límite:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x, y + \Delta y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x, y, z + \Delta z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta z}.$$

El concepto de continuidad y diferenciabilidad en funciones de varias variables se mantienen.

**Proposición 10** *Suponga que  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son funciones vectoriales de  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

- $\frac{\partial}{\partial x} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \left\langle \vec{A}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}, \vec{B} \right\rangle,$
- $\frac{\partial}{\partial x} [\vec{A} \times \vec{B}] = \left[ \vec{A} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \times \vec{B} \right],$
- $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left\langle \vec{A}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}, \vec{B} \right\rangle \right\}.$

**Proposición 11** *Suponga que  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son funciones de  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Entonces las siguientes leyes se cumplen:*

- Si  $\vec{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ , entonces  $d\vec{A} = dA_1 i + dA_2 j + dA_3 k$ .
- $d \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, d\vec{B} \rangle + \langle d\vec{A}, \vec{B} \rangle.$
- $d [\vec{A} \times \vec{B}] = [\vec{A} \times d\vec{B}] + [d\vec{A} \times \vec{B}].$
- Si  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ , entonces  $d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz$ , y así sucesivamente.

### 2.6.2 Gradiente, divergencia y rotacional

Se define el operador vectorial diferencial *nabla*, con el símbolo  $\nabla$ :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

Este operador permite definir gradiente, divergencia y rotacional.

**Definición 10** Sea  $\phi(x, y, z)$  una función escalar definida y diferenciable en cada punto de un campo escalar diferenciable. Entonces, el gradiente de  $\phi$ , denotado con  $\nabla \phi$ , se expresa así:

$$\begin{aligned}\nabla \phi &= \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \phi \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k.\end{aligned}$$

$\nabla \phi$  define un campo vectorial.

**Definición 11** Suponga que  $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1 i + V_2 j + V_3 k$  está definida y es diferenciable en cada punto  $(x, y, z)$  en un espacio  $\mathbf{V}$  un campo vectorial diferenciable. Entonces la divergencia de  $\mathbf{V}$ , denotada como  $\langle \nabla, \mathbf{V} \rangle$

$$\begin{aligned}\langle \nabla, \mathbf{V} \rangle &= \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right), (V_1 i + V_2 j + V_3 k) \right\rangle \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} i + \frac{\partial V_2}{\partial y} j + \frac{\partial V_3}{\partial z} k.\end{aligned}$$

$\mathbf{V}$  es un vector, sin embargo  $\langle \nabla, \mathbf{V} \rangle$  es un cantidad escalar.

**Definición 12** Suponga que  $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1 i + V_2 j + V_3 k$  es un campo vectorial diferenciable. Entonces, el rotacional de  $\mathbf{V}$ , denotado  $[\nabla \times \mathbf{V}]$ , se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}[\nabla \times \mathbf{V}] &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times (V_1 i + V_2 j + V_3 k) \right] \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} k \\ &= \left( \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) k.\end{aligned}$$

El operador  $\nabla$  tiene muchas propiedades al tratarse de cálculos vectoriales, las cuales se resumen a continuación.

**Proposición 12** Suponga que  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son funciones vectoriales diferenciables, y que  $\phi$  y  $\psi$  son funciones escalares diferenciables de posición  $(x, y, z)$ . Entonces, se cumplen las leyes siguientes [12]:

- $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$
- $\langle \nabla, (\vec{A} + \vec{B}) \rangle = \langle \nabla, \vec{A} \rangle + \langle \nabla, \vec{B} \rangle$
- $[\nabla \times (\vec{A} + \vec{B})] = [\nabla \times \vec{A}] + [\nabla \times \vec{B}]$
- $\langle \nabla, \phi \vec{A} \rangle = \langle (\nabla\phi), \vec{A} \rangle + \phi \langle \nabla, \vec{A} \rangle$
- $\langle \nabla, \phi \vec{A} \rangle = [(\nabla\phi) \times \vec{A}] + \phi [\nabla \times \vec{A}]$

**Proposición 13** Suponga que  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son funciones vectoriales diferenciables, y que  $\phi$  y  $\psi$  son funciones escalares diferenciables de posición  $(x, y, z)$ . Entonces se cumple lo siguiente:

- $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$
- $\langle \nabla, (\vec{A} + \vec{B}) \rangle = \langle \nabla, \vec{A} \rangle + \langle \nabla, \vec{B} \rangle$
- $[\nabla \times (\vec{A} + \vec{B})] = [\nabla \times \vec{A}] + [\nabla \times \vec{B}]$
- $\langle \nabla, (\phi \vec{A}) \rangle = \langle (\nabla\phi), \vec{A} \rangle + \phi \langle \nabla, \vec{A} \rangle$
- $[\nabla \times (\phi \vec{A})] = [(\nabla\phi) \times \vec{A}] + \phi[\nabla \times \vec{A}]$
- $\langle \nabla, [\vec{A} \times \vec{B}] \rangle = \langle \vec{B}, [\nabla \times \vec{A}] \rangle - \langle \vec{A}, [\nabla \times \vec{B}] \rangle$
- $[\nabla \times [\vec{A} \times \vec{B}]] = \langle \vec{B}, \nabla \rangle \vec{A} - \vec{B} \langle \nabla, \vec{A} \rangle - \langle \vec{A}, \nabla \rangle \vec{B} + \vec{A} \langle \nabla, \vec{B} \rangle$

**Proposición 14** Suponga que  $\phi$  y  $\vec{A}$  son respectivamente funciones escalar y vectorial, diferenciables, y que ambas tienen segundas derivadas parciales continuas. Entonces, se cumplen las siguientes leyes:

- $\langle \nabla, (\nabla\phi) \rangle = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ , donde  $\nabla^2$  se llama operador laplaciano.
- $[\nabla \times (\nabla\phi)] = 0$ . El rotacional del gradiente de  $\phi$  es igual a cero.
- $\langle \nabla, [\nabla \times \vec{A}] \rangle = 0$ . La divergencia del rotacional de  $\vec{A}$  es igual a cero.
- $[\nabla \times [\nabla \times \vec{A}]] = \nabla \langle \nabla, \vec{A} \rangle - \nabla^2 \vec{A}$ .

Existen además los campos irrotacionales, algunas veces llamados potenciales y los campos solenoidales. Primero se definirá un vector irrotacional para poder describir un campo irrotacional.

**Definición 13** Un vector  $\vec{V}$  se llama irrotacional si  $[\nabla \times \vec{V}] = 0$ .

**Definición 14** Un campo vectorial  $\vec{V}$ , obtenido de un campo escalar  $\phi$ , donde  $\vec{V} = \nabla\phi$ , se llama campo vectorial conservativo, y se denomina a  $\phi$  potencial escalar. Entonces si  $\vec{V} = \nabla\phi$ ,  $[\nabla \times \vec{V}] = 0$  [3].

Ahora, si el campo irrotacional en cierto dominio  $\tau$ , es decir, si

$$[\nabla \times \vec{V}] = 0$$

para todos los puntos del dominio. Manteniendo el sistema  $xyz$ , las funciones depende entre ellas y satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} &= \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} &= \frac{\partial V_z}{\partial y} \end{aligned}$$

Analizando estas relaciones, el campo vectorial irrotacional se convierte en un campo escalar  $\phi$ , que será el potencial escalar de  $\vec{F}$  y la ecuación que lo describe es la siguiente

$$\vec{V} = -\nabla\phi$$

Por lo tanto en todos los puntos del campo su rotacional será cero y cualquier flujo a lo largo de cualquier trayectoria cerrada será nulo.

La definición formal para vector solenoidal y campo solenoidal se articula de la siguiente manera:

**Definición 15** Un vector  $\vec{V}$  se llama solenoidal si  $\langle \nabla, \vec{V} \rangle = 0$ .

**Definición 16** Un campo vectorial  $\vec{V}$ , cuando su divergencia en todos los puntos del campo es nula

$$\langle \nabla, \vec{V} \rangle = 0$$

se denomina solenoidal [3].

Si en el campo no existe una pérdida de flujo en un dominio  $\tau$  y sus componentes del campo

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

y  $\vec{V}$  se deriva a partir de otro campo  $\vec{A}$ , siendo vectorial también conocido como potencial vector y su relación con  $\vec{V}$  es

$$\vec{V} = \nabla \wedge \vec{A}.$$

### 2.6.3 Integración vectorial

**Definición 17** Sea  $\vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}$  el vector posición de puntos  $P(x, y, z)$  y  $\vec{r}(u)$  define una curva  $C$  que une los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , donde  $u = u_1$  y  $u = u_2$ , respectivamente.

Suponga que  $C$  está compuesta de un número finito de curvas para cada una de las cuales  $\vec{r}$  tiene una derivada continua. Sea  $\vec{A}(x, y, z) = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$  una función vectorial de posición definida y continua a lo largo de  $C$ . Entonces, la integral de la componente tangencial de  $\vec{A}$  a lo largo de  $C$  de  $P_1$  y  $P_2$  se denota:

$$\int_{P_1}^{P_2} \langle \vec{A}, d\vec{r} \rangle = \int_C \langle \vec{A}, d\vec{r} \rangle = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

a esta se le conoce como integral de línea [12].

Si  $C$  es una curva cerrada, se denota la integral alrededor de  $C$  del modo siguiente:

$$\oint \langle \vec{A}, d\vec{r} \rangle = \oint A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz.$$

**Definición 18** Sea  $S$  una superficie de dos lados, donde un lado de  $S$  se considera de manera arbitraria como el positivo. Una normal unitaria,  $\vec{n}$ , a cualquier punto del lado positivo de  $S$  se llama normal unitaria positiva o dirigida hacia fuera.

Se asocia con la diferencial de superficie,  $dS$ , un vector  $d\vec{S}$  de magnitud  $dS$  y cuya dirección es la de  $\vec{n}$ . Entonces,  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ . La integral

$$\iint_S \langle \vec{A}, d\vec{s} \rangle = \iint_S \langle \vec{A}, \vec{n} \rangle dS$$

esta es una integral de superficie llamada **flujo** de  $\vec{A}$  sobre  $S$  [12].

**Definición 19** Se considera una superficie cerrada en el espacio que encierra un volumen  $V$ . Entonces, las integrales de volumen o integrales espaciales, se escriben así [12]:

$$\iiint_V \vec{A} dV.$$

**Teorema 1 Divergencia de Gauss.** Suponga que  $V$  es el volumen limitado por una superficie cerrada  $S$  y que  $\vec{A}$  es una función vectorial de posición con derivadas continuas. Entonces:

$$\iiint_V \langle \nabla, \vec{A} \rangle dV = \iint_S \langle \vec{A}, \vec{n} \rangle dS = \oiint_S \langle \vec{A}, d\vec{s} \rangle$$

donde  $\vec{n}$  es la normal positiva fuera de  $S$ .

**Teorema 2 Stokes** Suponga que  $S$  es una superficie abierta, de dos lados, limitada por una curva  $C$  cerrada que no se interseca a sí misma, y suponga que  $\vec{A}$  es una función vectorial de posición con derivadas continuas. Entonces,

$$\oint_C \langle \vec{A}, d\vec{r} \rangle = \iint_S (\langle [\nabla \times \vec{A}], \vec{n} \rangle) dS = \iint_S (\langle [\nabla \times \vec{A}], d\vec{S} \rangle)$$

donde  $C$  tendrá dirección positiva.

**Teorema 3 Green en el plano.** Suponga que  $R$  es una región cerrada en el plano  $xy$ , limitada por una curva simple cerrada,  $C$ , y que  $M$  y  $N$  son funciones continuas de  $x$  y  $y$  que tienen derivadas continuas en  $R$ . Entonces:

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $C$  va en dirección positiva (en sentido contrahorario).

Algunas proposiciones importantes se enlistan inmediatamente:

**Proposición 15** Se cumplen las siguientes condiciones:

- $\iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + \langle (\nabla \phi), (\nabla \psi) \rangle] dV = \iint_S \langle (\phi \nabla \psi), d\vec{S} \rangle$  (teorema de Green).
- $\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S \langle (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi), d\vec{S} \rangle$  (teorema asimétrico de Green).
- $\iiint_V [\nabla \times \vec{A}] dV = \iint_S ([\vec{n} \times \vec{A}]) dS = \iint_S [d\vec{S} \times \vec{A}]$
- $\oint_C \phi d\vec{r} = \iint_S ([\vec{n} \times \nabla \phi]) dS = \iint_S [d\vec{S} \times \nabla \phi]$

**Proposición 16** Sea que  $\phi$ , función vectorial o escalar, se usa el símbolo  $\circ$  denota un producto punto o un producto cruz, o una multiplicación ordinaria [12]. Entonces:

- $\iiint_V \nabla \circ \psi dV = \iint_S \vec{n} \circ \psi dS = \iint_S d\vec{S} \circ \psi$
- $\oint_C d\vec{r} \circ \psi = \iint_S ([\vec{n} \times \nabla]) \circ \psi dS = \iint_S ([d\vec{S} \times \nabla]) \circ \psi$

## 2.7 Operadores de Cauchy

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} [f] &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial}{2\partial x} - i \frac{\partial}{2\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + i \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{2\partial x^2} - i \frac{\partial^2}{2\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2}{2\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{2\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{\partial^2}{4\partial x^2} + \frac{\partial^2}{4\partial y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [f] &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{2\partial x} + i \frac{\partial}{2\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) - i \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{2\partial x^2} - i \frac{\partial^2}{2\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2}{2\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{2\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{\partial^2}{4\partial x^2} + \frac{\partial^2}{4\partial y^2}
 \end{aligned}$$

Al realizar los cálculos con los operadores de Cauchy a una función compleja, indiferentemente del orden en el que se apliquen, se obtiene una cuarta parte de la ecuación de Laplace. De estos resultados se puede concluir que una función que satisface la ecuación de Laplace es una función armónica.

### 2.7.1 Funciones armónicas

En análisis complejo, para comprobar que una función compleja, es analítica es necesario que satisfaga las ecuaciones de Cauchy - Riemann.

**Teorema 4** *Suponga que  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es derivable en un punto  $z = x + iy$ . Entonces en  $z$  las derivadas parciales de primer orden de  $u$  y  $v$  existen y satisfacen las ecuaciones de **Cauchy - Riemann** [14]. Este par de ecuaciones se presentan a continuación:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (28)$$



En la composición de funciones con el uso de los operadores de Cauchy que se presenta en el inicio de esta subsección se aplica una reescritura de las ecuaciones de Cauchy - Riemann. Con estos datos es posible definir la función armónica que surge de la ecuación de Laplace.

Una función compleja es analítica en un punto  $z$  y está definida de igual forma en el teorema anterior, las funciones reales serán continuas en ese punto. Con esto se concluye que las derivadas parciales mixtas pero ahora de segundo orden deberán de ser iguales. Entonces se busca la conexión entre las ecuaciones de Cauchy - Riemann y la ecuación de Laplace, que es una ecuación diferencial de segundo orden vista en la proposición 14 de la subsección de análisis vectorial de este trabajo. Sin embargo, aquí se igualará a cero.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (29)$$

**Definición 20** Una función de valores reales  $\phi$  de dos variables reales  $x$  y  $y$  que tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas en un dominio  $D$ , y satisface el Laplaciano, se dice que es una función armónica en  $D$ .

**Teorema 5** Suponga que la función compleja  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es analítica en un dominio  $D$ . Entonces las funciones  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son armónicas en  $D$  [14].

Como conclusión del teorema, en general, las funciones analíticas serán armónicas.

En adición, si se encuentra una función real armónica  $v(x, y)$  tal que  $u$  y  $v$  cumplan las ecuaciones de Cauchy - Riemann en todo el dominio  $D$ , entonces la función  $v(x, y)$  se llama una función armónica conjugada de  $u(x, y)$ .

## 2.8 Divisores de Ceros

Anteriormente, se hizo mención a los que existen cuaternios complejos no nulos al realizar un producto puede obtenerse cero. A estos elementos se les conoce como divisores de cero. Los divisores de cero se denotarán de la siguiente manera:

$$\mathfrak{S} := \{a \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) \mid a \neq 0; \exists b \neq 0 : ab = 0\}. \quad (30)$$

$\mathfrak{S}$  es un subconjunto [10]. Se debe notar que si  $a \in \mathfrak{S}$  entonces  $a^{-1}$  no existe. La demostración inicia con asumir que  $a \in \mathfrak{S}$ , esto es, existe  $b \neq 0$  tal que  $ab = 0$  y entonces se asume que  $a^{-1}$ . Entonces  $aa^{-1} = 1$ . Se multiplica esta igualdad por  $b$ :  $aa^{-1}b = b$ , a partir del cual se obtiene una contradicción  $0 = b$ . Se puede concluir que los divisores de ceros no son invertibles [10].

**Lema 1** Estructura del conjunto de los divisores de cero.

Sea  $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  y  $a \neq 0$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $a \in \mathfrak{S}$ .
- $a\bar{a} = 0$ .

- $a_0^2 = \bar{a}^2$ .
- $a^2 = 2a_0a = 2\bar{a}a$ .

Demostración

Primero, se muestra la equivalencia de los dos primeros puntos. Si el segundo punto se mantiene, entonces se puede elegir  $b = \bar{a}$  y la definición de divisores de cero es cumplida. Si el segundo punto no se cumple, entonces existe  $a^{-1}$  definido como  $a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a^2|}$  y esto significa que  $a \notin \mathfrak{S}$ . Por lo tanto, los dos puntos son equivalentes.

La igualdad entre el segundo punto y el tercer punto sigue inmediatamente la definición de un cuaternio conjugado:

$$a\bar{a} = 0 \iff (a_0 + \bar{a})(a_0 - \bar{a}) = 0 \iff a_0^2 = \bar{a}^2.$$

Luego, la equivalencia entre el tercer punto y el cuarto punto se considera el cuadrado de  $a$ :

$$a^2 = a_0^2 + 2a_0a + \bar{a}^2.$$

Entonces se puede decir que  $a_0^2 = \bar{a}^2 \iff a^2 = a_0^2 + 2a_0a + \bar{a}^2$  y  $a_0^2 = \bar{a}^2 \iff a^2 = 2a_0^2 + 2a_0\bar{a} = 2a_0a$ . ■

Ahora, se ilustra todo lo previo con el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1** Sea  $p = q = 1 + ii_1$ . Entonces

$$\begin{aligned} |pq|_c &= 2|1 + ii_1|_c = 2\sqrt{2}, \\ \text{pero} \\ |p|_c|q|_c &= 2 \end{aligned}$$

El ejemplo anterior da paso a un importante lema [10].

**Lema 2** Sea  $p$  y  $q$  cuaternios complejos. Entonces

$$|pq|_c \leq \sqrt{2}|p|_c|q|_c.$$

Demostración

Se denota  $a := \operatorname{Re} p$ ,  $b := \operatorname{Im} p$ ,  $c := \operatorname{Re} q$ ,  $d := \operatorname{Im} q$ . Entonces:

$$\begin{aligned} |pq|_c^2 &= |(a + ib)(c + id)|_c^2 \\ &= |ac - bd + i(bc + ad)|_c^2 \\ &= |ac - bd|^2 + |bc + ad|^2 \leq 2(|ac|^2 + |bd|^2 + |bc|^2 + |ad|^2) \\ &= 2(|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) \\ &= 2|p|_c^2|q|_c^2. \end{aligned}$$

■

## 2.9 Funciones cuaterniónicas complejas

Se considerará funciones que dependan de tres o cuatro variables reales independientes tomando sus valores en el álgebra de cuaternios complejos, veáse funciones:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$$

o bien,

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C}).$$

Estas funciones se denominan bicuaterniónicas. Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathcal{B}$  un espacio de Banach (espacio de funciones de dimensión infinita) de complejos valuado en funciones definidas en  $\Omega$ , por instancia,  $C(\Omega)$  o  $L_p(\Omega)$  [10]. Se asume que una función de cuaternios complejos  $f$  pertenece al espacio  $\mathcal{B}(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  si y sólo si cada componente  $f_k$  de  $f$  pertenece a  $\mathcal{B}(\Omega)$  donde la norma de  $f$  es calculada como sigue:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \left( \sum_{k=0}^3 \|f_k\|_{\mathcal{B}}^2 \right)^{1/2}.$$

Si  $\mathcal{B}(\Omega)$  es un espacio de Banach entonces el espacio  $\mathcal{B}(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  definido es un espacio lineal complejo de Banach [10].

## 2.10 Operador diferencial Moisil - Theodoresco

Uno de los operadores fundamentales al tratar con álgebra cuaterniónica compleja es el operador diferencial Moisil - Theodoresco, el cual contiene divergencia, gradiente y rotacional. Se denota de la siguiente manera:

$$\partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$$

y sea  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ . Entonces:

$$Df := \sum_{k=1}^3 i_k \partial_k f$$

es nombrado como el operador diferencial Moisil - Theodoresco. Ahora se considera el operador  $D$  explícitamente

$$\begin{aligned} Df &= (i_1\partial_1 + i_2\partial_2 + i_3\partial_3)(f_0 + f_1i_1 + f_2i_2 + f_3i_3) \\ &= (i_1\partial_1f_0 + i_2\partial_2f_0 + i_3\partial_3f_0) - (\partial_1f_1 + \partial_2f_2 + \partial_3f_3) + \\ &\quad + ((\partial_2f_3 - \partial_3f_2)i_1 + (\partial_3f_1 - \partial_1f_3)i_2 + (\partial_1f_2 - \partial_2f_1)i_3) \end{aligned}$$

En el primer término del segundo renglón se encuentra el gradiente de la función  $f_0$ :

$$\nabla f_0 = (i_1\partial_1 + i_2\partial_2 + i_3\partial_3)f_0.$$

El segundo término contiene la divergencia del vector  $\vec{f}$ :

$$\langle \nabla, \vec{f} \rangle = \partial_1f_1 + \partial_2f_2 + \partial_3f_3.$$

Por último, en el tercer término se representa el rotacional de  $\vec{f}$ :

$$[\nabla \times \vec{f}] = (\partial_2f_3 - \partial_3f_2)i_1 + (\partial_3f_1 - \partial_1f_3)i_2 + (\partial_1f_2 - \partial_2f_1)i_3.$$

Esto da como resultado

$$Df = - \langle \nabla, \vec{f} \rangle + \nabla f_0 + [\nabla \times \vec{f}]. \quad (31)$$

Es importante que esto en el cálculo vectorial es algo imposible. Aunque en el análisis cuaterniónico tiene un significado simple debido a que los cuaternios se componen de una parte escalar y una parte vectorial, entonces se concluye que los tres operadores diferenciales del análisis vectorial se contienen en el operador cuaterniónico  $D$  [10]. Ahora, el resultado del operador  $D$  en una función bicauterniónica  $f$  es un cuaternio complejo donde su parte escalar es la  $\langle \nabla, \vec{f} \rangle$  y su parte vectorial es la suma de  $\nabla f_0 + [\nabla \times \vec{f}]$ , esto se reescribe a continuación:

$$\begin{aligned} Sc(Df) &= - \langle \nabla, \vec{f} \rangle \\ Vec(Df) &= \nabla f_0 + [\nabla \times \vec{f}]. \end{aligned}$$

Una generalización que brinda el análisis complejo es la siguiente:

$$Df = 0,$$

esto es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \langle \nabla, \vec{f} \rangle &= 0, \\ \nabla f_0 + [\nabla \times \vec{f}] &= 0, \end{aligned}$$

al resultado inmediato anterior se le llama el sistema Moisil - Theodoresco. El sistema posee propiedades del sistema de Cauchy - Riemann en un espacio de tres dimensiones.

Este sistema puede ser escrito en términos de sus derivadas parciales e igualar cada componente a cero, en el caso de la parte vectorial, y tomando en consideración el argumento de la divergencia de la función bicuaterniónica  $f$ , donde  $f = f_o + f_1 i_1 + f_2 i_2 + f_3 i_3$ , se modifica y el sistema adopta la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial f_o}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial f_o}{\partial x_2} i_2 + \frac{\partial f_o}{\partial x_3} i_3 + [\nabla \times \vec{f}] &= 0. \end{aligned}$$

Para la primer componente de la parte vectorial del operador de Moisil - Theodoresco, se aplican estas operaciones

$$\frac{\partial f_o}{\partial x_1} i_1 + [\nabla \times \vec{f}] = 0,$$

$$(i_1 \partial_1) f_o + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) i_1 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) i_2 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) i_3 = 0.$$

Si las componentes vectoriales son constantes al derivar son cero, como es posible deducir del cálculo anterior, entonces el gradiente al derivarse reultará cero por la definición de este operador. El rotacional es cero porque la divergencia es cero,  $\nabla$  no es cero, entonces lo único que puede ser cero es la función  $f$ , entonces esta ecuación da como resultado cero. Las componentes faltantes siguen la misma argumentación y metodología por lo que únicamente se añadirán como ejemplo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_o}{\partial x_2} i_2 + [\nabla \times \vec{f}] &= 0, \\ \frac{\partial f_o}{\partial x_3} i_3 + [\nabla \times \vec{f}] &= 0. \end{aligned}$$

A continuación, se muestra una propiedad del operador  $D$  es obtener:

$$D^2 = -\nabla^2, \quad (32)$$

donde  $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$  es el operador laplaciano. Esta propiedad garantiza que cada componente de una función  $f$  que satisface  $Df$  es una función armónica [10].

**Teorema 6 Generalizacion de la Regla de Leibniz.**

Sea  $\{f, g\} \subset C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  donde  $\Omega$  es algún dominio en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces

$$D[fg] = D[f]g + \bar{f}D[g] + 2(Sc(fD))[g] \quad (33)$$

donde

$$(Sc(fD))[g] := - \sum_{k=1}^3 f_k \partial_k g.$$

Apartir de este teorema es posible obtener un corolario donde incluso si  $Df = Dg = 0$  no implica que  $D[fg] = 0$  también [10].

**Comentario 1** Si en el teorema 4  $Vec(f) = 0$ , eso es  $f = f_0$ , entonces

$$D[f_0g] = D[f_0]g + f_0D[g]. \quad (34)$$

De esta igualdad se obtiene que el operador  $D + \frac{\nabla f_0}{f_0}$  se factoriza de la siguiente manera

$$\left( D + \frac{\nabla f_0}{f_0} \right) g = f_0^{-1} D(f_0g).$$

Notesé que el operador Moisil - Theodoresco fue introducido siendo aplicado del lado izquierdo. El operador derecho se escribe  $D_r$ :

$$D_r f := \sum_{k=1}^3 \partial_k f i_k. \quad (35)$$

En la aplicación vectorial de  $D_r$  se visualiza así:

$$D_r f = - \langle \nabla, \vec{f} \rangle + \nabla f_0 - [\nabla \times f_0]. \quad (36)$$

## 2.11 Operador $D + \alpha I$

El operador  $D_\alpha := D + \alpha I$ , donde  $\alpha$  es una constante arbitraria compleja y  $I$  es el operador identidad. De aquí en adelante se asume que

$$Im \alpha \geq 0.$$

En este caso  $\alpha$  será usado como el número de onda que satisface la condición anterior.

### 2.11.1 Ecuación de Onda de Hemholtz y sus soluciones fundamentales

El operador  $D_\alpha$  está estrechamente relacionado con la ecuación de onda de Helmholtz  $\Delta + \alpha^2 I$  por la siguiente operación

$$\Delta + \alpha^2 = -(D + \alpha)(D - \alpha) = -D_\alpha D_{-\alpha}. \quad (37)$$

esto es un colorario de la ecuación 30 [10]. Esta igualdad significa que cualquier función cumple la ecuación

$$D_\alpha f = 0, \quad (38)$$

o bien,

$$D_{-\alpha} f = 0, \quad (39)$$

que a su vez satisface la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + \alpha^2)f = 0. \quad (40)$$

Si esto se desarrolla en el campo de los cuaternios entonces cada componente de una función cuaterniónica  $f$  satisface (35) o (36) y es una solución de la operación de Helmholtz.

Otro corolario obtenido de la ecuación 35 es el cálculo de las soluciones fundamentales de los operadores  $D_\alpha$  y  $D_{-\alpha}$ . Para esto se supone que  $\mathcal{V}$  es una solución fundamental del operador de Helmholtz:

$$(\Delta + \alpha^2)\mathcal{V} = \delta.$$

Aplicando la Ecuación 35 resulta que la función

$$\mathcal{K}_\alpha := -(D - \alpha)\mathcal{V} \quad (41)$$

es una solución fundamental de  $D_\alpha$  y la función

$$\mathcal{K}_{-\alpha} := -(D + \alpha)\mathcal{V} \quad (42)$$

es una solución fundamental de  $D_{-\alpha}$ , y esto es

$$D_{\pm\alpha}\mathcal{K}_{\pm\alpha} = \delta.$$

Otra forma de reescribir la ecuación de Helmholtz es así:

$$\nabla^2 f = -k^2 f, \quad (43)$$

o de igual manera,

$$(\nabla^2 + k^2)\varnothing = 0, \quad (44)$$

donde  $\nabla^2$  es el laplaciano,  $k$  es el número de onda y  $f$  es la amplitud de onda. Este tipo de notación es la que se usa comúnmente en Física [10].

Previamente se definieron los conceptos de campos irrotacionales y solenoidales, ahora se conectarán con la ecuación de onda de Helmholtz estableciendo el siguiente teorema.

**Teorema 7** *Un campo vectorial, si existe, es determinado en forma única especificando su divergencia y rotación en cualquier punto dentro de una región y su componente normal en la superficie cerrada que rodea esta región.*

### 2.11.2 Representaciones integrales en dominios con fronteras

Para brindar soluciones a las soluciones de la ecuación de Helmholtz con una representación integral es necesario presentar los siguientes teoremas, iniciando con el teorema de Stokes pero en forma cuaterniónica.

**Teorema 8 *Fórmula cuaterniónica de Stokes*** Sea  $f$  y  $g$  pertenecientes a  $C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ . Entonces

$$\int_{\Omega} ((D_r f(y))g(y) + f(y)(Dg(y)))dy = \int_{\Gamma} f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y, \quad (45)$$

donde el vector  $\vec{n}$  denota el vector normal unitario con dirección hacia afuera sobre  $\Gamma$  en forma cuaterniónica:  $\vec{n} := \sum_3^{k=1} n_k i_k$  [10].

Demostración

Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((D_r f(y))g(y) + f(y)(Dg(y)))dy &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 (\partial_k f(y)i_k g(y) + f(y)i_k \partial_k g(y))dy \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \partial_k (f(y)i_k g(y))dy \\ &= \int_{\Gamma} f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y \end{aligned}$$

■

Ahora, ya que se está tratando con superficies de Liapunov, es decir, con superficies con una frontera; por esta razón es necesario introducir otros teoremas integrales aplicados al análisis complejo que proporcionan propiedades para el tratamiento de los cálculos posteriores en la tesis. Con el teorema de Stokes cuaterniónico surge un corolario el cual se detalla a continuación.

**Corolario 1 *Teorema integral cuaterniónico de Cauchy*** Sea  $g \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  y este satisface una de las soluciones del operador de Helmholtz,  $D_\alpha f = 0$ . Y  $f(y) \in \ker D(Df(y) = 0!)$  Entonces

$$\int_{\Gamma} \vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y = -\alpha \int_{\Omega} g(y)dy.$$

**Teorema 9 *Fórmula cuaterniónica de Borel - Pompeiu.*** Sea  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ . Entonces

$$K_\alpha[f] + T_\alpha D_\alpha[f](x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$



Demostración  
 Considere la integral

$$T_\alpha D_\alpha[f](x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}_\alpha(x-y) D_{\alpha,y} f(y) dy \quad (46)$$

donde el subíndice  $y$  en el operador  $D_{\alpha,y}$  indica la diferenciación con respecto a  $y$  [10]. Esta es una integral de volumen que se aplicará al teorema de Stokes para transformar la integral de volumen a una de superficie, pero la función  $\mathcal{K}_\alpha(x-y)$  carece de las condiciones necesarias para que se emplee el teorema de Stokes. Concretamente,  $\mathcal{K}_\alpha(x-y)$  es una función  $C^1$  en todo el dominio  $\Omega$  a excepción de los puntos sobre  $y = x$ . Entonces, primero se tiene que aislar el punto  $x$  junto con una bola pequeña  $B_\epsilon := \{y \mid |x-y| \leq \epsilon\}$  del dominio  $\Omega$  y considerando nuevamente la integral previa como el siguiente límite

$$\int_{\Omega} \mathcal{K}_\alpha(x-y) D_{\alpha,y} f(y) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) D_{\alpha,y} f(y) dy, \quad (47)$$

donde  $\Omega_\epsilon := \Omega/B_\epsilon$  [10]. La integral puede ser aplicable junto con el teorema de Stokes cuaterniónico

$$\int_{\Omega_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) D_{\alpha,y} f(y) dy,$$

sin embargo, todavía tienen que hacer unas transformaciones

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) D_{\alpha,y} f(y) dy = \\ & = \int_{\Omega_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) D_y f(y) dy + \alpha \int_{\Omega_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) f(y) dy = \\ & = \int_{\Omega_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) D_y f(y) dy + \alpha \int_{\Omega_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) f(y) dy \\ & - \int_{\Omega_\epsilon} D_{r,y} [\mathcal{K}_\alpha(x-y)] f(y) dy + \int_{\Omega_\epsilon} D_{r,y} [\mathcal{K}_\alpha(x-y)] f(y) dy, \end{aligned}$$

donde  $D_{r,y}$  es el operador de Moisil - Theodoresco en función de  $y$ . Por definición de  $\mathcal{K}_\alpha$ , se tiene

$$-D_{r,y} [\mathcal{K}_\alpha(x-y)] = -D_y [\mathcal{K}_\alpha(x-y)] = D_x [\mathcal{K}_\alpha(x-y)].$$

Siguiendo con la demostración

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) D_{\alpha,y} f(y) dy = \\
& = \int_{\Omega_\epsilon} (\mathcal{K}_\alpha(x-y) D_y f(y) + D_{r,y}[\mathcal{K}_\alpha(x-y)] f(y)) dy + \\
& + \int_{\Omega_\epsilon} (\alpha \mathcal{K}_\alpha(x-y) + D_x[\mathcal{K}_\alpha(x-y)]) f(y) dy.
\end{aligned}$$

La integral que se ubica a la derecha se le aplica el teorema de Stokes y queda

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\epsilon} (\mathcal{K}_\alpha(x-y) D_y f(y) + D_{r,y}[\mathcal{K}_\alpha(x-y)] f(y)) dy = \\
& = \int_{\Gamma_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) \vec{n}(y) f(y) d\Gamma_{\epsilon,y},
\end{aligned}$$

donde  $\Gamma_\epsilon := \partial\Omega_\epsilon$ . Regresando a la integral de la ecuación 46, se puede ver que

$$\begin{aligned}
T_\alpha D_\alpha[f](x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \mathcal{K}_\alpha(x-y) \vec{n}(y) f(y) d\Gamma_{\epsilon,y} \\
&+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} D_{\alpha,x}[\mathcal{K}_\alpha(x-y)] f(y) dy.
\end{aligned}$$

El primer límite brinda  $-\mathcal{K}_\alpha[f](x)$  mientras que el segundo límite será igual a

$$\int_{\Omega} \delta(x-y) f(y) dy$$

■

Apartir de este teorema es posible obtener el teorema integral de Cauchy.

**Teorema 10 *Teorema integral cuaterniónico de Cauchy*** Sea  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  y  $f \in \ker D_\alpha(\Omega)$ . Entonces

$$f(x) = \mathcal{K}_\alpha[f](x), \forall x \in \Omega. \tag{48}$$

## 2.12 Ecuaciones de Maxwell y la teoría electromagnética

Para comprender las soluciones fundamentales del operador de Helmholtz en la Física, es necesario introducir los fundamentos de la teoría electromagnética y las ecuaciones de Maxwell utilizando el álgebra cuaterniónica.

El electromagnetismo es la rama física que estudia los fenómenos originados por la electricidad y el magnetismo unificando sus interacciones en una sola

Ecuaciones de Maxwell	
Forma diferencial	Forma integral
$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_A \langle \vec{E}, d\vec{A} \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$
$\langle \nabla, \vec{B} \rangle = 0$	$\oint_A \langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle = 0$
$[\nabla \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = -\frac{d\Phi}{dt}$
$[\nabla \times \vec{B}] = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$	$\oint_C \langle \vec{B}, d\vec{s} \rangle = \mu_0 \left( i_{enc} + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$

Table 2: Tabla de Ecuaciones de Maxwell.

teoría. La unificación del estudio electromagnético se dió en el siglo XIX cuando después de una larga investigación en estas ramas, que al inicio se trataron como fuerzas separadas, son relacionadas por el físico británico James Clerk Maxwell (1831 - 1879) en su publicación *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* en 1865, demostrando que los campos eléctricos y magnéticos podían viajar por el espacio en forma de ondas a la velocidad de la luz.

Después del impacto que tuvo la publicación de Maxwell, en 1887 el físico alemán Heinrich Hertz (1857 - 1894) de forma empírica la existencia de las ondas electromagnéticas. Esto hizo que iniciara una serie de aportaciones e inventos al electromagnetismo debido a su gran aplicación en la ingeniería. Uno de sus principales divulgadores fue el físico e ingeniero de origen serbocroata Nikola Tesla (1856 - 1943). Tesla se dedicó a crear aparatos que produjeran fenómenos electromagnéticos de alta frecuencia y alto potencial eléctrico. Este tipo de apoyo empírico fue que el sustentó la teoría de ondas electromagnéticas demostrada sólo teóricamente unos años antes.

Las ecuaciones de Maxwell son cuatro ecuaciones diferenciales parciales que se encargan de describir las interacciones entre las cargas eléctricas, las corrientes eléctricas, los campos eléctricos y los campos magnéticos, así como los fenómenos electromagnéticos en general.

Concebidas primero en veinte ecuaciones, se simplificaron en las actuales cuatro conocidas y estas se pueden escribir en dos formas, diferencial e integral: El nombre de cada ley y su respectiva descripción física se en lista a continuación:

- **La ley de Gauss para los campos eléctricos:** El flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica neta encerrada [2].
- **La ley de Gauss para los campos magnéticos:** El flujo magnético neto a través de una superficie cerrada es cero [2].
- **La ley de inducción de Faraday:** Un flujo magnético variable induce un campo eléctrico [2].
- **La ley de Ampère - Maxwell:** Un flujo eléctrico variable o una corriente induce un campo magnético [2].

En el caso de las leyes de Gauss para los campos electromagnéticos son simétricas. Por otro lado, las últimas dos leyes son simétricas en que la línea de la integral de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son curvas cerradas relacionadas con el cambio de sus respectivos flujos.

La condición para que estas ecuaciones se cumplan es satisfacer el principio de la conservación de la carga eléctrica con apoyo de la ecuación de continuidad:

$$\langle \nabla, \vec{j} \rangle = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (49)$$

Esta ecuación permite que las ecuaciones de Maxwell se puedan calcular [5]. Para conocer las soluciones de ondas para las ecuaciones de Maxwell se supone que las ondas se propagan en el vacío y su forma es la de una onda viajera. Las siguientes ecuaciones expresan los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética en particular que se desplaza en la dirección  $x$  positiva:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{máx} \text{sen}(\kappa x - \omega t) \hat{y} \quad (50)$$

y

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_{máx} \text{sen}(\kappa x - \omega t) \hat{z}, \quad (51)$$

donde  $\kappa = 2\pi/\lambda$  es el número de onda y  $\omega = 2\pi f$  es la frecuencia angular de una onda con la longitud de onda  $\lambda$  y frecuencia  $f$  [2]. La magnitud de los campos electromagnéticos no es dependiente de su eje de coordenadas, sino de su respectivo eje de dirección (en este caso  $x$ ) y del tiempo  $t$ . Esta es una definición de onda plana. Los campos son perpendiculares entre sí a la dirección de propagación de onda.

Para complementar el ejemplo anterior es necesario introducir algunas propiedades de las ondas electromagnéticas:

- La onda es *transversal*; tanto  $\vec{E}$  como  $\vec{B}$  son perpendiculares a la dirección de onda y entre sí. La dirección es el producto cruz  $[\vec{E} \times \vec{B}]$ .
- Existe una razón definida entre las magnitudes de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ :  $E = cB$ .
- La onda electromagnética viaja en el vacío con rapidez definida y variable, es decir, a la velocidad de la luz  $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ .
- No requieren un medio de transmisión. La ondulación tiene su origen en los campos electromagnéticos.
- Las ondas electromagnéticas son polarizables, es por esta razón que un campo magnético es capaz de inducir un campo eléctrico y viceversa.

Para comprobar que las ecuaciones de onda 50 y 51 satisfacen las cuatro ecuaciones de Maxwell, se desarrollarán los cálculos y se aplicarán los conceptos de la teoría electromagnética a cada ley comentada. Se usarán las formas integrales en estas demostraciones.

**Ley de Gauss para campos eléctricos** Debido a que se supuso que la onda se encuentra en el vacío, no existe como tal una carga eléctrica encerrada, es decir, que  $q_{enc} = 0$  entonces la ecuación se satisface así:

$$\oint \langle \vec{E}, d\vec{A} \rangle = 0. \quad (52)$$

Se toma una superficie gaussiana que encierre una onda electromagnética donde sus campos sean perpendiculares entre ellos y la dirección de propagación. El vector  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  son perpendiculares entre sí.

**Ley de Gauss para campos magnéticos** Para esta ecuación nuevamente se elige una superficie gaussiana como la anterior para realizar la integración,

$$\oint \langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle = 0, \quad (53)$$

donde el producto punto  $\langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle$  es igual a cero debido a una de las propiedades del producto escalar, por lo tanto esta demostración y la previa son directas.

**Ley de inducción de Faraday** Para la demostración de la ley de Faraday, se supone una trayectoria cerrada en plano  $xy$  con un ancho  $dx$  y una altura  $h$  formando un rectángulo de con una trayectoria que inicia de  $a$ , pasa por  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y termina nuevamente en  $a$ . El diferencial de área del rectángulo  $d\vec{A} = \vec{n}dA = \vec{n}hdx$  con un vector unitario normal hacia la superficie,  $\vec{n}$ , en dirección  $z$  positiva [2]. Se recuerda que los campos electromagnéticos cambian en el eje de dirección de propagación  $x$  yendo de un punto  $x$  hasta  $x+dx$ , el campo eléctrico en función de  $x$  cambia de  $\vec{E}(x)$  a  $\vec{E}(x+dx) = \vec{E}(x) + d\vec{E}$ . Véase la Figura 1.

El cálculo de esta integral sobre la presente trayectoria sería en cuatro partes en dirección contraria de las manecillas del reloj. Las integraciones de  $b$  a  $c$  y de  $d$  a  $a$ , son cero por la propiedad del campo eléctrico al ser perpendicular a la dirección de integración y del producto escalar. Para las otras dos integrales se pueden reducir al producto punto convencional. Teniendo en cuenta la independencia del campo eléctrico con respecto al eje  $y$ , se puede extraer de cada integral quedando únicamente la magnitud del campo en la coordenada  $x$  y su longitud en el  $h$ . Luego, la integral negativa en la dirección de  $y$  se multiplica por  $-1$  debido a que  $\vec{E}$  es antiparalelo a la dirección de integración obteniendo

$$\oint \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = E \int_a^b ds - E \int_c^d ds = (E + dE)h - Eh = (dE)h.$$

El miembro derecho de esta ley es

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -A \frac{dB}{dt} = -h(dx) \left( \frac{dB}{dt} \right).$$

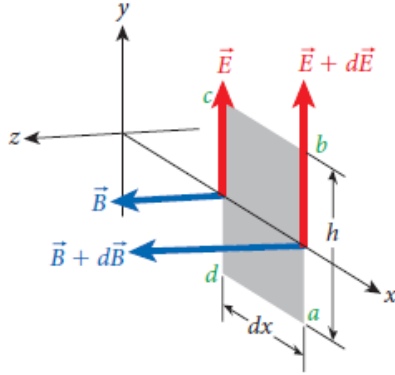


Figure 1: Campos electromagnéticos de una onda con sección de integración en el rectángulo que ilustra la dirección de integración para la ley de inducción de Faraday. Imagen extraída de Bauer, W., Westfall, G. D. (2014). *Física para ingenierías y ciencias con física moderna Volumen 2*. México: McGraw - Hill.

Entonces, como la onda depende de un tiempo  $dt$  y viaja a una distancia  $dx$ , resulta

$$h(dE) = -h(dx) \frac{dB}{dt}.$$

Eliminando términos semejantes y reacomodando

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$$

Como este proyecto hace uso de varias variables, el resultado anterior puede ser representado como derivadas parciales con respecto a  $x$  y  $t$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (54)$$

Es importante notar que ambos campos dependen de  $x$  y  $t$ . Aplicando las ecuaciones de onda 50 y 51 a estas derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (E_{máx} \text{sen}(\kappa x - \omega t)) = \kappa E_{máx} \text{cos}(\kappa x - \omega t) \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (B_{máx} \text{sen}(\kappa x - \omega t)) = -\omega B_{máx} \text{cos}(\kappa x - \omega t). \end{aligned}$$

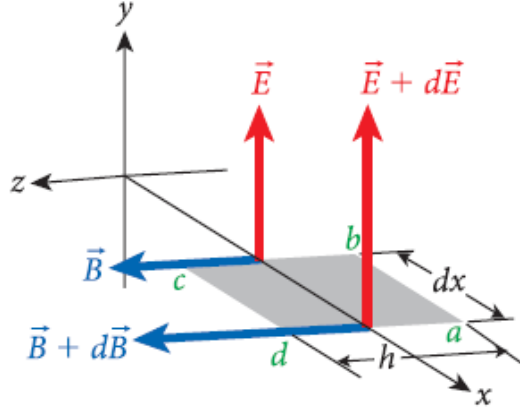


Figure 2: Campos electromagnéticos de una onda con sección de integración en el rectángulo que ilustra la dirección de integración para la ley de Ampère - Maxwell. Imagen extraída de Bauer, W., Westfall, G. D. (2014). *Física para ingenierías y ciencias con física moderna Volumen 2*. México: McGraw - Hill.

Sustituyendo en la ecuación 54

$$\kappa E_{m\acute{a}x} \cos(\kappa x - \omega t) = -[-\omega B_{m\acute{a}x} \cos(\kappa x - \omega t)].$$

Recordando la relación entre el número de onda y la frecuencia angular se obtiene lo siguiente

$$\frac{E_{m\acute{a}x}}{B_{m\acute{a}x}} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\lambda = c,$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Se puede concluir que la razón entre las magnitudes de un campo eléctrico y un campo magnético es igual a la velocidad de onda que viaja la luz. Matemáticamente,

$$\frac{E}{B} = \frac{|\vec{E}(\vec{r}, t)|}{|\vec{B}(\vec{r}, t)|} = \frac{E_{m\acute{a}x} |\text{sen}(\kappa x - \omega t)|}{B_{m\acute{a}x} |\text{sen}(\kappa x - \omega t)|} = c. \quad (55)$$

**Ley de Ampère - Maxwell** Una vez más es necesario proyectar una trayectoria cerrada pero ahora perpendicular a la comentada en la ley de Faraday. Véase la Figura 2.

En este caso el rectángulo tendrá su trayectoria en los ejes  $xz$  y su diferencial de área será en el eje  $y$  en dirección positiva. La dirección de integración será

otra vez antihorario.

$$\oint \langle \vec{B}, d\vec{s} \rangle = Bh - (B + dB)h = -dB(h).$$

Nuevamente, las trayectorias paralelas al eje de propagación no afectan la integración. Ocupando el miembro derecho de la ley, la ecuación toma la siguiente forma

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 h(dx) \frac{dE}{dt}.$$

Sustituyendo términos en los respectivos miembros

$$-h(dB) = \mu_0 \epsilon_0 h(dx) \frac{dE}{dt}.$$

Empleando derivadas parciales se produce

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (56)$$

Reemplazando e igualando con las ecuaciones de onda

$$-[\kappa B_{m\acute{a}x} \cos(\kappa x - \omega t)] = -\mu_0 \epsilon_0 \omega E_{m\acute{a}x} \cos(\kappa x - \omega t)$$

La razón entre los campos eléctrico y magnético

$$\frac{E_{m\acute{a}x}}{B_{m\acute{a}x}} = \frac{\kappa}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 c}.$$

Finalmente, se obtiene la razón de las magnitudes de los campos que cumplen la ecuación de Ampère - Maxwell

$$\frac{E}{B} = c. \quad (57)$$

Una notación importante es que haciendo uso del teorema de Gauss y del teorema de Stokes, las ecuaciones de Maxwell de forma diferencial se pueden calcular.

Otras propiedades y descripciones físicas de las ecuaciones de Maxwell se enlistan en breve como resumen de las implicaciones de las cuatro ecuaciones:

- Las ley de Gauss para campos eléctricos indica que las cargas eléctricas se mueven en el campo. [8].



- La ecuación para campos magnéticos representa que no hay cargas magnéticas o polos singulares.
- La ley de inducción describe que el campo magnético induce un campo eléctrico [8].
- Por último, la ley de Ampère describe el efecto que originado por las corrientes eléctricas en el magnetismo [8]. Es decir, que un campo eléctrico puede inducir un campo magnético.

## 2.13 Integrales de tipo Stratton -Chu

Aplicando el álgebra cuaterniónica en los números reales y complejos, el análisis vectorial, funciones armónicas, operador diferencial Moisil - Theodoresco y, el tema principal de esta tesis, las ecuaciones de Maxwell junto con la teoría electromagnética surge una extensión natural del concepto de la integral de tipo Cauchy a los campos electromagnéticos denominadas integrales de tipo Stratton - Chu.

Son llamadas integrales de radiación, las cuales dan a los campos eléctricos y magnéticos intensidades en un punto  $P$  conocidos por su distribución de corrientes eléctricas y magnéticas,  $\vec{J}$  y  $\vec{J}_m$ .

Estas integrales surgen apartir de un vector escalar del teorema de Green donde en una superficie  $S$  donde  $P$  y  $Q$  serán dos funciones de posición. Partiendo de una de las propiedades de identidad del teorema de Green, las integrales con las ecuaciones de Maxwell en la forma diferencial se expresan así

$$\vec{E}_s = \iint_{S'} [i\omega\mu(\hat{n} \times \vec{H})\psi + (\hat{n} \times \vec{E}) \times \vec{\nabla}\psi + (\langle \hat{n}, \vec{E} \rangle \vec{\nabla}\psi)] dS', \quad (58)$$

$$\vec{H}_s = \iint_{S'} [i\omega\mu(\hat{n} \times \vec{E})\psi - (\hat{n} \times \vec{H}) \times \vec{\nabla}\psi - (\langle \hat{n}, \vec{H} \rangle \vec{\nabla}\psi)] dS', \quad (59)$$

donde  $\psi = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}$  es una función del teorema de Green siendo esta una función esférica la cual está dada  $\frac{1}{R}$ .

Una interpretación física simple es que cualquier campo electromagnético al tener una distribución de corriente, sea esta una eléctrica o magnética (que sería ficticia), es posible ver el flujo respectivo en los puntos del campos y cómo se distribuye el flujo y a qué rapidez. Estas ecuaciones se obtienen del estudio realizado por J. A. Stratton y L. J. Chu en la difracción de ondas electromagnéticas [13].

### 2.13.1 Ecuaciones de Maxwell para medios homogéneos en la forma cuaterniónica

Las ecuaciones de Maxwell son consideradas ecuaciones constitutivas debido a que crean una relación de los vectores de campo e inducción como se verá

adelante [10].

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}), \quad (60)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}), \quad (61)$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E}, \vec{H}). \quad (62)$$

De las ecuaciones anteriores, se puede interpretar que la magnitud del campo eléctrico en una posición y en un tiempo determinado. De igual manera, esto ocurre en el caso del campo magnético y su respectiva magnitud. Antes de continuar, es necesario dar valores de las constantes  $\epsilon := \epsilon_0 \epsilon_r$  y  $\mu := \mu_0 \mu_r$  que son la permitividad y permeabilidad absoluta. También que en algunos casos los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$  cobran las siguientes formas para un medio material:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, \quad (63)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}. \quad (64)$$

Es importante notar que el fenómeno electromagnético en un medio es local y no inercial, esta última quiere decir que no depende del medio donde se encuentre y del historial temporal por el que haya pasado. Donde  $\vec{D}$  es el vector de intensidad eléctrica,  $\vec{B}$  es el vector de inducción magnética y  $\vec{J}$  es el vector de distribución de corriente eléctrica.

Cuando los campos tienen una variación temporal armónica, para simplificar los cálculos en los cuaternios complejos, se usa la ecuación de Euler:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha, \quad (65)$$

donde en este caso  $i = \sqrt{-1}$ . Una cantidad escalar se puede interpretar de esta manera:

$$v = \sqrt{2}|V| \cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(V e^{i\omega t}), \quad (66)$$

donde  $v$  es llamada la cantidad instantánea y  $V = |V| e^{i\alpha}$  es la cantidad compleja.  $V$  no es una función de tiempo pero sí de posición [7]. Esto es una explicación previa a lo que se desarrollará con cuaternios complejos.

Antes de iniciar, es necesario aclarar que se trabajará con campos electromagnéticos armónicos en el tiempo, es decir, que varía sinusoidalmente. El medio específico a suponer será homogéneo e isotrópico, es decir, que cualquier parte del volumen tendrá la misma inducción y la polarización y magnetización no dependen de la dirección del campo.

Considere la función

$$\mathbf{V} := \sqrt{\epsilon} \vec{E} + i \sqrt{\mu} \vec{H} \quad (67)$$

y las ecuaciones de Maxwell se reescriben de la siguiente manera [10].

$$\left( \frac{1}{c} \partial_t + iD \right) \mathbf{V} = - \left( \sqrt{\mu} \vec{j} + \frac{i\rho}{\sqrt{\epsilon}} \right), \quad (68)$$

donde  $D$  es el operador de Moisil - Theodoresco, entonces  $\mathbf{V}$  es una función  $\mathbf{V} = (\sqrt{\epsilon}\vec{E} + i\sqrt{\mu}\vec{H})$  perteneciente a  $\mathbb{R}^3$ . El término agregado a la izquierda de la función es el operador cuaterniónico de Maxwell

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right). \quad (69)$$

Entonces para verificar que las ecuaciones de Maxwell se pueden simplificar en el resultado de la Ecuación 68 el cálculo se desarrolla de esta forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right) (\sqrt{\epsilon}\vec{E} + i\sqrt{\mu}\vec{H}) &= (\sqrt{\epsilon}\sqrt{\mu}\partial_t + iD) (\sqrt{\epsilon}\vec{E} + i\sqrt{\mu}\vec{H}) \\ &= \epsilon\sqrt{\mu}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + i\mu\sqrt{\epsilon}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - i\sqrt{\epsilon} \langle \nabla, \vec{E} \rangle \\ &\quad + i\sqrt{\epsilon}[\nabla \times \vec{E}] + \sqrt{\mu} \langle \nabla, \vec{H} \rangle - \sqrt{\mu}[\nabla \times \vec{H}] \end{aligned}$$

y usando la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell, el resultado que se obtiene es

$$-\sqrt{\mu}\vec{j} - i\frac{\rho}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (70)$$

La Ecuación 70 es un resultado importante pues en el están contenidas las ecuaciones de Maxwell en los cuaternios complejos. Considerando esto, es visible la facilidad con la que el álgebra cuaterniónica compleja puede permitir operar en la teoría electromagnética debido a que términos extensos son simplificados y, de igual forma, mantienen sus propiedades escalares y vectoriales.

El álgebra cuaterniónica compleja en comparación con el álgebra real en  $\mathbb{R}^3$  mantiene simetría creando así una forma sencilla de trabajar con los problemas físicos que surjan en el mundo real.

Otra forma de emplear el operador es para factorizar el operador de onda:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta = \left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right) \left(\frac{1}{c}\partial_t - iD\right). \quad (71)$$

La factorización se logra con la definición del operador  $-\Delta = D^2$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + D^2 = \left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right) \left(\frac{1}{c}\partial_t - iD\right).$$

Entonces, cada solución de la solución de onda, como se vió antes, debe satisfacer

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right) u = 0,$$

donde  $u$  es la suma de dos funciones  $f$  y  $g$  las cuales satisfacen

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right) f = 0,$$

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t - iD\right)g = 0,$$

en el caso de  $g$  satisface la parte conjugada de la ecuación de onda.

Para finalizar, las ecuaciones de Maxwell resultantes en dominios homogéneos con  $\epsilon$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  (conductividad) quedan representadas así:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma \vec{E} + \vec{j}^e + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (72)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (73)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = 0, \quad (74)$$

$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = \frac{q + q^e}{\epsilon}, \quad (75)$$

donde  $\vec{j}^e$  y  $q^e$  son corrientes y cargas externas o extrañas del medio estudiado. En la Ecuación 72 se usa la ley de Ohm

### 2.13.2 Aplicación del operador cuaterniónico de Maxwell en una carga móvil

Las cargas eléctricas dependiendo de si son positivas o negativas, poseen un campo eléctrico. Si la carga es positiva la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  se alejará de dicha carga. Por el contrario, si la carga es negativa, la dirección de su campo será atrayente hacia ella. Sin embargo, si la carga eléctrica se encuentra en movimiento con una velocidad  $\vec{v}(t)$  y con una densidad de carga  $\rho$ , que es la cantidad carga eléctrica que existe por unidad de longitud, la expresión respecto a velocidad y tiempo será la siguiente

$$\rho(x, t) = q\delta(x - s(t)),$$

donde  $s$  es una trayectoria de la carga en cuestión, y el vector de densidad de corriente  $\vec{j}$  que en este trabajo se escribirá también función de  $(x, t)$

$$\vec{j} = \vec{v}(t)\rho(x, t),$$

este vector surge de considerar que una corriente circula por un conductor y, luego se conta perpendicularmente un área del conductor y la corriente que pasa por unidad de área se le conoce como densidad de corriente [2], es decir,

$$i = \int \langle \vec{j}, d\vec{A} \rangle,$$

aunque los electrones que están circulando dentro del conductor también llevan una velocidad, mejor conocida como velocidad de arrastre  $\vec{v}_d$ , la cual tendrá una dirección opuesta al campo eléctrico generado por la corriente eléctrica.

Haciendo una analogía de la expresión previa con la obtenida en función de  $x$  y  $t$ , se pueden realizar los siguientes cálculos:

$$j(x, t) = \frac{i}{A} = -nev_d A,$$

ahora regresando la densidad de corriente a su forma vectorial

$$\begin{aligned}\vec{j}(x, t) &= -(ne)\vec{v}_d, \\ \vec{j}(x, t) &= \vec{v}(t)\rho(x, t),\end{aligned}$$

concluyendo así la semejanza entre ellas. Entonces, la Ecuación 71 tiene una solución que corresponde con la ecuación de onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)u(x, t) = A(t)\delta(x - s(t)). \quad (76)$$

Introduciendo nuevamente el operador cuaterniónico en la electrostática, para encontrar un campo electromagnético generado por una carga, como se introdujo al inicio de esta subsección, una función cuaterniónica compleja  $u(x, t)$  que está dado:

$$u(x, t) = \frac{A(\tau(t))}{4\pi\sqrt{\epsilon}|x - s(\tau(t))|(1 - M(\tau(t)))},$$

donde  $M$  es el número Mach es una medida que sirve para describir la velocidad del sonido en los aviones, sin embargo, en este caso se definirá para electromagnetismo de esta manera:

$$M(\tau) := \frac{\langle \vec{v}(\tau), x - s(\tau) \rangle}{c|x - s(\tau)|},$$

donde  $\tau$  es una función y satisface la ecuación

$$\frac{|x - s(\tau)|}{c} - (t - \tau) = 0.$$

Retomando la Ecuación 68 con  $\rho$  y  $\vec{j}$ , el término derecho se reescribe de la siguiente manera

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right)\mathbf{V} = -\left(\sqrt{\mu}\vec{v}(t)q + \frac{iq}{\sqrt{\epsilon}}\right)\delta(x - s(t)). \quad (77)$$

Ahora tomando, el biquaternio vectorial

$$\mathbf{V}(x, t) = \left(\frac{1}{c}\partial_t - iD\right)u(x, t),$$

se probará si es una solución para la Ecuación 77 al igual que la Ecuación 76 tiene como solución  $u(x, t)$ , y la amplitud  $A$  está en función del tiempo

$$A(t) = - \left( \sqrt{\mu} \vec{v}(t) q + \frac{iq}{\sqrt{\epsilon}} \right).$$

Es importante que  $A$  y  $u$  son ambas funciones cuaterniónicas complejas. Por lo que al tener en consideración de  $u$  y aplicando las cantidades físicas esa función

$$u_0(x, t) = - \frac{iq}{4\pi\sqrt{\epsilon}|x - s(\tau(t))|(1 - M(\tau(t)))},$$

y ahora como una función vectorial

$$\vec{u}(x, t) = - \frac{\sqrt{\mu} \vec{v}(\tau(t))}{4\pi|x - s(\tau(t))|(1 - M(\tau(t)))}.$$

Por lo tanto, la Ecuación 77 brinda una simplificación, donde la función  $\mathbf{V}$  se resume en una diferenciación. Entonces, la solución dada 77 y se llega a esta expresión

$$\mathbf{V} = - \left( \frac{1}{c} \partial_t - iD \right) \left( \left( \frac{iq}{4\pi\sqrt{\epsilon}} + \frac{\sqrt{\mu} q \vec{v}(\tau(t))}{4\pi} \right) \frac{1}{|x - s(\tau(t))|(1 - M(\tau(t)))} \right).$$

Con la finalidad de reducir la expresión, se introducen las funciones auxiliares

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{|x - s(\tau(t))|(1 - M(\tau(t)))}, \\ f &= \frac{iq}{4\pi\sqrt{\epsilon}} + \frac{\sqrt{\mu} q \vec{v}(\tau(t))}{4\pi}. \end{aligned}$$

con esto se puede reducir la función  $\mathbf{V}$  se simplifica

$$\mathbf{V} = - \left( \frac{1}{c} \partial_t - iD \right) [f] \varphi - \left( \frac{1}{c} \partial_t - iD \right) [\varphi] f, \quad (78)$$

como se puede ver la función será igual a cero. Por lo que más adelante se darán las siguientes fórmulas. Iniciando con  $\tau$

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{1}{1 - M}, \\ \tau''(t) &= \frac{1}{c|x - s|(1 - M)^3} (c^2 M^2 + \langle s'', x - s \rangle - |s'|^2), \end{aligned}$$

ahora aplicando el operador gradiente a  $\tau$

$$\nabla\tau = -\frac{1}{c(1-M)} \frac{x-s}{|x-s|},$$

y el operador Moisil - Theodoresco empleandoló en la función  $\varphi$ , se escribe de esta manera

$$\partial_t\varphi = \frac{\tau''(t)}{|x-s|} + \frac{cM}{|x-s|^2(1-M)^2}$$

entonces con estas operaciones, al obtener el gradiente de la función  $\varphi$ , tomará la siguiente estructura

$$\nabla\varphi = -\frac{x-s}{|x-s|^3} \frac{M+1}{(1-M)^2} + \frac{1}{c|x-s|^2} \left( \frac{\vec{v}(\tau)}{(1-M)^2} - (x-s)\tau'' \right),$$

Esta última ecuación, va a dirigir el cálculo de  $\mathbf{V}$  a su parte vectorial la cual es una solución que, nuevamente, contiene en ella las ecuaciones de Maxwell. Análogamente, la ecuación 68 mantiene una estructura similar a las expresiones mostradas. Por lo tanto, la parte vectorial de  $\mathbf{V}$  se expresa así

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{c} \left( \partial_t \vec{f}\varphi + \partial_t \varphi \vec{f} \right) + i\varphi[\nabla \times \vec{f}] + if_o \nabla\varphi + i[\nabla\varphi \times \vec{f}].$$

Sustituyendo en la ecuación 67, el campo eléctrico se plantea así

$$\sqrt{\epsilon}\vec{E} = -\frac{1}{c} \left( \partial_t \vec{f}\varphi + \partial_t \varphi \vec{f} \right) - \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon}} \nabla\varphi,$$

y el campo magnético

$$\sqrt{\mu}\vec{H} = \varphi[\nabla \times \vec{f}] + [\nabla\varphi \times \vec{f}],$$

como se puede ver ambos términos son las partes vectoriales del operador de Moisil - Theodoresco en cada tipo de campo. Sin embargo, para hacer esto más explícito se ponen estos términos en igualdad con los siguientes conceptos

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{f} &= \frac{\sqrt{\mu}q}{4\pi} \frac{\vec{v}'(\tau)}{1 - M(\tau)}, \\ [\nabla \times \vec{f}] &= \frac{\sqrt{\mu}q}{4\pi} [\nabla \tau \times \vec{v}'(\tau)], \\ [\nabla \varphi \times \vec{f}] &= -\frac{\sqrt{\mu}q}{4\pi} \frac{[(x-s) \times \vec{v}']}{c^2|x-s|^3(1-M)^3} (c^2 + \langle \vec{v}', x-s \rangle - |\vec{v}'|^2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la carga eléctrica móvil tiene como solución estas ecuaciones para campos eléctricos y magnéticos,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\sqrt{\mu}q}{4\pi} \left( \frac{\vec{v}'}{|x-s|(1-M)^2} + \left( \frac{|\vec{v}'| |x-s| - c(x-s)}{c|x-s|^3(1-M)^3} \right) (c^2 + \langle \vec{v}', x-s \rangle - |\vec{v}'|^2) \right), \\ \vec{H} &= -\frac{q}{4\pi} \left( \frac{[(x-s) \times \vec{v}']}{c|x-s|^2(1-M)^2} + \frac{[(x-s) \times \vec{v}']}{c^2|x-s|^3(1-M)^3} (c^2 + \langle \vec{v}', x-s \rangle - |\vec{v}'|^2) \right).\end{aligned}$$

## 2.14 Ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo

Esta es una de las secciones fundamentales de esta investigación debido a que las ecuaciones de la teoría electromagnética armónicas en el tiempo se enlazarán con las ecuaciones radiales Stratton - Chu mencionadas en la sección 1.14.

Los campos electromagnéticos armónicos en el tiempo se refiere a que los campos son monocromáticos (tienen la misma frecuencia). Matemáticamente, haciendo uso de la transformada de Fourier (para la parte real de los campos electromagnéticos), uno de estos campos se escribe así

$$\vec{E}(x, t) = \text{Re}(\vec{E}(x)e^{-i\omega t}), \quad (79)$$

$$\vec{H}(x, t) = \text{Re}(\vec{H}(x)e^{-i\omega t}), \quad (80)$$

donde como se puede observar las partes reales de los campos electromagnéticos son dependientes de la posición del campo, mientras que, el tiempo se encuentra en el factor exponencial. Ambas funciones vectoriales son vectores complejos con amplitudes complejas y, una frecuencia  $\omega$  cualquiera.

Ahora, sustituyendo en las ecuaciones 79 y 80, resultarán las amplitudes del campo eléctrico y magnéticos, y las ecuaciones de Maxwell se simplifican de esta manera:

$$[\nabla \times \vec{H}] = -i\omega\epsilon\vec{E} + \vec{j}, \quad (81)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = i\omega\mu\vec{H}, \quad (82)$$



$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (83)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = 0. \quad (84)$$

Ahora, para las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo se deben obtener ecuaciones que satisfagan las siguientes dos ecuaciones cuaterniónicas:

$$D\vec{E} = i\omega\mu\vec{H} - \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (85)$$

$$D\vec{H} = -i\omega\mu\vec{E} + \vec{j}, \quad (86)$$

estas ecuaciones permiten reducir los cálculos de las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo y se pueden representar de forma matricial como se verá más adelante. Entonces, a partir de las ecuaciones 85 y 86 se deben encontrar dos funciones bicuaterniónicas que satisfagan las relaciones

$$(D - \alpha)\vec{\varphi} = \langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}, \quad (87)$$

$$(D + \alpha)\vec{\psi} = -\langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}, \quad (88)$$

donde  $D$  es el operador de Moisil - Theodoresco,  $\alpha$  es el número de onda y se define como  $\alpha := \omega\sqrt{\epsilon\mu}$  donde su raíz es  $Im\alpha \geq 0$ . Las ecuaciones 87 y 88 introducen dos funciones bicuaterniónicas vectoriales que están definidas como

$$\vec{\varphi} := -i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha\vec{H},$$

$$\vec{\psi} := i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}.$$

Estas funciones bicuaterniónicas para medios homogéneos son una reformulación de las vistas en [9]. Por lo tanto, las ecuaciones 87 y 88 deben contener las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo; este cálculo se realizará partiendo de estas ecuaciones y de la definición de las funciones bicuaterniónicas:

$$\begin{aligned} \langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j} &= (D - \alpha)\vec{\varphi} \\ &= D\vec{\varphi} - \alpha\vec{\varphi}, \\ &= -\langle \nabla, \varphi \rangle + [\nabla \times \varphi] - \alpha\vec{\varphi}, \\ &= -\langle \nabla, (-i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}) \rangle + [\nabla \times (-i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha\vec{H})] - \\ &\quad - \alpha(-i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}), \\ &= -\langle \nabla, -i\omega\epsilon\vec{E} \rangle - \langle \nabla, \alpha\vec{H} \rangle + [\nabla \times -i\omega\epsilon\vec{E}] + \\ &\quad + [\nabla \times \alpha\vec{H}] + \alpha i\omega\epsilon\vec{E} - \alpha^2\vec{H}, \\ &= i\omega\epsilon\langle \nabla, \vec{E} \rangle - \alpha\langle \nabla, \vec{H} \rangle - i\omega\epsilon[\nabla \times \vec{E}] + \alpha[\nabla \times \vec{H}] + \\ &\quad + \alpha i\omega\epsilon\vec{E} - \alpha^2\vec{H}, \end{aligned}$$

como se puede observar en este último renglón se encuentran las cuatro ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial. A continuación, se verán como las ecuaciones 85 y 86 se producen. Entonces, tomando las igualdades de las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}
&= i\omega\epsilon\frac{\rho}{\epsilon} - 0 - i\omega\epsilon(i\omega\mu\vec{H}) + \alpha\vec{j} - \alpha i\omega\epsilon\vec{E} - \alpha^2\vec{H}, \\
&= -i\omega\epsilon\left(i\omega\mu\vec{H} - \frac{\rho}{\epsilon}\right) + \alpha(-i\omega\epsilon\vec{E} + \vec{j}) - \alpha^2\vec{H}, \\
&= -i\omega\epsilon D\vec{E} + \alpha D\vec{H} - \alpha^2\vec{H}.
\end{aligned}$$

Como se puede ver la función  $\vec{\varphi}$  satisfacen la Ecuación 87 y, las ecuaciones cuaterniónicas 85 y 86 están implícitas en la Ecuación 87. Ahora, se comprobará que la función bicuaterniónica  $\vec{\psi}$  también satisface la Ecuación 88

$$\begin{aligned}
- \langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j} &= (D + \alpha)\vec{\psi} \\
&= D\vec{\psi} + \alpha\vec{\psi}, \\
&= - \langle \nabla, \psi \rangle + [\nabla \times \psi] - \alpha\vec{\psi}, \\
&= - \langle \nabla, (i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}) \rangle + [\nabla \times (i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha\vec{H})] - \\
&\quad - \alpha(i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}), \\
&= - \langle \nabla, i\omega\epsilon\vec{E} \rangle - \langle \nabla, \alpha\vec{H} \rangle + [\nabla \times i\omega\epsilon\vec{E}] + \\
&\quad + [\nabla \times \alpha\vec{H}] + \alpha i\omega\epsilon\vec{E} - \alpha^2\vec{H}, \\
&= -i\omega\epsilon \langle \nabla, \vec{E} \rangle - \alpha \langle \nabla, \vec{H} \rangle + i\omega\epsilon[\nabla \times \vec{E}] + \alpha[\nabla \times \vec{H}] + \\
&\quad + \alpha i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha^2\vec{H}, \\
&= -i\omega\epsilon\frac{\rho}{\epsilon} - 0 + i\omega\epsilon(i\omega\mu\vec{H}) + \alpha(-i\omega\epsilon\vec{E} + \vec{j}) + \alpha i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha^2\vec{H}, \\
&= i\omega\epsilon\left(i\omega\mu\vec{H} - \frac{\rho}{\epsilon}\right) + \alpha\vec{j} - \alpha i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha i\omega\epsilon\vec{E} + \alpha^2\vec{H}, \\
&= i\omega\epsilon\left(i\omega\mu\vec{H} - \frac{\rho}{\epsilon}\right) + \alpha\vec{j} + \alpha^2\vec{H}.
\end{aligned}$$

De esta forma, se concluye que las ecuaciones 85 y 86 son la representación de las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo en la forma bicuaterniónica, o bien, cuaterniónica compleja. Y, por otro lado, las ecuaciones 87 y 88 son el operador de Maxwell armónico en el tiempo, el cual se usará de forma matricial en la siguiente sección para observar de forma clara el proceso de diagonalización con matrices.

### 2.14.1 Operador de Maxwell cuaterniónico en el tiempo de forma matricial

Con las ecuaciones 87 y 88 se lograron obtener dos ecuaciones que, junto con el operador de Moisil - Theodoresco, contenían en ellas las cuatro ecuaciones de Maxwell. Este mismo proceder como se mencionó previamente, puede aplicarse en forma de matrices otorgando algunas ventajas en los cálculos. Primero, se procede a diagonalizar la matriz

$$\begin{pmatrix} D & -i\omega\mu \\ i\omega\epsilon & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix},$$

donde la matriz que se encuentra a la izquierda es el operador cuaterniónico de Maxwell matricial y la otra matriz incluye los vectores del campo eléctrico y magnético. Entonces, para diagonalizar el operador matricial se procede así:

$$\begin{pmatrix} D & -i\omega\mu \\ i\omega\epsilon & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = B_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} D - \alpha & 0 \\ 0 & D + \alpha \end{pmatrix} B_\alpha \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix},$$

donde la matriz  $B_\alpha$  y su inversa son

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} -i\omega\epsilon & \alpha \\ i\omega\epsilon & \alpha \end{pmatrix}, B_\alpha^{-1} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/i\omega\epsilon & 1/i\omega\epsilon \\ 1/\alpha & 1/\alpha \end{pmatrix}.$$

Como se puede ver en la parte de diagonalización, las entradas  $D - \alpha$  y  $D + \alpha$  son aquellas que se usaron con las funciones bicuaterniónicas vectoriales  $\vec{\psi}$  y  $\vec{\varphi}$  que brindaron la simplificación durante el análisis de las ecuaciones de Maxwell y que, a su vez, representan una solución propia del análisis complejo.

Ahora, recordando que los números complejos siempre presentan dos soluciones que consisten en la solución general y el conjugado de esta; el operador de Maxwell cuaterniónico armónico en el tiempo tiene su conjugado. Así como las ecuaciones 87 y 88 son la misma solución, lo único que cambia es que una es conjugada de la otra, entonces el conjugado del operado matricial se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} D & -i\omega\mu \\ i\omega\epsilon & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & i\omega\mu \\ -i\omega\epsilon & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^2 - \omega^2\mu\epsilon & 0 \\ 0 & \omega^2\mu\epsilon + D^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\Delta - \alpha^2 & 0 \\ 0 & -\Delta + \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Con el fin de que el operador de Helmholtz sea positivo se puede mutltiplicar un  $-1$  en la matriz final y lograr así esta matriz

$$\begin{pmatrix} \Delta + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \Delta - \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Este operador matricial resultante se puede ver que contiene en su diagonal principal el operado de Hemholtz donde en una entrada tiene las soluciones cuando se aplica en cierto orden, mientras que en la otra entrada son las mismas soluciones pero con inverso orden. A esta matriz se le denominará como el *operador conjugado de Maxwell armónico en el tiempo*.

A continuación, retomando las representaciones integrales presentadas, principalmente la fórmula cuaterniónica de Borel - Pompeiu, junto con el operador T y el operador de Moisil - Theodoresco en conjunto con las dos funciones bicuaterniónicas vectoriales 87 y 88. Primero, se resuelve la ecuación para el operador de Moisil - Theodoresco de 87

$$\begin{aligned}(D - \alpha)\vec{\varphi} &= \langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}, \\ D_{-\alpha}\vec{\varphi} &= \langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j},\end{aligned}$$

en este paso lo único que se realizó es una reescritura para facilitar la aplicación del teorema de Borel - Pompeiu. Entonces, teniendo este término, la función  $\vec{\varphi}$  al aplicar Borel - Pompeiu, se obtiene

$$\vec{\varphi} = K_{-\alpha}\vec{\varphi} + T_{-\alpha}D_{-\alpha}\vec{\varphi},$$

y sustituyendo en el último término

$$\vec{\varphi} = K_{-\alpha}\vec{\varphi} + T_{-\alpha}[\langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}]. \quad (89)$$

Esta es la reescritura de la función bicuaterniónica vectorial con el teorema de Borel - Pompeiu. De igual forma, se empleará para la ecuación 88. Nuevamente, se resuelve para el operador Moisil - Theodoresco

$$\begin{aligned}(D + \alpha)\vec{\psi} &= - \langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}, \\ D_{\alpha}\vec{\psi} &= - \langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j},\end{aligned}$$

luego, se aplica Borel - Pompeiu

$$\vec{\psi} = K_{\alpha}\vec{\psi} + T_{\alpha}D_{\alpha}\vec{\psi},$$

y, por último, se sustituye el término

$$\vec{\psi} = K_{\alpha}\vec{\psi} + T_{\alpha}[- \langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}]. \quad (90)$$

Ahora, ya se tiene la segunda reescritura de la función bicuaterniónica vectorial 88 con Borel - Pompeiu. Estas ecuaciones pueden reescribirse nuevamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
-i\omega\varepsilon\vec{E} + \alpha\vec{H} &= T_{-\alpha}(\langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}) + K_{-\alpha}(-i\omega\varepsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}), \\
i\omega\varepsilon\vec{E} + \alpha\vec{H} &= T_{\alpha}(-\langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}) + K_{\alpha}(i\omega\varepsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}),
\end{aligned}$$

aquí sólo se sustituyó por la definición de las funciones bicuaterniónicas vectoriales  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$  y, luego se puede obtener un campo electromagnético resolviendo este sistema de ecuaciones. Primero, puede resolverse para  $\vec{H}$  por método de suma - resta eliminando el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
2\alpha\vec{H} &= T_{-\alpha}(\langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}) + K_{-\alpha}(-i\omega\varepsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}) + \\
&\quad T_{\alpha}(-\langle \nabla, \vec{j} \rangle + \alpha\vec{j}) + K_{\alpha}(i\omega\varepsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}), \\
2\alpha\vec{H} &= \alpha\vec{H}(K_{\alpha} + K_{-\alpha}) + i\omega\varepsilon\vec{E}(K_{\alpha} - K_{-\alpha}) + \\
&\quad \langle \nabla, \vec{j} \rangle (T_{-\alpha} - T_{\alpha}) + \alpha\vec{j}(T_{-\alpha} + T_{\alpha}),
\end{aligned}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2\alpha} \langle \alpha\vec{H}(K_{\alpha} + K_{-\alpha}) + i\omega\varepsilon\vec{E}(K_{\alpha} - K_{-\alpha}) + \langle \nabla, \vec{j} \rangle (T_{-\alpha} - T_{\alpha}) + \alpha\vec{j}(T_{-\alpha} + T_{\alpha}) \rangle \quad (91)$$

Sustituyendo el campo magnético  $\vec{H}$  en una de las ecuaciones, se resuelve para el campo eléctrico que quedará expresado de una forma semejante

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{2\omega\varepsilon} \left\langle \alpha\vec{H}(K_{\alpha} - K_{-\alpha}) + i\omega\varepsilon\vec{E}(K_{\alpha} + K_{-\alpha}) + \right. \\
&\quad \left. + \langle \nabla, \vec{j} \rangle (-T_{-\alpha} - T_{\alpha}) + \alpha\vec{j}(T_{\alpha} - T_{-\alpha}) \right\rangle. \quad (92)
\end{aligned}$$

Ahora, se prosigue a términos vectoriales ya conocidas y tratadas en las representaciones integrales antes. Iniciando con el operador integral de Cauchy y con el kernel de Cauchy cuaterniónico y usando la relación del kernel de Cauchy

$$\mathcal{K}_{\alpha}(x) = -\nabla\vartheta(x) + \alpha\vartheta(x),$$

y aplicandó en el operador integral de Cauchy

$$K_{+\alpha}\vec{f}(x) = - \int_{\Gamma} \{ \alpha\vartheta(x-y) - \text{grad}_x\vartheta(x-y) \} \vec{n}(y) \vec{f}(y) d\Gamma_y,$$

y como  $\vec{f}(y)$  es una función puramente vectorial y  $\vec{n}$  un vector normal en forma cuaterniónica, se opera en un producto cuaterniónico sin parte escalar, por lo que la integral se transforma así

$$K_{+\alpha}\vec{f}(x) = - \int_{\Gamma} \{ \alpha\vartheta(x-y)\vec{n}(y)\vec{f}(y) - \text{grad}_x\vartheta(x-y)\vec{n}(y)\vec{f}(y) \} d\Gamma_y,$$

para el primer término se usa la reescritura del producto cuaterniónico de  $\vec{n}(y)\vec{f}(y)$  y de igual forma se aplica para la segunda parte, pero aplicando el producto cuaterniónico en  $-\text{grad}_x\vartheta(x-y)\vec{n}(y)$

$$K_{+\alpha}\vec{f}(x) = \int_{\Gamma} (\alpha\vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{f}(y) \rangle - \alpha\vartheta(x-y)[\vec{n}(y) \times \vec{f}(y)] - \\ + (- \langle \text{grad}_x\vartheta(x-y), \vec{n}(y) \rangle + [\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)])\vec{f}(y)) d\Gamma_y.$$

Nuevamente, se aplica el producto cuaterniónico de la parte de  $-\text{grad}_x\vartheta(x-y)\vec{n}(y)$  con  $\vec{f}(y)$

$$K_{+\alpha}\vec{f}(x) = \int_{\Gamma} (\alpha\vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{f}(y) \rangle - \alpha\vartheta(x-y)[\vec{n}(y) \times \vec{f}(y)] - \\ - \langle \text{grad}_x\vartheta(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{f}(y) - \langle [\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{f}(y) \rangle + \\ + [[\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{f}(y)]) d\Gamma_y.$$

Ahora se realiza lo mismo para cuando  $K_{-\alpha}$ , donde se obtiene un resultado semejante pero con signos contrarios:

$$K_{-\alpha}\vec{f}(x) = \int_{\Gamma} (-\alpha\vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{f}(y) \rangle + \alpha\vartheta(x-y)[\vec{n}(y) \times \vec{f}(y)] - \\ - \langle \text{grad}_x\vartheta(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{f}(y) - \langle [\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{f}(y) \rangle + \\ + + [[\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{f}(y)]) d\Gamma_y.$$

A continuación, se realizan algunas operaciones del operador integral de Cauchy:

$$(K_{+\alpha} + K_{-\alpha})\vec{f}(x) = 2 \int_{\Gamma} (- \langle \text{grad}_x\vartheta(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{f}(y) - \\ - \langle [\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{f}(y) \rangle + \\ + [[\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{f}(y)]) d\Gamma_y,$$

$$(K_{+\alpha} - K_{-\alpha})\vec{f}(x) = 2 \int_{\Gamma} (\alpha\vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{f}(y) \rangle - \\ - \alpha\vartheta(x-y)[\vec{n}(y) \times \vec{f}(y)]) d\Gamma_y.$$

El mismo procedimiento realizado para el operador integral de Cauchy se realiza para el operador  $T$  y, nuevamente para cuando es  $+\alpha$  y  $-\alpha$

$$\begin{aligned} T_{+\alpha}\vec{f}(x) &= \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\alpha}(x-y)\vec{f}(y)dy \\ &= \int_{\Omega} ((-grad_x\vartheta(x-y) + \alpha\vartheta(x-y))\vec{f}(y))dy \\ &= \int_{\Omega} (-grad_x\vartheta(x-y)\vec{f}(y) + \alpha\vartheta(x-y)\vec{f}(y))dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{-\alpha}\vec{f}(x) &= \int_{\Omega} \mathcal{K}_{-\alpha}(x-y)\vec{f}(y)dy \\ &= \int_{\Omega} ((-grad_x\vartheta(x-y) - \alpha\vartheta(x-y))\vec{f}(y))dy \\ &= \int_{\Omega} (-grad_x\vartheta(x-y)\vec{f}(y) - \alpha\vartheta(x-y)\vec{f}(y))dy \end{aligned}$$

Teniendo estos resultados del operador  $T$ , se realizan las siguientes operaciones:  $f_0(x)$  y  $\vec{f}(x)$ .

$$(T_{+\alpha} + T_{-\alpha})f_0(x) = \int_{\Omega} (-2grad_x\vartheta(x-y)\vec{f}(y))dy,$$

$$(T_{+\alpha} - T_{-\alpha})f_0(x) = \int_{\Omega} (2\alpha\vartheta(x-y)f_0(y))dy,$$

$$(T_{+\alpha} + T_{-\alpha})\vec{f}(x) = \int_{\Omega} (2 \langle grad_x\vartheta(x-y), \vec{f}(x) \rangle - 2[grad_x\vartheta(x-y) \times \vec{f}(y)])dy,$$

$$(T_{+\alpha} - T_{-\alpha})\vec{f}(x) = \int_{\Omega} (2\alpha\vartheta(x-y)\vec{f}(y))dy.$$

Entonces, retomando las expresiones del campo eléctrico y magnético después de aplicarse las ecuaciones 92 y 91, se sustituyen las representaciones

integrales por las evaluaciones previamente calculadas. Por lo que, el campo eléctrico se obtiene de la siguiente manera al usar las representaciones integrales:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x) = & \int_{\Gamma} (- \langle [\text{grad}_x \vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{E}(y) \rangle - \\
& - \langle \text{grad}_x \vartheta(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{E}(y) + [[\text{grad}_x \vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{E}(y)]) d\Gamma_y - \\
& - i\omega\mu \int_{\Gamma} (\vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{H}(y) \rangle - \vartheta(x-y) [\vec{n}(y) \times \vec{H}(y)]) d\Gamma_y + \\
& + \int_{\Omega} (\frac{1}{i\omega\epsilon} \text{grad}_x \vartheta(x-y) \langle \nabla, \vec{j} \rangle - i\omega\mu \vartheta(x-y) \vec{j}) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}(x) = & \int_{\Gamma} (- \langle [\text{grad}_x \vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{H}(y) \rangle - \\
& - \langle \text{grad}_x \vartheta(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{H}(y) + [[\text{grad}_x \vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{H}(y)]) d\Gamma_y + \\
& + i\omega\epsilon \int_{\Gamma} (\vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{E}(y) \rangle - \vartheta(x-y) [\vec{n}(y) \times \vec{E}(y)]) d\Gamma_y - \\
& - \int_{\Omega} (\vartheta(x-y) \langle \nabla, \vec{j}(y) \rangle - \langle \text{grad}_x \vartheta(x-y), \vec{j}(y) \rangle + \\
& + [\text{grad}_x \vartheta(x-y) \times \vec{j}(y)]) dy
\end{aligned}$$

A continuación, se separan las partes escalares y partes vectoriales teniendo los campos eléctricos y magnéticos y se calcularan cuatro ecuaciones:

$$\int_{\Gamma} (\langle [\text{grad}_x \vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{E}(y) \rangle + i\omega\mu \vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{H}(y) \rangle) d\Gamma_y = 0, \quad (93)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} (\langle [\text{grad}_x \vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{H}(y) \rangle - i\omega\mu \vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{E}(y) \rangle) d\Gamma_y = \\
& = - \int_{\Omega} (\vartheta(x-y) \langle \nabla, \vec{j}(y) \rangle - \langle \text{grad}_x \vartheta(x-y), \vec{j}(y) \rangle) dy \quad (94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x) = & \int_{\Gamma} (- \langle \text{grad}_x \vartheta(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{E}(y) + [[\text{grad}_x \vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{E}(y)] + \\
& + i\omega\mu \vartheta(x-y) [\vec{n}(y) \times \vec{H}(y)]) d\Gamma_y + \int_{\Omega} (\frac{1}{i\omega\epsilon} \text{grad}_x \vartheta(x-y) \langle \nabla, \vec{j}(y) \rangle -
\end{aligned}$$



$$-i\omega\mu\vartheta(x-y)\vec{j}(y)dy \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(x) = \int_{\Gamma} (-\langle \text{grad}_x\vartheta(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{H}(y) + [[\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{H}(y)] - \\ -i\omega\epsilon\vartheta(x-y)[\vec{n}(y) \times \vec{E}(y)])D\Gamma_y - \int_{\Omega} [\text{grad}_x\vartheta(x-y) \times \vec{j}(y)]dy \quad (96) \end{aligned}$$

Las ecuaciones 95 y 96 son las fórmulas de Stratton - Chu que son ecuaciones de campo para dominios con frontera usadas en la electrodinámica moderna debido al tipo de empleo en que se tiene al trabajar en electromagnetismo donde, generalmente, se utilizan campos como interpretación física de los fenómenos de esta rama física. Son semejantes a las integrales de Cauchy, pero estas integrales junto con los campos electromagnéticos se convierten en las previamente nombradas [11].

Continuando con la relación matemática que tienen las ecuaciones de Stratton - Chu y las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones 93 y 94 son aplicables las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo 81 y 82 que junto con la identidad auxiliar vectorial

$$\int_{\Gamma} (\langle \text{grad}_x\vartheta(x-y), [\vec{n}(y) \times \vec{f}(y)] \rangle + \vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), [\nabla \times \vec{f}(y)] \rangle) d\Gamma_y = 0. \quad (97)$$

A partir de la propiedad vectorial previa es obvia su conexión con las dos ecuaciones de Maxwell mencionadas donde simplemente se sustituye la función vectorial  $\vec{f}(y)$  por el tipo de campo físico que se considere emplear. No obstante, para la Ecuación 94 se requiere el uso del teorema de Gauss para los términos resultantes. El teorema de la divergencia de Gauss, recuerde, relaciona la integración de superficies y volúmenes, por lo que  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  y  $\Gamma$  es una superficie de Liapunov lo cual brinda diversas igualdades con respecto al resultado de la Ecuación 94

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\vartheta(x-y)\text{div}_y\vec{j}(y) + \langle \text{grad}_y\vartheta(x-y), \vec{j}(y) \rangle) dy = \int_{\Omega} \text{div}_y[\vartheta(x-y)\vec{j}(y)] dy \\ = \int_{\Gamma} \vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{j}(y) \rangle d\Gamma_y. \end{aligned}$$

Entonces, lo aplicado para la Ecuación 82, se aplica para el campo magnético que es la Ecuación 81 y queda de la siguiente manera

$$\int_{\Gamma} (\langle \text{grad}_x\vartheta(x-y), [\vec{n}(y) \times \vec{H}(y)] \rangle - i\omega\epsilon\vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{E}(y) \rangle) d\Gamma_y =$$

$$= \int_{\Gamma} \vartheta(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{j}(y) \rangle d\Gamma_y. \quad (98)$$

### 3 Separación de los campos electromagnéticos de la Tierra usando las integrales de Stratton-Chu

Al final de la sección 2.13.1 se reescribieron las ecuaciones de Maxwell con unos ligeros cambios de las ilustradas en la Sección 2.12 y Sección 2.14. Usando las mostradas en la Sección 2.13.1, se iniciará la separación de los campos electromagnéticos, aplicando rotacional a las primeras dos ecuaciones:

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t}, \quad (99)$$

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = [\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (100)$$

Siguiendo con la simplificación de estas ecuaciones se emplea la identidad vectorial  $[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] = \nabla < \nabla, \vec{E} > -\nabla^2 \vec{E}$ . Primero, para el campo eléctrico

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla(q + q^e), \quad (101)$$

y para el campo magnético

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = [\nabla \times \vec{j}^e], \quad (102)$$

pero como se está en un medio que no tiene cargas ni corrientes, estas se igualan a cero y como resultado se obtienen las ecuaciones denominadas **Ecuaciones telegráficas homogéneas**:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad (103)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0. \quad (104)$$

#### 3.1 Condiciones de frontera

En teoría electromagnética y, principalmente, en Electrodinámica es necesario delimitar fronteras. Para demostrar esta aplicación, se deben considerar dos medios distintos que se encuentran separados por una superficie lisa donde las constantes como  $\epsilon$  y  $\mu$  varían lentamente por lo que se pueden considerar constantes [15]. Entonces, matemáticamente se denomina un vector normal unitario  $\vec{n}$  que tiene una dirección hacia un punto dado desde la superficie  $S$ .

Notesé que se continúa trabajando en un medio homogéneo, por lo que las siguientes relaciones se cumplen:

1. Los componentes normales del campo toman esta forma:

$$\langle (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}), \vec{n} \rangle = 0, \quad \langle (\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}), \vec{n} \rangle = \eta, \quad (105)$$

donde  $\eta$  es la densidad de superficie de la carga eléctrica sobre  $S$ . Veáse que el componente normal de  $\vec{B}$  se mantiene continuo durante la interacción entre los medios, mientras que el caso de  $\vec{D}$  sí surge una discontinuidad proporcional a  $\eta$ .

2. Para los componentes tangenciales del campo, se expresa así:

$$[\vec{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)})] = \vec{j}^S, \quad (106)$$

aquí  $\vec{j}^S$  es la densidad de corriente de la superficie que únicamente será distinta de cero en caso de que se tenga un conductor perfecto. Y el otro componente tangencial del campo eléctrico se ilustra inmediatamente:

$$[\vec{n} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)})] = 0. \quad (107)$$

Por el contrario, al emplear esta ecuación en medios reales, los componentes del campo eléctrico y magnético serán

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau^{(2)} - \vec{E}_\tau^{(1)} &= 0, \\ \vec{H}_\tau^{(2)} - \vec{H}_\tau^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\tau$  indica que es un componente tangencial del campo de  $S$ . Los componentes de  $\vec{H}$  serán continuos en medios reales y los de  $\vec{E}$  siempre serán continuos independientemente del medio en el que se encuentren.

Es importante decir que los campos trascendentes pues estos atravesaran cualquier tipo de material siempre y cuando la conductividad de este sea finita.

Retomando el conductor perfecto, las cargas responden inmediatamente a cualquier cambio que se presente en el campo en el se ubique proveyendo al mismo tiempo un incremento en la densidad de superficie de la carga  $\eta$  sobre la superficie del conductor hasta que el campo eléctrico que se encuentra dentro del conductor sea cero. El campo magnético variará con el tiempo, que de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, creará una corriente de superficie  $\vec{j}^S$  al interior del conductor, en consecuencia, no habrá un campo magnético. Esto lleva a una conclusión muy importante y es que el campo electromagnético será cero y  $\vec{D} = \vec{E} = \vec{B} = \vec{H} = \vec{0}$ . Con esto en cuenta se pueden escribir las condiciones en la frontera y cuando el superíndice 2 sea cero:

$$\langle \vec{D}^{(1)}, \vec{n} \rangle = \eta, \quad (108)$$

$$[\vec{H}^{(1)} \times \vec{n}] = \vec{j}^S, \quad (109)$$

$$\langle \vec{B}^{(1)}, \vec{n} \rangle = 0, \quad (110)$$

$$[\vec{E}^{(1)} \times \vec{n}] = 0. \quad (111)$$

### 3.2 Relación con los campos monocromáticos

Previamente se analizaron los campos electromagnéticos armónicos en el tiempo que se expresan por medio de  $e^{-i\omega t}$  representando su dependencia con el tiempo. Nuevamente, las ecuaciones de Maxwell se reescriben de esta manera:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \vec{j} + \vec{j}^e - i\omega \vec{D}, \quad (112)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = i\omega \vec{B}, \quad (113)$$

$$\langle \nabla, \vec{B} \rangle = 0, \quad (114)$$

$$\langle \nabla, \vec{D} \rangle = q + q^e. \quad (115)$$

Las ecuaciones vuelven a cambiar si se tiene un medio homogéneo con los parámetros constantes ( $\epsilon, \mu, \sigma$ ):

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma * \vec{E} + \vec{j}^e, \quad (116)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = i\omega \mu \vec{H}, \quad (117)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = 0, \quad (118)$$

$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = \frac{q^e}{\epsilon^*}, \quad (119)$$

el símbolo \* se refiere a la representación compleja,  $\epsilon^* = \epsilon + i\sigma/\omega$  y  $\sigma^* = \sigma - i\omega\epsilon$ .

Aplicando las ecuaciones telégrafas homogéneas con los parámetros constantes complejos y las ecuaciones previas, se calculan estas ecuaciones:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^{*2} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{j}^e + \left( \frac{1}{\epsilon^*} \right) \nabla q^e \quad (120)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^{*2} \vec{H} = -[\nabla \times \vec{j}^e] \quad (121)$$

estas dos expresiones matemáticas son llamadas las **Ecuaciones de Helmholtz**, donde  $k^*$  es el número de onda definido así

$$k^{*2} = i\omega \mu \sigma + \omega^2 \mu \epsilon = i\omega \mu \sigma^*,$$

y  $k^*$  será únicamente la parte real positiva,  $Re(k^*) > 0$ .

Si el medio en el que se encuentra en cuestión no tiene cargas o corrientes, las ecuaciones de Maxwell se ven simplificadas:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma^* \vec{E}, \quad (122)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = i\omega \mu \vec{H}, \quad (123)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = 0, \quad (124)$$

$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = 0. \quad (125)$$

Por lo consiguiente, las ecuaciones de Helmholtz se simplifican así:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^{*2} \vec{E} = 0, \nabla^2 \vec{H} + k^{*2} \vec{H} = 0. \quad (126)$$

### 3.3 Campos electromagnéticos cuasi-estacionarios

Estos campos son aquellos que varían lentamente en el tiempo por lo que se puede tomar la segunda derivada parcial con respecto al tiempo como cero. Las ecuaciones de Maxwell en un campo cuasi-estacionario se transforman de la siguiente manera:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma \vec{E} + \vec{j}^e, \quad (127)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (128)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = 0, \quad (129)$$

$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = -\frac{1}{\sigma} \left( \langle \vec{E}, \nabla \sigma \rangle + \langle \nabla, \vec{j}^e \rangle \right). \quad (130)$$

Si se tiene dominios donde la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética sean constantes y se mantengan así, al aplicar rotacional a las ecuaciones telegráficas

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] + \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t}, \quad (131)$$

y para el campo magnético

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{H}]] + \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = [\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (132)$$

Ahora, con estas expresiones se puede llegar a las **Ecuaciones de difusión**:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t} - \frac{1}{\sigma} \nabla \langle \nabla, \vec{j}^e \rangle, \quad (133)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -[\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (134)$$

Como el estudio principal de este proyecto se concentra en campos electromagnéticos armónicos en el tiempo, los campos cuasi-estáticos pueden escribir como transformadas de Fourier con  $e^{-i\omega t}$  y, otra vez las ecuaciones de Maxwell cambian:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma \vec{E} + \vec{j}^e, \quad (135)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = i\omega \mu \vec{H}, \quad (136)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = 0, \quad (137)$$

$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = -\frac{1}{\sigma} \left( \langle \vec{E}, \nabla \sigma \rangle + \langle \nabla, \vec{j}^e \rangle \right). \quad (138)$$

Tomando los parámetros como constantes y empleando las ecuaciones de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = -i\omega \mu \vec{j}^e - \frac{1}{\sigma} \nabla \langle \nabla, \vec{j}^e \rangle, \quad (139)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = -[\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (140)$$

Recordando que la definición de  $k$  y la parte del mismo, este está dado por:

$$k^2 = i\omega\mu\sigma \rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+i) = \frac{2\pi}{\lambda}(1+i) \quad (141)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda cuasi-estática obtenida por  $\lambda = 2\pi\sqrt{2}/\sqrt{\omega\mu\sigma}$  [15].

### 3.4 Ecuaciones de onda de campo

Un caso específico del cual surgen las ecuaciones homónimas de esta sección es cuando un aislante con conductividad  $\sigma = 0$  toma la siguiente forma en la primer ecuación de Maxwell:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \vec{j}^e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (142)$$

Luego, los parámetros al mantenerse constantes, las ecuaciones de onda se transcriben así:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla q^e, \quad (143)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -[\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (144)$$

### 3.5 Ecuaciones de campo con cargas y corrientes magnéticas

Cuando se trataron las ecuaciones de Maxwell para los campos de medios homogéneos, se puede visualizar una asimetría debido a que física y empíricamente no hay cargas o corrientes magnéticas por lo que su adición es ficticia. No obstante, Stratton de forma matemática agregó estos términos y las ecuaciones reiteradamente sufren otra reescritura:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma \vec{E} + \vec{j}^e + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (145)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}^m, \quad (146)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = \frac{q^m}{\mu}, \quad (147)$$

$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = \frac{\check{q}^e}{\epsilon}, \quad (148)$$

donde  $\check{q}^e = q + q^e$  se refiere a la suma de cargas eléctricas extrañas y  $\vec{j}^m$  y  $q^m$  son las densidades de corrientes y cargas magnéticas extrañas que están relacionadas por una función continua definida por la siguiente ecuación:

$$\langle \nabla, \vec{j}^m \rangle = -\frac{\partial q^m}{\partial t}. \quad (149)$$

Continuando con el tratamiento de las ecuaciones de Maxwell, se aplica el rotacional a las dos primeras ecuaciones (como ya se ha realizado en otras subsecciones) a ambos lados de la igualdad

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t} - [\nabla \times \vec{j}^m], \quad (150)$$

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{H}]] + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\sigma \vec{j}^m - \epsilon \frac{\partial \vec{j}^m}{\partial t} + [\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (151)$$

Entonces, las ecuaciones de Maxwell en un campo monocromático de forma simétrica se escriben de esta manera:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma^* \vec{E} + \vec{j}^e, \quad (152)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = i\omega\mu\vec{H} - \vec{j}^m, \quad (153)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = \frac{q^m}{\mu}, \quad (154)$$

$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = \frac{q^e}{\epsilon^*}, \quad (155)$$

y para finalizar, se escriben las ecuaciones de onda de Helmholtz como se ilustra a continuación:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^{*2} \vec{E} = -i\omega\mu\vec{j}^e + \frac{1}{\epsilon^*} \nabla q^e + [\nabla \times \vec{j}^m], \quad (156)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^{*2} \vec{H} = \sigma^* \vec{j}^m + \frac{1}{\mu} \nabla q^m - [\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (157)$$

### 3.6 Campo electromagnético estacionario

Los campos electromagnéticos estacionarios son aquellos independientes del tiempo y el medio donde se ubican es homogéneo e isotrópico. Entonces, por la independencia del tiempo las derivadas serán cero y las cargas  $\vec{q}^e = 0$ , dejando las ecuaciones de electromagnetismo así:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma \vec{E} + \vec{j}^e, \quad (158)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\vec{j}^m, \quad (159)$$

$$\langle \nabla, \vec{H} \rangle = \frac{q^m}{\mu}, \quad (160)$$

$$\langle \nabla, \vec{E} \rangle = 0. \quad (161)$$

La existencia de cargas o corrientes extrañas es nula. Repetitivamente, se usa rotacional en las primeras ecuaciones

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] = -[\nabla \times \vec{j}^m], \quad [\nabla \times [\nabla \times \vec{H}]] = -\sigma \vec{j}^m + [\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (162)$$

Cuando se usa el rotacional en estas ecuaciones, se obtienen las **ecuaciones de Poisson** las cuales cumplen con la estructuras de los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente. Veáse:

$$\nabla^2 \vec{E} = [\nabla \times \vec{j}^m], \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla q^m + \sigma \vec{j}^m - [\nabla \times \vec{j}^e]. \quad (163)$$



### 3.7 Ecuaciones de integración para un campo vectorial arbitrario

Para introducir las ecuaciones de integración junto con los campos electromagnéticos es necesario suponer que se tiene un campo vectorial arbitrario que satisface las siguientes dos ecuaciones:

$$\langle \nabla, \vec{F} \rangle = q, \quad [\nabla \times \vec{F}] = \vec{j} \quad (164)$$

donde  $q$  y  $\vec{j}$  indican las densidades de volumen de las fuentes y rotaciones dadas en el campo  $\vec{F}$  donde es diferenciable dos veces y satisface las condiciones de un dominio  $D$  hasta su frontera  $S$  [15].

#### 3.7.1 Identidades integrales auxiliares

Antes de continuar con los campos electromagnéticos, es primordial tener relaciones que conecten  $\vec{F}$  con sus respectivas derivadas espaciales. Estas fórmulas se conocen como las ecuaciones de Ostrogradsky-Gauss. Previo a introducirlas, se debe definir un campo vectorial auxiliar  $\vec{\Phi}(\vec{r})$ :

$$\vec{\Phi}(\vec{r}) = \langle \vec{C}, \vec{F} \rangle \nabla P + [[\vec{C} \times \vec{F}] \times \nabla P] - [\vec{C} \times [\nabla \times \vec{F}]]P, \quad (165)$$

en donde  $\vec{F}(\vec{r})$  y  $P(\vec{r})$  son funciones arbitrarias diferenciables dos veces en  $D$  hasta su frontera  $S$  y  $\vec{C}$  es un vector arbitrario constante [15].

Luego, se procede a calcular  $\langle \nabla, \vec{\Phi}(\vec{r}) \rangle$  y usando el operador Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \langle \nabla, \vec{\Phi}(\vec{r}) \rangle &= \langle \nabla, [\langle \vec{C}, \vec{F} \rangle \nabla P] \rangle + \langle \nabla, [[\vec{C} \times \vec{F}] \times \nabla P] \rangle - \\ &\quad - \langle \nabla, \{[\vec{C} \times [\nabla \times \vec{F}]]P\} \rangle. \end{aligned} \quad (166)$$

Para ordenar y hacer más eficiente el cálculo, se obtiene cada término de forma individual:

$$\begin{aligned} \langle \nabla, [\langle \vec{C}, \vec{F} \rangle \nabla P] \rangle &= \langle \nabla P, \nabla \langle \vec{C}, \vec{F} \rangle \rangle + \langle \vec{C}, \vec{F} \rangle \nabla^2 P \\ \langle \nabla, [[\vec{C} \times \vec{F}] \times \nabla P] \rangle &= \langle \nabla P, [\nabla \times [\vec{C} \times \vec{F}]] \rangle, \\ &= \langle \nabla P, [\vec{C} \langle \nabla, \vec{F} \rangle - \langle \vec{C}, \nabla \rangle \vec{F}] \rangle \\ - \langle \nabla, \{[\vec{C} \times [\nabla \times \vec{F}]]P\} &= - \langle P \nabla, [\vec{C} \times [\nabla \times \vec{F}]] \rangle - \\ &= - \langle [\vec{C} \times [\nabla \times \vec{F}]], \nabla P \rangle, \\ &= \langle P \vec{C}, [\nabla \times [\nabla \times \vec{F}]] \rangle - \\ &= \langle \nabla P, [\nabla \langle \vec{C}, \vec{F} \rangle - \langle \vec{C}, \nabla \rangle \vec{F}] \rangle, \end{aligned}$$

sustituyendo estos términos en la ecuación 166 dará la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle \nabla, \vec{\Phi}(\vec{r}) \rangle &= \langle \vec{C}, \nabla^2 P \vec{F} \rangle + \langle \vec{C}, \nabla P \langle \nabla, \vec{F} \rangle \rangle + \langle \vec{C}, P[\nabla \times [\nabla \times \vec{F}]] \rangle, \\ &= \langle \vec{C}, \langle \nabla^2 P, \vec{F} \rangle + \langle \nabla P, \langle \nabla, \vec{F} \rangle \rangle + P[\nabla \times [\nabla \times \vec{F}]] \rangle. \end{aligned} \quad (167)$$

Complementando el producto escalar con un vector normal  $\vec{n}$  que apunta hacia la frontera  $\vec{S}$ :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Phi}(\vec{r}), \vec{n} \rangle &= \langle \vec{C}, [\langle \vec{n}, \vec{F} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{F}] \times \nabla P] + [\vec{n} \times [\nabla \times \vec{F}]]P \rangle, \\ &= \langle \vec{C}, [\langle \vec{n}, \nabla P \rangle \vec{F} + [[\vec{n} \times \nabla P] \times \vec{F}] + [\vec{n} \times [\nabla \times \vec{F}]]P \rangle. \end{aligned} \quad (168)$$

Introduciendo la fórmula de Ostrograsky - Gauss

$$\iiint_V \langle \nabla, \vec{F} \rangle dV = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS, \quad (169)$$

esta se aplicará a la función  $\vec{\Phi}(\vec{r})$  y el vector arbitrario  $\vec{C}$  se tomará como un vector unitario, se logra una nueva identidad integral con dos soluciones:

$$\begin{aligned} &\iiint_V (\nabla^2 P \vec{F} + \nabla P \langle \nabla, \vec{F} \rangle + P[\nabla \times [\nabla \times \vec{F}]])dV = \\ &= \begin{cases} \iint_S (\langle \vec{n}, \vec{F} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{F}] \times \nabla P] + [\vec{n} \times [\nabla \times \vec{F}]]P)dS \\ \iint_S (\langle \vec{n}, \nabla P \rangle \vec{F} + [[\vec{n} \times \nabla P] \times \vec{F}] + [\vec{n} \times [\nabla \times \vec{F}]]P)dS \end{cases}. \end{aligned} \quad (170)$$

De aquí surge un caso particular que es si  $[\nabla \times \vec{F}] = 0$ , las soluciones previas, darán como resultado:

$$\begin{aligned} &\iiint_V (\nabla^2 P \vec{F} + \nabla P \langle \nabla, \vec{F} \rangle)dV = \\ &= \begin{cases} \iint_S (\langle \vec{n}, \vec{F} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{F}] \times \nabla P])dS \\ \iint_S (\langle \vec{n}, \nabla P \rangle \vec{F} + [[\vec{n} \times \nabla P] \times \vec{F}])dS \end{cases}. \end{aligned} \quad (171)$$

Con los resultados alcanzados, es posible ver las implicaciones que tienen las siguientes ecuaciones:

$$\iiint_V (\nabla^2 P \nabla + \nabla^2 h \nabla P) dV = \iint_S (\langle \vec{n}, \vec{P} \rangle \nabla h + [[\vec{n} \times \nabla P] \times \nabla h]) dS, \quad (172)$$

$$\iiint_V (\nabla^2 P \nabla + \nabla^2 h \nabla P) dV = \iint_S (\langle \vec{n}, \nabla h \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \nabla h] \times \nabla P]) dS. \quad (173)$$

### 3.8 Vectores análogos de las fórmulas de Pompeiu

Utilizando la Ecuación 170 es posible obtener las fórmulas integrales que darán solución a dos ecuaciones

$$[\nabla \times \vec{F}] = \vec{j}, \quad \langle \nabla, \vec{F} \rangle = q.$$

Recuerde que  $\vec{F} \in D$  por lo que la condición para que esto se cumpla es aplicar 170 en conjunto con  $P = -1/4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|$  y derivará en:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \langle \vec{n}, \vec{F} \rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left[ [\vec{n} \times \vec{F} \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}] + [\vec{n} \times [\nabla \times \vec{F}]] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} ds \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\{ \langle \langle \nabla, \vec{F} \rangle, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rangle + \langle [\nabla \times [\nabla \times \vec{F}]], \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rangle \right\} dv = \\ & = \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \in \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad . \end{aligned} \quad (174)$$

y también puede escribirse así:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \left( \langle \vec{n}, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rangle \right) \vec{F} + \left( \left[ \left[ \vec{n} \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{F} \right] \right) + \right. \\ & \left. + [\vec{n} \times [\nabla \times \vec{F}]] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) ds + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left( \langle \langle \nabla, \vec{F} \rangle, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rangle + \right. \\ & \left. + \langle [\nabla \times [\nabla \times \vec{F}]], \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rangle \right) dv = \\ & = \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \in \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad . \end{aligned} \quad (175)$$

Estas dos últimas ecuaciones pueden ser simplificadas con el tercer vector de la fórmula de Ostrogradsky-Gauss:

$$\begin{aligned} \iiint_D = \left\langle [\nabla \times [\nabla \times \vec{F}]], \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\rangle dv = \iint_S [\vec{n} \times [\nabla \times \vec{F}]] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds + \\ + \iiint_D \left[ [\nabla \times \vec{F}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv, \end{aligned} \quad (176)$$

sustituyendo este tercer vector en las ecuaciones 174 y 175 se calcula la siguiente fórmula integral:

$$\begin{aligned} = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{F} \rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left[ [\vec{n} \times \vec{F}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right] ds \\ -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \left( \left\langle \vec{n}, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\rangle \right) \vec{F} + \left[ \left[ \vec{n} \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{F} \right] \right] ds \\ + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left( \left\langle \langle \nabla, \vec{F} \rangle, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\rangle + \left[ [\nabla \times \vec{F}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right) dv \end{cases} \\ = \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}, \end{aligned} \quad (177)$$

con esta ecuación se expanden dos ecuaciones más:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{F} \rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left[ [\vec{n} \times \vec{F}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right] ds \\ + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\langle \langle \vec{n}, \vec{F} \rangle, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\rangle dv \\ = \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \end{aligned} \quad (178)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \left\langle \vec{n}, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\rangle \vec{F} + \left[ \left[ \vec{n} \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{F} \right] \right] ds \\ + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\langle \langle \nabla, \vec{F} \rangle, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\rangle dv = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad (179)$$

es importante saber que si el campo vectorial es arbitrario los resultados serán similares a los de las fórmulas de Pompeiu. Ahora, ha llegado el momento de calcular el campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r}')$ , usando las propiedades de divergencia y rotacional junto con la ecuación inmediata anterior, se obtiene de esta forma:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}') = & \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{F} \rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left[ [\vec{n} \times \vec{F}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right] ds \\ -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \left\langle \vec{n}, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\rangle \vec{F} + \left[ [\vec{n} \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}] \times \vec{F} \right] \right] ds \end{cases} \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left( q \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left[ \vec{j} \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right) dv. \end{aligned} \quad (180)$$

Con este cálculo concluido, se muestra que el campo vectorial  $\vec{F}$  es un campo potencial dentro de  $D$ . En caso de que se presente un campo vectorial laplaciano, entonces la ecuación anterior se transforma en la integral de Cauchy en tres dimensiones:

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \left\langle \vec{n}, \vec{F} \right\rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left[ [\vec{n} \times \vec{F}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right] ds = \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad (181)$$

### 3.8.1 Fórmulas de Stratton-Chu para un campo electromagnético transitorio

Previamente se han aplicado a las ecuaciones de Stratton-Chu para cargas eléctricas y se hizo mención de su aplicación en campos con variación temporal. No obstante, en este apartado se tratarán de forma particular en campos electromagnéticos  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  que se ubican en un dominio  $D$  que tiene una frontera  $S$ . Estos campos tienen sus componentes dentro de  $D$  únicamente. Este campo electromagnético satisface las ecuaciones de Maxwell arregladas por Stratton y también cuando a estas se les aplica el rotacional, Aunque ahora se pone la condición  $\vec{F} = \vec{E}$  y se logra la siguiente ecuación:

$$\iiint_D = \left( \nabla^2 P \vec{E} - \mu \epsilon P \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma P \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\check{q}^e}{\epsilon} \nabla P - \mu \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t} P - [\nabla \times \vec{j}^m] P \right) dv =$$

$$= \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [(\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla P] - \mu \left[ \vec{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] P - [\vec{n} \times \vec{j}^m] P \right] ds. \quad (182)$$

La fórmula de Ostrogradsky-Gauss presenta un argumento acerca de un tercer vector el cual se debe conocer antes de continuar con la operación del campo electromagnético. El tercer vector se introduce:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \nabla h \rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + [(\vec{n} \times \nabla h) \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}] \right] ds = \\ & = - \frac{d_x}{4\pi} \int_L [(n_x h_x + n_z h_z)(x' - x) + (n_z h_x - n_x h_z)(z' - z)] \times \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl - \frac{d_z}{4\pi} \int_L [(n_x h_x + n_z h_z)(z' - z) + (n_x h_z - n_z h_x)(x' - x)] \times \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl = \\ & = B_x(\vec{r}') d_x + B_z(\vec{r}') d_z. \end{aligned} \quad (183)$$

Si se aplica la siguiente identidad vectorial:

$$\iiint_D [\nabla \times \vec{j}^m] P dv = \iint_S [\vec{n} \times \vec{j}^m] P ds + \iiint_D [\vec{j}^m \times \nabla P] dv. \quad (184)$$

En la ecuación 182 y se simplifica:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left\{ \nabla^2 P \vec{E} - \mu \epsilon P \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma P \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\check{q}^e}{\epsilon} \nabla P - \mu \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t} P - [\vec{j}^m \times \nabla P] \right\} dv = \\ & = \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [(\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla P] - \mu \left[ \vec{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] P \right] ds. \end{aligned} \quad (185)$$

Si se tiene la condición  $\vec{F} = \vec{H}$  genera una solución similar a la de la condición  $\vec{F} = \vec{E}$ :

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left( \nabla^2 P \vec{H} - \mu \epsilon P \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{q^m}{\mu} \nabla P - \sigma \vec{j}^m P - \epsilon \frac{\partial \vec{j}^m}{\partial t} P + [\vec{j}^e \times \nabla P] \right) dv = \\ & = \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla P + [(\vec{n} \times \vec{H}) \times \nabla P] + \sigma [\vec{n} \times \vec{E}] P + \epsilon \left[ \vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] P \right] ds. \end{aligned} \quad (186)$$

Integrando 185 y 186 respecto al tiempo y realizando una integración por partes, la derivada parcial respecto a  $t$  bajo la forma integral de los campo de la función  $P$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_D \left[ \vec{E} \left( \nabla^2 P - \mu \epsilon \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\check{q}^e}{\epsilon} \nabla P + \mu \vec{j}^e - [\vec{j}^m \times \nabla P] \right] dv dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla P] + \mu[\vec{n} \times \vec{H}] \frac{\partial P}{\partial t} \right] ds dt, \quad (187)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_D \left[ \vec{H} \left( \nabla^2 P - \mu\epsilon \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\vec{q}^m}{\mu} \nabla P - \sigma \vec{j}^m P + \epsilon \vec{j}^m \frac{\partial P}{\partial t} + [\vec{j}^e \times \nabla P] \right] dv dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla P] + \sigma[\vec{n} \times \vec{E}]P - \epsilon[\vec{n} \times \vec{E}] \frac{\partial P}{\partial t} \right] ds dt. \quad (188)$$

Previamente, en las ecuaciones de Stratton - Chu se usa la función de Green, aquí la función  $P$  actúa como la mencionada, de forma que satisface esta ecuación:

$$\nabla^2 G^t - \mu\epsilon \frac{\partial^2 G^t}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial G^t}{\partial t} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'), \quad (189)$$

donde  $G^t$  es la función de Green de las ecuaciones del telegrafo y  $\delta$  es la función Delta de Dirac. La definición  $G^t$  está dada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G^t(\vec{r}, t | \vec{r}', t') &= \frac{-e^{[-\sigma(t'-t)]/2\epsilon}}{4\pi\sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}'|} \left\{ \delta\left(\frac{t' - t - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}'|}{\sqrt{\mu\epsilon}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{\epsilon}} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\sqrt{|\vec{r} - \vec{r}'|^2 - (t' - t)^2/\mu\epsilon}} \right. \\ &\quad \left. \times J_1 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{\epsilon}} \sqrt{|\vec{r} - \vec{r}'|^2 - (t' - t)^2/\mu\epsilon} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{H}\left(\frac{t' - t - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}'|}{\sqrt{\mu\epsilon}}\right) \right\} = \\ &= G^t(\vec{r}, t | \vec{r}', t') \end{aligned} \quad (190)$$

notesé que  $J_1$  es la función de Bessel y  $\mathcal{H}$  es la función de Heavyside que es una función de unidad que indica que si  $t \leq 0$  entonces  $\mathcal{H} = 0$  y será 1 si  $t > 0$ . Aplicando la función de Green en las ecuaciones 186 y 187 en lugar de  $P$ :

$$\begin{aligned} &\iint_S \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^t + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^t] + \mu[\vec{n} \times \vec{H}] \frac{\partial G^t}{\partial t} \right] dt ds - \\ &- \iiint_D \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{q}^e}{\epsilon} \nabla G^t + \mu \vec{j}^e \frac{\partial G^t}{\partial t} - [\vec{j}^m \times \nabla G^t] \right) dt dv = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}^j, t'), \vec{r}^j \in D \\ 0, \vec{r}^j \in C\bar{D} \end{cases} \quad (191)$$

$$\begin{aligned} & \iint_S \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}^j|} \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^t + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G^t] + \sigma[\vec{n} \times \vec{E}]G^t - \right. \\ & \left. - \epsilon[\vec{n} \times \vec{E}] \frac{\partial G^t}{\partial t} \right] dt ds - \\ & - \iiint_D \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}^j|} \left( \frac{q^m}{\mu} \nabla G^t - \sigma \vec{j}^m G^t + \epsilon \vec{j}^m \frac{\partial G^t}{\partial t} + [\vec{j}^e \times \nabla G^t] \right) dt dv = \\ & = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}^j, t'), \vec{r}^j \in D \\ 0, \vec{r}^j \in C\bar{D} \end{cases} . \end{aligned} \quad (192)$$

Las ecuaciones 191 y 192 se les denomina como las fórmulas integrales de Stratton - Chu para un campo electromagnético transitorio. Una simplificación de estas largas integrales sucede cuando se considera un medio donde no existen corrientes o cargas en  $D$  y se eliminan las integrales de volumen. Entonces, las ecuaciones 191 y 192 se reescriben así:

$$\begin{aligned} & \iint_S \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}^j|} \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^t + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^t] + \mu[\vec{n} \times \vec{H}] \frac{\partial G^t}{\partial t} \right] dt ds = \\ & = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}^j, t'), \vec{r}^j \in D \\ 0, \vec{r}^j \in C\bar{D} \end{cases} , \end{aligned} \quad (193)$$

$$\begin{aligned} & \iint_S \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}^j|} \left\{ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^t + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G^t] + \sigma[\vec{n} \times \vec{E}]G^t - \right. \\ & \left. - \epsilon[\vec{n} \times \vec{E}] \frac{\partial G^t}{\partial t} \right\} dt ds = \\ & = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}^j, t'), \vec{r}^j \in D \\ 0, \vec{r}^j \in C\bar{D} \end{cases} . \end{aligned} \quad (194)$$

### 3.8.2 Fórmulas de Stratton-Chu para campos cuasi-estático

Retomando las ecuaciones de Maxwell para un campo cuasi-estático sobre  $D$  pero con la equivalencia  $\vec{F} = \vec{E}$  y con las ecuaciones de telegráfo de las mismas.



Y aplicándolas en la identidad vectorial 170:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left( \nabla^2 P E - \nabla P \frac{1}{\sigma} \langle \nabla, \vec{j}^e \rangle - \mu P \frac{\partial \vec{j}^e}{\partial t} - \mu \sigma P \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dv = \\ & \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla P] - \mu \left( \left[ \vec{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] \right) P \right] ds, \end{aligned}$$

y para un campo magnético cuasi-estacionario la ecuación previa se transforma en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left( \nabla^2 P \vec{H} - \mu \sigma P \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + [\nabla \times \vec{j}^e] P \right) dv = \\ & \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla P] + \sigma [\vec{n} \times \vec{E}] P + [\vec{n} \times \vec{j}^e] P \right] ds. \end{aligned}$$

Pero esta última ecuación puede reducirse con el uso de la identidad

$$\iiint_D [\nabla \times \vec{j}^e] P dv = \iint_S [\vec{n} \times \vec{j}^e] P ds + \iiint_D [\vec{j}^e \times \nabla P] dv,$$

entonces con esto la ecuación para el campo magnético cuasi-estacionario cambia así:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left( \nabla^2 P \vec{H} - \mu \sigma P \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + [\vec{j}^e \times \nabla P] \right) dv = \\ & \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla P] + \sigma [\vec{n} \times \vec{E}] P \right] ds. \quad (195) \end{aligned}$$

Ahora, se deben integrar las ecuaciones de campo eléctrico y magnético (en el caso del campo magnético se usa la última expresión) con respecto al tiempo  $t$ . Primero, para el campo eléctrico

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_D \left[ \vec{E} \left( \nabla^2 P + \mu \sigma \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{1}{\sigma} \langle \nabla, \vec{j}^e \rangle \nabla P + \mu \vec{j}^e \frac{\partial P}{\partial t} \right] dv dt = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla P] + \mu [\vec{n} \times \vec{H}] \frac{\partial P}{\partial t} \right] ds dt. \quad (196) \end{aligned}$$

Análogamente, para el campo magnético se realiza lo mismo:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_D \left[ \vec{H} \left( \nabla^2 P + \mu \sigma \frac{\partial P}{\partial t} \right) + [\vec{j}^e \times \nabla P] \right] dv dt = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla P] + \sigma [\vec{n} \times \vec{E}] P \right] ds dt. \quad (197) \end{aligned}$$

Para llegar a resultados semejantes a los del campo electromagnético transitorio, en el campo electromagnético cuasi-estático se aplica a la función  $P$  el tratamiento de la función de Green  $G^d$  para la ecuación de difusión:

$$G^d(\vec{r}, t | \vec{r}', t') = -\frac{\sqrt{\mu\sigma}}{8\pi^{3/2}(t' - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mu\sigma|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{4(t' - t)}\right) \mathcal{H}(t' - t), \quad (198)$$

aquí la ecuación de Green vista en la Ecuación 189 es similar pero con algunos cambios en la parte izquierda de la ecuación la cual se presenta a continuación:

$$\nabla^2 G^d + \mu\sigma \frac{\partial G^d}{\partial t}. \quad (199)$$

De las expresiones derivadas respecto al tiempo  $t$  para el campo eléctrico y magnético, pueden definir las funciones integrales para cada campo, respectivamente. En primer lugar, para el campo magnético la integral está definida así

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t'} \left\{ \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^d + [(\vec{n} \times \vec{H}) \times \nabla G^d] + \sigma[\vec{n} \times \vec{E}]G^d \right] ds \right. \\ & \left. - \iiint_D [\vec{j}^e \times \nabla G^d] dv \right\} dt \\ & = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \end{aligned} \quad (200)$$

El campo eléctrico tiene una estructura similar que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t'} \left\{ \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^d + [(\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla G^d] + \mu[\vec{n} \times \vec{H}] \frac{\partial G^d}{\partial t} \right] ds \right. \\ & \left. - \iiint_D \left( \frac{1}{\sigma} \langle \nabla, \vec{j}^e \rangle \nabla G^d + \mu \vec{j}^e \frac{\partial G^d}{\partial t} \right) dv \right\} dt = \\ & = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \end{aligned} \quad (201)$$

Las ecuaciones 200 y 201 son las fórmulas integrales de Stratton - Chu para los campos cuasi-estáticos para los campos electromagnéticos. En el caso de que se tenga una ausencia de cargas y corrientes en  $D$ , las ecuaciones se simplificarán así:

$$\int_{-\infty}^{t'} \left\{ \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^d + [(\vec{n} \times \vec{H}) \times \nabla G^d] + \sigma[\vec{n} \times \vec{E}]G^d \right] \right\} ds dt =$$

$$= \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}, \quad (202)$$

$$\int_{-\infty}^{t'} \left\{ \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^d + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^d] + \mu[\vec{n} \times \vec{H}] \frac{\partial G^d}{\partial t} \right] \right\} ds dt =$$

$$= \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \quad (203)$$

### 3.8.3 Modelo de Onda de un campo

En la sección de campos transitorios se manejaron las ecuaciones 187 y 188 las cuales se aplicaron a una función  $P$ , aquí se emplearán pero con dos condiciones:  $\sigma = 0$ ,  $q^e = q_e$  y  $P$

$$P = G^w = G^w(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t' - t - \sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r} - \vec{r}'|). \quad (204)$$

Y con  $G^w$  siendo:

$$\nabla^2 G^w - \mu\epsilon \frac{\partial^2 G^w}{\partial t^2} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'). \quad (205)$$

Con esta nueva definición de  $G^w$ , se aplican en las ecuaciones de Stratton - Chu. Para el campo eléctrico,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^w + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^w] + \mu[\vec{n} \times \vec{H}] \frac{\partial G^w}{\partial t} \right] ds \right. \\ \left. - \iiint_D \left( \frac{q^e}{\epsilon} \nabla G^w + \mu \vec{j}^e \frac{\partial G^w}{\partial t} - [\vec{j}^m \times \nabla G^w] \right) dv \right\} dt =$$

$$= \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad (206)$$

y para el campo magnético

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^w + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G^w] + \epsilon[\vec{n} \times \vec{E}] \frac{\partial G^w}{\partial t} \right] ds \right. \\ \left. - \iiint_D \left[ \frac{q^m}{\mu} \nabla G^w + \epsilon \vec{j}^m \frac{\partial G^w}{\partial t} + [\vec{j}^e \times \nabla G^w] \right] dv \right\} dt$$

$$= \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad (207)$$

Los operadores diferenciales vistos en las ecuaciones 206 y 207 que están fuera del signo de la integral se factorizan y teniendo en consideración que  $\nabla grad$  únicamente opera con la función de Green, entonces:

$$\begin{aligned} \nabla G^w &= -\nabla' G^w, \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^w = -\nabla \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle G^w, \\ [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla \vec{G}^w] &= -[[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla' \vec{G}^w] = rot' [\vec{n} \times \vec{E}] G^w, \end{aligned}$$

$$\frac{q^e}{\epsilon} \nabla G^w = -\nabla \frac{q^e}{\epsilon} G^w, [\vec{j}^n \times \nabla G^w] = rot' \vec{j}^n G^w. \quad (208)$$

Es clara la analogía entre:

$$\frac{\partial G^w}{\partial t} = -\frac{\partial G^w}{\partial t'}. \quad (209)$$

Usando las ecuaciones 208 y 209 para reescribir la ecuación 206 correspondiente al campo eléctrico, el resultado es siguiente expresión matemática:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\nabla' \iint_S \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle G^w ds + rot' \iint [\vec{n} \times \vec{E}] G^w ds - \right. \\ & - \mu \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^w ds + \nabla' \iiint_D \frac{q^e}{\epsilon} G^w dv + \\ & \left. + \mu \frac{\partial}{\partial t'} \iiint_D \vec{j}^e G^w dv + rot' \iiint_D \vec{j}^n G^w dv \right] dt \\ & = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \end{aligned} \quad (210)$$

Usando la función  $P$  de la Ecuación 204 en la ecuación previa, se obtiene una nueva ecuación:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \left( -\nabla' \iint_S \frac{\langle \vec{n}, \vec{E} \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds + rot' \iint_S \frac{[\vec{n} \times \vec{E}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds - \mu \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S \frac{[\vec{n} \times \vec{H}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{\epsilon} \nabla' \iiint_D \frac{\tilde{q}^e}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv + \mu \frac{\partial}{\partial t'} \iiint_D \frac{\tilde{j}^e}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv + rot' \iiint_D \frac{\tilde{j}^n}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \right) \\ & = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \end{aligned} \quad (211)$$

Para el caso del campo magnético se realiza la misma metodología que resulta así:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \left( -\nabla' \iint_S \frac{\langle \vec{n}, \vec{\tilde{H}} \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds + \text{rot}' \iint_S \frac{[\vec{n} \times \vec{\tilde{H}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds + \epsilon \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S \frac{[\vec{n} \times \vec{\tilde{E}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds \right. \\
& \left. + \frac{1}{\mu} \nabla' \iiint_D \frac{\tilde{q}^m}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv + \epsilon \frac{\partial}{\partial t'} \iiint_D \frac{\tilde{j}^m}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv - \text{rot}' \iiint_D \frac{\tilde{j}^e}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \right) \\
& = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \tag{212}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones 211 y 212 se denominan integrales de Stratton - Chu para una onda de campo electromagnético. Y al igual que en los casos previos, en caso de no existir cargas y corrientes eléctricas en  $D$ , para el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \left( -\nabla' \iint_S \frac{\langle \vec{n}, \vec{\tilde{E}} \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds + \text{rot}' \iint_S \frac{[\vec{n} \times \vec{\tilde{E}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds - \mu \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S \frac{[\vec{n} \times \vec{\tilde{H}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds \right) \\
& = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \tag{213}
\end{aligned}$$

Y la integral de Stratton - Chu para el campo magnético

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \left( -\nabla' \iint_S \frac{\langle \vec{n}, \vec{\tilde{H}} \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds + \text{rot}' \iint_S \frac{[\vec{n} \times \vec{\tilde{H}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds - \epsilon \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S \frac{[\vec{n} \times \vec{\tilde{E}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds \right) \\
& = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}', t'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \tag{214}
\end{aligned}$$

Estas dos últimas ecuaciones deben manejarse con extrema precaución porque manejan operadores *gradiente* y *rotacional* dentro de las integrales.

### 3.8.4 Fórmulas de Stratton-Chu para campos estacionarios

Iniciando con la aplicación de las ecuaciones de Stratton-Chu para campos electromagnéticos estacionarios se tiene que conceder una condición de  $\vec{F} = \vec{E}$  y la ecuación 170 y considerando 162 y 163 las cuales, en consecuencia, producen esta expresión:

$$\iiint_D \left( \vec{E} \nabla^2 P - [\nabla \times \vec{j}^m] P \right) dv =$$

$$= \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla P] - [\vec{n} \times \vec{j}^m P] \right] ds, \quad (215)$$

usando la Ecuación 184, deriva la función en lo siguiente:

$$\iiint_D \left( \vec{E} \nabla^2 P - [\vec{j}^m \times \nabla P] \right) dv = \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla P] \right] ds. \quad (216)$$

Una vez más, se recurre a hacer lo mismo para el caso del campo magnético:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left( \vec{H} \nabla^2 P + \frac{q^m}{\mu} \nabla P - \sigma \vec{j}^m P + [\vec{j}^e \times \nabla P] \right) dv = \\ & = \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla P] + \sigma [\vec{n} \times \vec{E}] P \right] ds. \end{aligned} \quad (217)$$

Si la función  $P$  es sustituida en ambas por la siguiente igualdad:

$$P = G = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

consiguiendo así las dos ecuaciones integrales de Stratton - Chu para un campo estacionario. Finalmente, las ecuaciones integrales en la inexistencia de cargas y corrientes retoman las siguientes formas:

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}] \right] ds = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \quad (218)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}] \right] + \\ & + \sigma [\vec{n} \times \vec{E}] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big] ds = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \quad (219)$$

En el caso de la Ecuación 218, el campo eléctrico  $\vec{E}$  es un laplaciano en el dominio  $D$ .

### 3.8.5 Fórmulas de Stratton - Chu para un campo monocromático

Esta sección corresponde al caso general de la aplicación de las ecuaciones de Stratton - Chu con las condiciones vistas en las ecuaciones 152 - 155 en dominio

$D$  con frontera y considerando nuevamente que  $F \equiv \vec{E}$  y usando las ecuaciones de Helmholtz 156 y 157, las integrales de Stratton - Chu se ven así en el campo eléctrico:

$$\iiint_D \left[ \vec{E}(\nabla^2 P + k^{*2}P) + \frac{q^e}{\epsilon^*} \nabla P + i\omega\mu \vec{j}^e P - [\nabla \times \vec{j}^m]P \right] dv =$$

$$\iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla P] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{H}]P - [\vec{n} \times \vec{j}^m]P \right] ds. \quad (220)$$

Y usando la identidad vectorial de la ecuación 184 la ecuación anterior se simplifica en:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left[ \vec{E}(\nabla^2 P + k^{*2}P) + \frac{q^e}{\epsilon^*} \nabla P + i\omega\mu \vec{j}^e P - [\nabla \times \vec{j}^m]P \right] dv = \\ & = \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla P] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{H}]P \right] ds. \end{aligned} \quad (221)$$

Para el campo magnético se mantienen los argumentos mencionados anteriormente y resulta en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left[ \vec{H}(\nabla^2 P + k^{*2}P) + \frac{q^m}{\mu} \nabla P - \sigma^* \vec{j}^m P - [\vec{j}^e \times \nabla P] \right] dv = \\ & = \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla P + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla P] + \sigma^*[\vec{n} \times \vec{E}]P \right] ds. \end{aligned} \quad (222)$$

Como se puede ver se está empleando la función  $P$  la cual se transformará otra vez en la función fundamental para la ecuación de Helmholtz:

$$G^h = G^h(\vec{r}^*|\vec{r}) = -\frac{e^{ik^*|\vec{r} - \vec{r}^*|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}^*|}, \quad (223)$$

y satisface la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 G^h + k^{*2}G^h = \delta(\vec{r} - \vec{r}^*). \quad (224)$$

Si se aplica la función de Green de la Ecuación 223 en la ecuación 222 se obtienen estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{H}]G^h \right] ds - \\ & \iiint_D \left( \frac{q^e}{\epsilon^*} \nabla G^h + i\omega\mu \vec{j}^e G^h - [\vec{j}^m \times \nabla G^h] \right) dv = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \quad (225)$$

$$\iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G^h] + \sigma^* [\vec{n} \times \vec{E}] G^h \right] ds - \\ \iiint_D \left( \frac{q^m}{\mu} \nabla G^h - \sigma^* \vec{j}^m G^h + [\vec{j}^e \times \nabla G^h] \right) dv =$$

$$= \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \quad (226)$$

Si no existen corrientes y cargas eléctricas en  $D$  en las ecuaciones anteriores, se transforman en el siguiente par de ecuaciones:

$$\iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu [\vec{n} \times \vec{H}] G^h \right] ds = \\ = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \quad (227)$$

$$\iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu [\vec{n} \times \vec{E}] G^h \right] ds = \\ = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}. \quad (228)$$

### 3.8.6 Modificación de las fórmulas de Stratton - Chu para un campo monocromático

Previamente se hizo énfasis de que el operador gradiente opera únicamente con la función de Green, por lo tanto se procede a realizar una sustitución de  $\nabla = -\nabla'$  donde el operador primo opera con el vector  $\vec{r}'$ . Entonces, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^h = -\nabla' \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^h, \\ [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^h] = -[[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla' G^h] = \text{rot}' [\vec{n} \times \vec{E}] G^h.$$



Usando estas nuevas sustituciones, las últimas fórmulas inmediatas de la subsección anterior se convierten en:

$$\begin{aligned} \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds - \nabla' \iint_S \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle G^h ds + i\omega\mu \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds = \\ = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}'), r' \in D \\ 0, r' \in C\bar{D} \end{cases}. \end{aligned} \quad (229)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds - \nabla' \iint_S \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle G^h ds + \sigma^* \iint_S [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds = \\ = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}'), r' \in D \\ 0, r' \in C\bar{D} \end{cases}. \end{aligned} \quad (230)$$

Físicamente, las ecuaciones integrales de Stratton - Chu son una representación de cargas y corrientes eléctricas y magnéticas las cuales se encuentran distribuidas sobre una superficie cerrada  $\Gamma$  con densidades de superficie  $\vec{j}_s^e, \vec{j}_s^m$  y  $\vec{q}_s^e, \vec{q}_s^m$ .

Las cargas y corrientes provocan que el campo electromagnético sea excitado y la representación matemática de este fenómeno se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}') &= - \iint_S \left( \frac{q_s^e}{\epsilon^*} \nabla G^h - [\vec{j}_s^e \times \nabla G^h] + i\omega\mu \vec{j}_s^e G^h \right) ds, \\ \vec{H}(\vec{r}') &= - \iint_S \left( \frac{q_s^m}{\mu} \nabla G^h - [\vec{j}_s^e \times \nabla G^h] - \sigma^* \vec{j}_s^m G^h \right) ds, \\ r &\notin S. \end{aligned} \quad (231)$$

La comparación de la ecuación anterior con 227 y 228 ilustra que el campo electromagnético en  $D$  coincide con el campo electromagnético excitado por las cargas y corrientes distribuidas sobre  $S$ , donde estas tienen las equivalencias:

$$\vec{j}_s^e = -[\vec{n} \times \vec{H}], \vec{j}_s^m = [\vec{n} \times \vec{E}]; q_s^e = -\epsilon^* \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle, q_s^m = -\mu \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle. \quad (232)$$

Las ecuaciones de Stratton - Chu tienen excitadores reales distribuidos fuera de  $D$  que son reemplazados por unos equivalentes ficticios que se encuentran distribuidos sobre la superficie  $S$ . Luego, al emplear 227 en 231 se manejan los productos vectoriales como:

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle &= E_n, \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle = H_n \\ [\vec{n} \times \vec{E}] &= [\vec{n} \times \vec{E}_\tau], [\vec{n} \times \vec{H}] = [\vec{n} \times \vec{H}_\tau], \end{aligned}$$

donde  $E_n$  y  $H_n$  son los componentes normales del campo electromagnético;  $\vec{E}_\tau$  y  $\vec{H}_\tau$  son los componentes tangenciales. No obstante, los componentes tangenciales se pueden cancelar de acuerdo a Maxwell.

Aunque es importante resaltar las relaciones entre ambos tipos de componentes del campo electromagnético sobre una superficie  $S$  derivada de operadores  $2D$  diferenciales siguientes:

$$\begin{aligned}\nabla_s h &= \lim_{\nabla^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\nabla^2 S} \oint_L h \vec{v} dl, \\ \langle \nabla_s, \vec{h}_\tau \rangle &= \lim_{\nabla^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\nabla^2 S} \oint_L \langle \vec{h}_\tau, \vec{v} \rangle dl, \\ [\nabla_s \times \vec{h}_\tau] &= \lim_{\nabla^2 \rightarrow 0} \frac{\vec{n}}{\nabla^2 S} \oint_L \langle \vec{h}_\tau, \vec{l} \rangle dl,\end{aligned}$$

donde  $h$  es un campo escalar y  $\vec{h}_\tau$  es un campo vectorial tangencial respecto a  $S$ ;  $L$  es el contorno fronterizo del dominio  $\nabla^2 S$  de dicha superficie:  $\vec{n}$  es el vector unitario de la normal dirigida a  $L$  sobre  $S$ ;  $\vec{l}$  es el vector unitario tangente a  $L$ ; por último, los vectores  $\vec{n}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{l}$  forman el productor vectorial:

$$[\vec{n} \times \vec{v}] = \vec{l}.$$

Entonces, se pueden escribir usando los operadores  $2D$  y las ecuaciones de las ecuaciones de Maxwell descritas como transformadas de Fourier, los componentes normales del campo magnético:

$$\begin{aligned}H_n = \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle &= \frac{\langle \vec{n}, [\nabla \times \vec{E}] \rangle}{i\omega\mu} = \frac{\langle \vec{n}, [\nabla_s \times \vec{E}_\tau] \rangle}{i\omega\mu}, \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} \lim_{\nabla^2 S \rightarrow 0} \frac{1}{\nabla^2 S} \oint_L \langle \vec{E}_\tau, \vec{l} \rangle dl, \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} \lim_{\nabla^2 S \rightarrow 0} \frac{1}{\nabla^2 S} \oint_L \langle \vec{E}_\tau, [\vec{n} \times \vec{v}] \rangle dl, \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} \lim_{\nabla^2 S \rightarrow 0} \frac{1}{\nabla^2 S} \oint_L \langle [\vec{E}_\tau \times \vec{n}], \vec{v} \rangle dl, \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{E}_\tau] \rangle = -\frac{1}{i\omega\mu} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{E}] \rangle.\end{aligned}\quad (233)$$

Análogamente, se hace lo mismo con el campo eléctrico:

$$\vec{E}_n = \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle = \frac{\langle \vec{n}, [\nabla_s \times \vec{H}_\tau] \rangle}{\sigma^*} = -\frac{1}{\sigma^*} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{H}_\tau] \rangle$$

$$= -\frac{1}{\sigma^*} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{H}] \rangle . \quad (234)$$

Ahora, usando la fórmula de Ostrogradsky - Gauss en  $2D$ :

$$\iint_S \langle \nabla_s, \vec{h}_\tau \rangle ds = \oint_L \langle \vec{h}_\tau, \vec{v} \rangle dl. \quad (235)$$

Y si tiene una superficie cerrada  $S$ , la ecuación anterior es igual a cero. Continuando, las ecuaciones 233 y 233 eliminan el campo normal, específicamente componentes. El resultado se obtiene haciendo que el operador rotacional en las siguientes fórmulas, entonces las integrales que contienen  $E_n$  y  $H_n$  desaparecen y las fórmulas de Stratton - Chu, permitiendo que la Ecuación 157 para el campo magnético  $\vec{H}$  y se verán así:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma^*} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds + \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds = \\ & = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} , \end{aligned} \quad (236)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{E}] G^h + \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds = \\ & = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} . \end{aligned} \quad (237)$$

Las ecuaciones 236 y 237 se llaman *integrales modificadas de Stratton - Chu*.

### 3.8.7 Fórmulas de Stratton - Chu en 2D

Si  $D$  está determinafio por fronteras por una superficie cilíndrica el cual está generado por un generador paralelo al eje  $y$  y al campo electromagnético  $\vec{E}, \vec{H}$  que es uniforme sobre el eje. Esto se reduce a  $2D$ .

Las ecuaciones de Stratton - Chu en  $2D$  mantienen una estructura en  $3D$ , mientras que la integración se hace alrededor de un entorno cerrada  $\Gamma$  el cual es una proyección sobre  $S$  en el plano  $XZ$  y la función de Green obtiene la siguiente forma:

$$G^h = G^h(\vec{r}'|\vec{r}) = -\frac{i}{4} H_o^{(1)}(k * |\vec{r} - \vec{r}'|), \quad (238)$$

donde  $H_o^{(1)}$  es de orden cero de la función de Henkel del primer tipo.

Las funciones  $2D$  de las ecuaciones de 227 y 228 análogas, permiten para 238, se obtienen:

$$\oint_{\Gamma} \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{H}]G^h \right] dt =$$

$$= \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}^j), \vec{r}^j \in D \\ 0, \vec{r}^j \in C\bar{D} \end{cases}, \quad (239)$$

$$\oint_{\Gamma} \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G^h] + \sigma * [\vec{n} \times \vec{E}]G^h \right] dt =$$

$$= \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}^j), \vec{r}^j \in D \\ 0, \vec{r}^j \in C\bar{D} \end{cases}, \quad (240)$$

donde  $\vec{n}$  el vector unitario que apuntan hacia afuera (normal); el contorno  $\Gamma$  es transversal arbitrario.

### 3.8.8 Fórmulas Stratton - Chu como análogos de las fórmulas de Cauchy

Las ecuaciones de Stratton - Chu y las integrales de Cauchy tienen sus funciones en puntos internos de un dominio que está evaluado en los valores de la frontera mientras que las integrales fuera de este dominio son cero.

Para  $\sigma * = 0$ , la ecuación 228 irá como una integral  $3D$  de Cauchy:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}^j|} + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}^j|}] \right] ds =$$

$$= \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}^j), \vec{r}^j \in D \\ 0, \vec{r}^j \in C\bar{D} \end{cases} \quad (241)$$

la cual es idéntica al caso  $2D$  de la integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} f(\zeta), \zeta \in D \\ 0, \zeta \in C\bar{D} \end{cases} \quad (242)$$

donde  $\zeta = x + iz$ ;  $\Gamma$  es el contorno de la intersección de la superficie cilíndrica  $S$  con  $XZ$ ; y la función  $f(\zeta) = -H_x + iH_z$ . Por estas razones, las fórmulas integrales de Stratton - Chu se consideran una extensión de la fórmula de Cauchy de un campo electromagnético  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ .

### 3.9 Integrales tipo Stratton - Chu

En este proyecto se está haciendo un tratamiento con las ecuaciones Stratton - Chu para un campo monocromático. Por esta causa, se ha prestado principal atención en la aplicación de este tipo de campo en las secciones anteriores y será la base principal de esta subsección.

#### 3.9.1 Integral Stratton - Chu para un campo monocromático

La aplicación de las ecuaciones integrales de Stratton - Chu en un campo electromagnético monocromático se definen con la siguiente descripción: sean  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  campos vectoriales que se ubican en la parte interna de una superficie cerrada  $S$  con fronteras en un dominio  $P$ , los campos satisfacen un par de condiciones:

1.  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  tienen componentes tangenciales diferenciales continuas,  $\vec{E}_\tau$  y  $\vec{H}_\tau$ , respectivamente.
2. Las componentes normales  $E_n$  y  $H_n$  se relacionan con las correspondientes componentes tangenciales por las ecuaciones 233 y 234:

$$E_n = -\frac{1}{\sigma^*} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{H}_\tau] \rangle, \quad H_n = -\frac{1}{i\omega\mu} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{E}_\tau] \rangle \quad (243)$$

las constantes son  $\sigma^*, \omega$  y  $\mu$ .

Desde este momento se introducen dos expresiones para el campo eléctrico y el campo magnético:

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}') = \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu [\vec{n} \times \vec{H}] G^h \right] ds$$

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}') = \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds - \nabla' \iint_S \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle G^h ds + i\omega\mu \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds \quad (244)$$

$$\mathbf{C}^H(\vec{r}') = \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G^h] + \sigma^* [\vec{n} \times \vec{E}] G^h \right] ds$$

$$\mathbf{C}^H(\vec{r}') = \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds - \nabla' \iint_S \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle G^h ds + \sigma^* \iint_S [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds, \quad (245)$$

$\vec{n}$  será un vector normal que está apuntando hacia dentro; mientras que  $G$  es la función fundamental de Green vista en la Ecuación 223. Estas dos nuevas ecuaciones son denominadas como las ecuaciones integrales tipo Stratton - Chu.

### 3.9.2 Propiedades de las integrales tipo Stratton - Chu

Las propiedades de las integrales tipo Stratton - Chu que se enlistarán a continuación tienen que satisfacer de diversas maneras las ecuaciones de Maxwell, he aquí que se puede visualizar de forma más directa que la aplicación al electromagnetismo y su importancia puede explicarse en unas cuantas ecuaciones el comportamiento de los campos tomando en consideración sus fuentes, cargas y corrientes.

Entonces, las propiedades de las integrales Stratton - Chu son:

1. Las integrales que se ubiquen fuera de  $S$  satisfacen las ecuaciones de Maxwell y, de acuerdo a la Ecuación 245, se puede obtener la próxima expresión:

$$rot' \mathbf{C}^H(\vec{r}') = rot' rot' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds + \sigma * rot' \iint_S [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds.$$

usando las ecuaciones 234 y 235 en la parte derecha de las primeras integrales:

$$\begin{aligned} rot' rot' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds &= grad' div' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds - \\ &\quad - \nabla^2 \iint_S [\nabla \times \vec{H}] G^h ds \\ &= grad' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] grad' G^h ds - \\ &\quad - \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] grad' G^h ds \\ &= -grad' \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] grad_s G^h ds + \\ &\quad k^{*2} \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds \\ &= grad' \iint_S div_s [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds + \\ &\quad grad' \iint_S G^h div_s [\vec{n} \times \vec{H}] ds + \\ &\quad + i\omega\mu\sigma * \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds \\ &= -\sigma * grad' \iint_S \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle G^h ds + \\ &\quad + i\omega\mu\sigma * \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds \\ &= \sigma * \iint_S \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^h ds + i\omega\mu\sigma * \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds. \end{aligned}$$

Y, la transformación de la segunda integral es:

$$\sigma * rot' \iint_S [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds = \sigma * \iint_S [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^h] ds.$$

Después de estas transformaciones, se obtiene:

$$rot' \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \sigma * \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{H}] G^h \right] ds.$$

Haciendo una comparativa con la Ecuación 244, se observa esta relación:

$$rot' \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \sigma * \mathbf{C}^E(\vec{r}'), \quad (246)$$

$$rot' \mathbf{C}^E(\vec{r}') = i\omega\mu \mathbf{C}^H(\vec{r}'). \quad (247)$$

Por lo tanto,  $\mathbf{C}^E$  y  $\mathbf{C}^H$  fuera de  $S$  satisfacen también la ecuación de Helmholtz, reescrita de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \mathbf{C}^{E,H} + k^{*2} \mathbf{C}^{E,H} = 0. \quad (248)$$

2. Si las densidades  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  de las integrales de Stratton - Chu coinciden con las fronteras de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , entonces satisfacen las ecuaciones de Maxwell [15]. Véase, la prueba de esto:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma * \vec{E}, \quad [\nabla \times \vec{E}] = i\omega\mu \vec{H},$$

en  $D$  a la superficie  $S$ , entonces se obtienen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}') = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}, \quad \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad (249)$$

3. Si las densidades  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  de las integrales de Stratton - Chu coinciden con las fronteras de los campos vectoriales  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , nuevamente satisfacen las ecuaciones de Maxwell [15]:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma * \vec{E}, \quad [\nabla \times \vec{E}] = i\omega\mu \vec{H}$$

que se encuentran en  $C\bar{D}$  directas hacia  $S$ , pero eventualmente desaparecen hacia el infinito, entonces se tienen las relaciones inmediatas:

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}') = \begin{cases} 0, \vec{r}' \in D \\ -\vec{E}(\vec{r}'), \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}, \quad \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \begin{cases} 0, \vec{r}' \in D \\ -\vec{H}(\vec{r}'), \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad (250)$$

4. Si las densidades  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  de las integrales Stratton - Chu satisfacen las condiciones de Hölder que son las siguientes:

Las condiciones de Hölder son aplicables a las funciones con tres variables  $\phi(\vec{r})$  y, a su vez, deben cumplir en toda la superficie  $S$ . Por lo que deben existir constantes positivas,  $A_{\alpha\beta}$  y  $\lambda_{\alpha\beta}$ :

$$\alpha, \beta = x, y, z; \quad 0 < \lambda_{\alpha\beta} \leq 1$$

tal que

$$|\phi_a(x'', y'', z'') - \phi_a(x', y', z')| \leq A_{ax}|x'' - x'|^{\lambda_{ax}} + A_{ay}|y'' - y'|^{\lambda_{ay}} + A_{az}|z'' - z'|^{\lambda_{az}}$$

donde  $a = x, y, z$ ;  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$  son coordenadas cartesianas de  $\psi$  [15].

De aquí es posible calcular los límites de las ecuaciones de Stratton - Chu para el interior y exterior de  $S$  para  $\vec{r}_0 \in S$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0) &= \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^+} \mathbf{C}^E(\vec{r}') = \mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0) + \frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}_0) \\ \mathbf{C}^{H+}(\vec{r}_0) &= \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^+} \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0) + \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}_0) \\ \mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0) &= \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^-} \mathbf{C}^E(\vec{r}') = \mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0) - \frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}_0) \\ \mathbf{C}^{H-}(\vec{r}_0) &= \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^-} \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0) - \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}_0) \end{aligned} \quad (251)$$

donde  $\mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0)$  y  $\mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0)$  son definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0) &= \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{E} \times \nabla G^h]] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{H}]G^h \right] ds, \\ \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0) &= \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{H} \times \nabla G^h]] + \sigma^*[\vec{n} \times \vec{E}]G^h \right] ds, \\ G^h &= G^h(\vec{r}_0|\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp ik^*|\vec{r} - \vec{r}_0|}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \end{aligned} \quad (252)$$

Estas últimas ecuaciones se encuentran en términos de los valores de Cauchy.

Las ecuaciones de Stratton - Chu tienen similitudes con sus versiones modificadas, ambas tienden a tener discontinuidades en la superficie  $S$ :

$$\mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0) - \mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0) = \vec{E}(\vec{r}_0); \quad \mathbf{C}^{H+}(\vec{r}_0) - \mathbf{C}^{H-}(\vec{r}_0) = \vec{H}(\vec{r}_0). \quad (253)$$



Ahora, con los límites obtenidos previamente, se dice que son equivalentes a integrales dobles singulares:

$$\mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0) + \mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0); \quad \mathbf{C}^{H+}(\vec{r}_0) + \mathbf{C}^{H-}(\vec{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0). \quad (254)$$

De aquí en adelante, se proporciona la forma en la que interactúan las integrales tipo Stratton - Chu con las ecuaciones de Maxwell. Primero, se considera un campo  $\vec{F}$  que es excitado por unas rotaciones y diversas fuentes que se encuentran distribuidas por las superficies cerrada  $S$  con densidades de carga y corriente,  $q_s$  y  $\vec{j}_s$ . Fuera de los límites de  $S$ , la ecuación de Helmholtz es dada así:

$$\vec{F}(\vec{r}') = - \iint_S \left\{ q_s \nabla G^h + [\vec{j}_s \times \nabla G^h] \right\} ds.$$

Tomando en consideración que este campo  $\vec{F}$  está limitado internamente por  $S^+$  y externamente por  $S^-$ , sus lados serán descritos por las siguientes expresiones matemáticas:

$$\vec{F}^+(\vec{r}_0) = \vec{F}_0(\vec{r}_0) - \frac{1}{2} \left[ q_s(\vec{r}_0)\vec{n} + [\vec{j}_s(\vec{r}_0) \times \vec{n}] \right],$$

$$\vec{F}^-(\vec{r}_0) = \vec{F}_0(\vec{r}_0) + \frac{1}{2} \left[ q_s(\vec{r}_0)\vec{n} + [\vec{j}_s(\vec{r}_0) \times \vec{n}] \right], \quad (255)$$

para cada  $\vec{r}_0 \in S$  y  $\vec{F}_0(\vec{r}_0)$  es una integral en términos del valor principal de Cauchy.

Continuando, para una discontinuidad del campo  $\vec{F}$  en la superficies  $S$ , se obtiene:

$$\vec{F}^+(\vec{r}_0) - \vec{F}^-(\vec{r}_0) = -q_s(\vec{r}_0)\vec{n}(\vec{r}_0) - [\vec{j}_s(\vec{r}_0) \times \vec{n}(\vec{r}_0)]. \quad (256)$$

Esta es una analogía con el campo  $\mathbf{C}^E$  donde las cargas eléctricas y corrientes se dan así:

$$q_s = q_s^e/\epsilon^*; \quad \vec{j}_s = -\vec{j}_s^m,$$

trayendo las ecuaciones 232, 255 y 256 y se obtiene:

$$\begin{aligned} -q_s\vec{n} - [\vec{j}_s \times \vec{n}] &= -\frac{q_s^e\vec{n}}{\epsilon^*} + [\vec{j}_s^m \times \vec{n}], \\ &= \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \vec{n} + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \vec{n}], \\ &= \vec{E}. \end{aligned}$$

### 3.9.3 Integrales de Stratton - Chu modificadas

Se han manejado superficies cerradas con la finalidad de que las ecuaciones de Stratton - Chu mantengan sus propiedades. Aunque también se puede mostrar que las integrales son capaces de mantenerlas en una superficie abierta.

Para ver esta modificación, sea  $\Gamma$  una superficie con un contorno  $L$ . Se consideran las integrales:

$$\vec{M}^E(\vec{r}) = \mathbf{C}^E(\vec{r}) + \frac{1}{\sigma^*} \vec{L}^H(\vec{r}'); \quad \vec{M}^H(\vec{r}') = \mathbf{C}^H(\vec{r}') + \frac{1}{i\omega\mu} \vec{L}^E(\vec{r}') \quad (257)$$

donde  $\vec{L}^E(\vec{r}')$  y  $\vec{L}^H(\vec{r}')$  están definidas de la siguiente forma:

$$\vec{L}^E(\vec{r}') = \text{grad}' \oint_L G^h \vec{E} d\vec{l}, \quad \vec{L}^H(\vec{r}') = \text{grad}' \oint_L G^h \vec{H} d\vec{l}. \quad (258)$$

La dirección de la superficie normal  $\Gamma$  así como la dirección transversal de  $L$  deben de estar emparejadas para formar una tríada derecha. Y las integrales  $\vec{M}^E$  y  $\vec{M}^H$  son nombradas como las integrales tipo Stratton - Chu modificadas. La diferencia que tienen con las integrales  $\mathbf{C}^E$  y  $\mathbf{C}^H$  es, primordialmente, por tener integrales lineales  $\vec{L}^E$  y  $\vec{L}^H$  las cuales contienen las cargas y corrientes electromagnéticas que se acumulan en  $\Gamma$  [15].

Par demostrar esta proposición sólo se puede ver  $\Gamma$  como una superficie cerrada, entonces:

$$\vec{M}^E = \mathbf{C}^E; \quad \vec{M}^H = \mathbf{C}^H,$$

por lo que es fácil ver que los resultados son idénticos a los logrados para el campo monocromático. Al aplicar la fórmula Ostrogradsky - Gauss en  $2D$  y su análoga para cuando la superficie es cerrada, las integrales  $\mathbf{C}^E$  y  $\mathbf{C}^H$ :

$$\begin{aligned} \oint_L G^h \vec{H} dl &= \oint_L G^h \vec{H} [\vec{n} \times \vec{v}] dl = - \oint_L G^h \langle [\vec{n} \times \vec{H}], \vec{v} \rangle dl, \\ &= - \iint_{\Gamma} \text{div}_s G^h [\vec{n} \times \vec{H}] ds, \\ &= - \iint_{\Gamma} G^h \text{div}_s [\vec{n} \times \vec{H}] ds - \iint_{\Gamma} \{ [\vec{n} \times \vec{H}], \text{grad}_s G^h \} ds, \\ &= \sigma^* \iint_{\Gamma} \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle G^h ds + \text{div}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds. \end{aligned}$$

Sustituyendo la relación en la Ecuación 257 se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{M}^E(\vec{r}') &= \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds + i\omega\mu \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds + \\ &+ \frac{\text{grad}' \text{div}'}{\sigma^*} \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds, \\ &= \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds + \frac{\text{grad}' \text{div}' - \nabla'^2}{\sigma^*} \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds, \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sigma^*} \text{rot}' \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds + \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds, \quad (259)$$

$$\vec{M}^H(\vec{r}') = \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot}' \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds + \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds. \quad (260)$$

Las propiedades de las integrales modificadas y las generales se cumplen de igual forma siempre y cuando la superficies es cerrada. Sin embargo, es relevante enumerar las propiedades en caso de tener una superficie abierta. Estas se exponen a continuación:

1. Las integrales modificadas fuera de  $\Gamma$  que tiene  $L$  como contorno, entonces satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Y aplicando la definición de las ecuaciones 259 y 260 con el rotacional, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{rot}' \vec{M}^H(\vec{r}) &= \frac{\text{rot}' \text{rot}' \text{rot}'}{i\omega\mu} \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds + \text{rot}' \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds, \\ &= -\frac{\text{rot}' \nabla'^2}{i\omega\mu} \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds + \text{rot}' \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds, \\ &= -\frac{\text{rot}'}{i\omega\mu} \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{E}] \nabla'^2 G^h ds + \text{rot}' \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds, \\ &= \sigma^* \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{E}] G^h ds + \text{rot}' \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\vec{n} \times \vec{H}] G^h ds, \end{aligned}$$

$$\text{rot}' \vec{M}^H(\vec{r}') = \sigma^* \vec{M}^E(\vec{r}'), \quad (261)$$

$$\text{rot}' \vec{M}^E(\vec{r}') = i\omega\mu \vec{M}^H(\vec{r}'). \quad (262)$$

Ambas ecuaciones 261 y 262 satisfacen la ecuación de Helmholtz:  $\nabla'^2 \vec{M}^{E,H} + k^{*2} \vec{M}^{E,H} = 0$ .

2. Para los límites de las integrales modificadas, se elije un lado positivo y uno negativo de la superficie  $\Gamma$  de tal manera que cuando el vector normal lo atraviese sea de negativo a positivo.

Relacionando las ecuaciones 251 y 257 para todo  $\vec{r} \in \Gamma$ , los límites se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{M}^{E+}(\vec{r}_0) &= \mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0) + \frac{1}{\sigma^*} \vec{L}^H(\vec{r}_0) = \mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0) + \frac{1}{\sigma^*} \vec{L}^H(\vec{r}_0) + \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}_0), \\ \vec{M}^{H+}(\vec{r}_0) &= \mathbf{C}^{H+}(\vec{r}_0) + \frac{1}{i\omega\mu} \vec{L}^E(\vec{r}_0) = \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0) + \frac{1}{i\omega\mu} \vec{L}^E(\vec{r}_0) + \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}_0), \\ \vec{M}^{E-}(\vec{r}_0) &= \mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0) + \frac{1}{\sigma^*} \vec{L}^H(\vec{r}_0) = \mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0) + \frac{1}{\sigma^*} \vec{L}^H(\vec{r}_0) - \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}_0), \end{aligned}$$

$$\vec{M}^{H-}(\vec{r}_0) = \mathbf{C}^{H-}(\vec{r}_0) + \frac{1}{i\omega\mu} \vec{L}^E(\vec{r}_0) = \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0) + \frac{1}{i\omega\mu} \vec{L}^E(\vec{r}_0) - \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}_0). \quad (263)$$

Notesé que  $\mathbf{C}_0^{E,H}$  es para las integrales de las ecuaciones 252 y  $\vec{L}^{E,H}$  son las integrales propias de las ecuaciones de 258. Entonces, con estos cálculos realizados en esta sección se muestra que las discontinuidades en la superficie  $\Gamma$  brindan las siguientes relaciones:

$$\vec{M}^{E+} - \vec{M}^{E-} = \vec{E}; \quad \vec{M}^{H+} - \vec{M}^{H-} = \vec{H}. \quad (264)$$

### 3.9.4 Las integrales Stratton - Chu para campo cuasi - estacionarios

Readquiriendo las propiedades de un campo cuasi - estacionario recuerde que los campos varían arbitrariamente en el tiempo  $t$ . Entonces, sean  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  campos vectoriales internos en una superficie  $S$  con frontera en un dominio  $D$ , obviamente depende de  $t$  y dos condiciones tienen que ser satisfechas:

- Tienen componentes diferenciables continuos,  $\vec{E}_\tau$  y  $\vec{H}_\tau$ .
- Sus componentes normales  $E_n$  y  $H_n$  se relacionan con los tangenciales por las siguientes expresiones:

$$E_n = -\frac{1}{\sigma} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{H}_\tau] \rangle; \quad \frac{\partial H_n}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{E}_\tau] \rangle, \quad (265)$$

donde  $\sigma$  y  $\mu$  son constantes,  $div_s$  se refiere a la divergencia de la superficies [15].

Se visualiza que las ecuaciones 265 son la forma  $2D$  de las ecuaciones de Maxwell 127 a 130. Ahora, presentando los campos con las ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}', t') = \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle \nabla G^d + [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \nabla G^d] + \mu [\vec{n} \times \vec{H}] \frac{\partial G^d}{\partial t} \right] dsdt, \quad (266)$$

$$\mathbf{C}^H(\vec{r}', t') = \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G^d + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G^d] + \sigma [\vec{n} \times \vec{E}] \right] dsdt, \quad (267)$$

y donde  $G^d$  es la función de Green obtenida en la ecuación 198. Observando adecuadamente este par de ecuaciones, se aprecia una coincidencia con 202 y 203.

266 y 267 son las ecuaciones de Stratton - Chu para los campos cuasi - estacionarios y a al igual que los realizados para campos monocromáticos y comparten propiedades con estas mismas. No obstante, se enlistarán las propiedades para las integrales de campos cuasi - estacionarios:

1. Las ecuaciones Stratton - Chu fuera de  $S$  cumplen las siguientes relaciones:

$$[\nabla' \times \mathbf{C}^H] = \sigma \mathbf{C}^E, \quad [\nabla' \times \mathbf{C}^E] = -\mu \frac{\partial \mathbf{C}^H}{\partial t}, \quad (268)$$

vea que las ecuaciones describen el comportamiento del campo cuasi - estacionario. Fuera de  $S$ , los campos  $\mathbf{C}^E$  y  $\mathbf{C}^H$  satisfacen la ecuación de difusión:

$$\nabla^2 \mathbf{C}^{E,H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{C}^{E,H}}{\partial t'} = 0. \quad (269)$$

2.  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  que son las densidades de las integrales serán idénticas a los valores fronterizos de los campos vectoriales en  $D$  y  $S$ ; en consecuencia, las ecuaciones de Maxwell se redefinen:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma \vec{E}, \quad [\nabla \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \langle \nabla, \vec{H} \rangle = 0, \quad \langle \nabla, \vec{E} \rangle = 0, \quad (270)$$

y describen los campos con las posteriores definiciones:

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}') = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases}, \quad \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}'), \vec{r}' \in D \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D} \end{cases} \quad (271)$$

Se puede ver la similitud con la segunda propiedad de los campos monocromáticos.

3. De nuevo, si las densidades son continuas cumpliendo las condiciones de Hölder en  $S$ , entonces los límites internos y externos en  $S$  existen, véase las ecuaciones de 251.

Prosiguiendo y otorgando una interpretación física de las ecuaciones 266 y 267, considere cargas y corrientes electromagnéticas distribuidas dentro de  $S$  siendo estas  $\vec{j}_S^e, \vec{j}_S^m, q_S^e$  y  $q_S^m$ . Por fuera de  $S$ , estas cargas y corrientes excitan un campo electromagnético, dad por el siguiente par de ecuaciones:

$$\vec{E}(\vec{r}', t') = \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left( \frac{q_S^e}{\epsilon} \nabla G^d - [\vec{j}_S^m \times \nabla G^d] + \mu \vec{j}_S^e \frac{\partial G^d}{\partial t} \right) ds dt \quad (272)$$

$$\vec{H}(\vec{r}', t') = \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left( \frac{q_S^m}{\epsilon} \nabla G^d - [\vec{j}_S^e \times \nabla G^d] - \sigma \vec{j}_S^m \right) ds dt. \quad (273)$$

Las ecuaciones 272 y 273 demuestran que ya sea un campo electromagnético originado por fuentes reales o ficticias, fuera de  $S$ , el campo aún así se excitará. Recuerde que las densidades ficticias se escriben de esta forma:

$$\vec{j}_S^e = -[\vec{n} \times \vec{E}], \quad \vec{j}_S^m = [\vec{n} \times \vec{E}], \quad q_S^e = -\epsilon \langle \vec{n}, \vec{E} \rangle, \quad q_S^m = -\mu \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle. \quad (274)$$

### 3.10 Campos electromagnéticos con transformadas integrales

#### 3.10.1 Condiciones de integrales de frontera para un campo electromagnético sobre un dominio homogéneo

Considerando un dominio  $D$  en alguna parte del espacio, el cual está contenido en una superficies cerrada  $S$  con una frontera [15]. Sus parámetros electro-

magnéticos serán constantes y medibles.

Sean funciones vectoriales continuas de Hölder,  $\vec{e}(\vec{r})$  y  $\vec{h}(\vec{r})$  con componentes tangenciales continuas y, a su vez, diferenciables. Entonces, las funciones deben satisfacer las condiciones y actuar como valores de frontera para un campo electromagnético  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  ubicados dentro  $D$  y descritos por las siguientes ecuaciones:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma^* \vec{E}, \quad [\nabla \times \vec{E}] = i\omega\mu\vec{H}, \quad (275)$$

donde  $\sigma^* = \sigma - i\omega\epsilon$  y recuerde que este campo es monocromático. Sin embargo, el problema inicia al momento de conocer la frecuencia angular  $\omega$ .

Ahora, el primero y sencillo requisito para  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  tomando en consideración 233 y 234, es:

$$e_n = -\frac{1}{\sigma^*} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{h}_\tau] \rangle, \quad h_n = -\frac{1}{i\omega\mu} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{e}_\tau] \rangle, \quad (276)$$

$\vec{e}_n, \vec{h}_n$  y  $\vec{e}_\tau, \vec{h}_\tau$  son los componentes normales y tangenciales, respectivamente. Se encuentran en  $S$ . Sin embargo, no completan las condiciones suficientes para que  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  sean valor que cumplan 275 en  $D$ .

Buscando satisfacer las condiciones de valores de frontera del campo electromagnético, se reescriben las integrales de Stratton - Chu con  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$ :

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}) = \iint_S \left\{ \langle \vec{n}, \vec{e} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{e}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{h}]G^h \right\} ds \quad (277)$$

$$\mathbf{C}^H(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}) = \iint_S \left\{ \langle \vec{n}, \vec{h} \rangle \nabla G^e + [[\vec{n} \times \vec{h}] \times \nabla G^e] + \sigma^*[\vec{n} \times \vec{e}]G^e \right\} ds. \quad (278)$$

De acuerdo a la segunda propiedad de las integrales de Stratton - Chu para los campos monocromáticos, la condición requerida para que las funciones vectoriales sean valores de frontera en  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , originadas por fuentes externas a  $\bar{D}$ .

Las relaciones siguientes son necesarias para que este escenario se cumpla:

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}) \equiv 0, \quad \mathbf{C}^H(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}) \equiv 0, \quad \forall \vec{r}' \in C\bar{D}. \quad (279)$$

Retomando 276 en conjunto con 279 es posible tener las condiciones necesarias para que  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  sean valores de frontera. Por último, se definen matemáticamente,  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ :

$$\vec{E}(\vec{r}') = \mathbf{C}^E(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}), \quad \vec{H}(\vec{r}') = \mathbf{C}^H(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}). \quad (280)$$

Con el objetivo de demostrar estas propiedades de las contrapartes electromagnéticas, se aplican las ecuaciones de Sokhotsky - Plemel 253. Dentro del campo de  $D$ :

$$\mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) - \mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) = \vec{e}(\vec{r}_0) \quad (281)$$

y fuera de  $D$ , el campo se vuelve así:

$$\mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) = \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^-} \mathbf{C}^E(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}) = 0. \quad (282)$$

El conjunto de ecuaciones 281 y 282 indica que  $\vec{E}(\vec{r}')$  es continua en  $S$  dentro de  $D$ , lo mismo es para  $\vec{H}(\vec{r}')$ . De aquí, se escriben los límites para los campos:

$$\lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^+} \vec{E}(\vec{r}') = \mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) = \vec{e}(\vec{r}_0) \quad (283)$$

$$\lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^+} \vec{H}(\vec{r}') = \mathbf{C}^{H+}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) = \vec{h}(\vec{r}_0) \quad (284)$$

De las últimas relaciones surge el siguiente teorema:

**Teorema 11** Para  $\vec{e}(\vec{r})$  y  $\vec{h}(\vec{r})$  que son funciones vectoriales continuas de Hölder con componentes diferenciales tangenciales en una superficie cerrada  $S$  que delimita el dominio  $D$ , para que sean valores de frontera dentro de  $S$  de un campo electromagnético originado por cargas y corrientes externas de  $D$ , deben satisfacer 276 y 279.

Otro teorema que sustenta las condiciones y formulaciones explicadas anteriormente, es este:

**Teorema 12** La condición inevitable que permite que las funciones vectoriales sean continuas (Hölder) en una superficies cerrada  $S$  cercando un dominio  $D$  y con componentes tangenciales diferenciales que fungen como valores fronterizos al interior de  $S$  del campo  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  creado por fuentes externas de  $D$ , engloba estas ecuaciones:

$$\epsilon_n = -\frac{1}{\sigma^*} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{h}_\tau] \rangle, \quad h_n = -\frac{1}{i\omega\mu} \langle \nabla_s, [\vec{n} \times \vec{e}_\tau] \rangle \quad (285)$$

$$\vec{e}(\vec{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}), \quad \vec{h}(\vec{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) \quad (286)$$

aquí  $\mathbf{C}_0^E$  y  $\mathbf{C}_0^H$  son integrales singulares en términos de Cauchy. Noté que  $\vec{n}$  sigue siendo un vector normal que va en dirección fuera de  $D$ .

Y se expone un tercer y último teorema:

**Teorema 13** Las funciones vectoriales  $\vec{e}(\vec{r})$  y  $\vec{h}(\vec{r})$  que satisfacen las condiciones de Hölder con las implicaciones intrínsecas y con el mismo escenario previo, las condiciones de 285 sean cumplidas y también las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{C}^E(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}) = 0; \quad \mathbf{C}^H(\vec{r}'; \vec{e}, \vec{h}) = 0, \quad \forall \vec{r}' \in D, \quad (287)$$

o bien,

$$\vec{e}(\vec{r}_0) = -2\mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}), \quad \vec{h}(\vec{r}_0) = -2\mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) \quad (288)$$

El par de ecuaciones 286 y 288 son llamadas condiciones de frontera integrales para un campo electromagnético monocromático sobre la frontera de un dominio homogéneo.

### 3.10.2 Determinación de un campo electromagnético para una discontinuidad específica

En esta subsección se enfocará en resolver el problema de un campo que presente discontinuidades. Sean  $\vec{e}(\vec{r})$  y  $\vec{h}(\vec{r})$  funciones vectoriales de Hölder en  $S$  con sus respectivos componentes y familiarizados con la Ecuación 276, la superficie es cerrada.

El objetivo es encontrar el campo electromagnético que cumpla con las ecuaciones 275 fuera de la superficie, desapareciendo al infinito pero presentando una discontinuidad al atravesar  $S$  [15]:

$$\vec{E}^+(\vec{r}_0) - \vec{E}^-(\vec{r}_0) = \vec{e}(\vec{r}_0), \quad \vec{H}^+(\vec{r}_0) - \vec{H}^-(\vec{r}_0) = \vec{h}(\vec{r}_0), \quad \vec{r}_0 \in S. \quad (289)$$

Para solucionar este problema se aplican las integrales de Stratton - Chu a continuación:

$$\vec{E}(\vec{r}') = \mathbf{C}^E(\vec{r}') = \iint_S \left\{ \langle \vec{n}, \vec{e} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{e}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{h}]G^h \right\} ds,$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \iint_S \left\{ \langle \vec{n}, \vec{h} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{h}] \times \nabla G^h] + \sigma^*[\vec{n} \times \vec{e}]G^h \right\} ds. \quad (290)$$

Veáse que estas soluciones aplican para funciones analíticas complejas y campos de Laplace 3D únicos.

Empleando la Ecuación 290 al evaluar el campo  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  para una discontinuidad, se pueden lograr las integrales de Stratton - Chu modificadas que son similares a 259 y 260:

$$\vec{E}(\vec{r}') = \vec{M}^E(\vec{r}') = \frac{1}{\sigma^*} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{h}]G^h ds + \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{e}]G^h ds,$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = \vec{M}^H(\vec{r}') = \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{e}]G^h ds + \text{rot}' \iint_S [\vec{n} \times \vec{h}]G^h ds. \quad (291)$$

La reescritura correspondiente a las ecuaciones 291 mejora las previas expresiones debido a que puede ser usada para superficies abiertas o cerradas, es decir, es general. Satisfaciendo todas las condiciones y parámetros necesarios ya sea que presenten discontinuidades o no.

Considere previamente que en el caso de discontinuidad, el campo electromagnético será único para cada discontinuidad.

### 3.10.3 Fórmulas de inversión para las integrales de Stratton - Chu

Manteniendo el escenario del dominio bordeado por una superficie. Se tienen las funciones vectoriales de Hölder arbitrarias  $\vec{e}(\vec{r})$  y  $\vec{h}(\vec{r})$  actuando sobre  $S$ .



Los componentes de estas funciones obedecen a 276. Luego, sean  $\vec{u}(\vec{r}_0)$  y  $\vec{v}(\vec{r}_0)$  integrales singulares definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0; \vec{e}\vec{h}) = 2 \iint_S \left\{ \langle \vec{n}, \vec{e} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{e}] \times \nabla G^h] \right. \\ \left. + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{h}]G^h \right\} ds. \end{aligned} \quad (292)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0; \vec{e}\vec{h}) = 2 \iint_S \left\{ \langle \vec{n}, \vec{h} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{h}] \times \nabla G^h] \right. \\ \left. + \sigma^*[\vec{n} \times \vec{e}]G^h \right\} ds. \end{aligned} \quad (293)$$

$\vec{e}(\vec{r})$  y  $\vec{h}(\vec{r})$  son desconocidos. Las ecuaciones 292 y 293 son semejantes a las integrales tipo Cauchy por lo que son las que se resolvieron para obtener las funciones vectoriales.

Aprovechando las propiedades de las ecuaciones de Stratton - Chu se tiene que  $\vec{u}(\vec{r}_0)$  y  $\vec{v}(\vec{r}_0)$  satisfacen las condiciones de Hölder dadas en 276 y si a esto se tienen las funciones  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  como valores de frontera para el sistema descrito y en conjunto con el teorema 12, las relaciones análogas para  $\vec{u}(\vec{r})$  y  $\vec{v}(\vec{r})$  son:

$$\vec{u}(\vec{r}_0) = \vec{e}(\vec{r}_0), \quad \vec{v}(\vec{r}_0) = \vec{h}(\vec{r}_0), \quad \vec{r}_0 \in S. \quad (294)$$

Aunque no debe asumirse que  $\vec{u} \neq \vec{e}$  y  $\vec{v} \neq \vec{h}$ . Ahora, el paso inicial es usar las ecuaciones de 254 del campo electromagnético y así reescribir 292 y 293 de la manera:

$$\mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) + \mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) = \vec{u}(\vec{r}_0); \quad \mathbf{C}^{H+}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) + \mathbf{C}^{H-}(\vec{r}_0; \vec{e}, \vec{h}) = \vec{v}(\vec{r}_0) \quad (295)$$

Para las soluciones de  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{H}(\vec{r})$  se definen sus respectivas funciones inmediatamente:

$$\vec{E}(\vec{r}') = \begin{cases} \mathbf{C}^E(\vec{r}; \vec{e}, \vec{h}), \vec{r} \in D \\ -\mathbf{C}^E(\vec{r}; \vec{e}, \vec{h}), \vec{r} \in C\bar{D} \end{cases}, \quad (296)$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = \begin{cases} \mathbf{C}^H(\vec{r}; \vec{e}, \vec{h}), \vec{r} \in D \\ -\mathbf{C}^H(\vec{r}; \vec{e}, \vec{h}), \vec{r} \in C\bar{D} \end{cases}. \quad (297)$$

Las funciones  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  satisfacen las ecuaciones de Maxwell 275 y con su respectiva discontinuidad de acuerdo a 295, se brindan las ecuaciones:

$$\vec{E}^+(\vec{r}_0) - \vec{E}^-(\vec{r}_0) = \vec{u}(\vec{r}_0), \quad \vec{H}^+(\vec{r}_0) - \vec{H}^-(\vec{r}_0) = \vec{v}(\vec{r}_0). \quad (298)$$

Entonces, el campo electromagnético dado por una cierta discontinuidad específica al utilizar las integrales de Stratton - Chu:

$$\vec{E}(\vec{r}') = \mathbf{C}^E(\vec{r}'; \vec{u}, \vec{v}), \quad \vec{H}(\vec{r}') = \mathbf{C}^H(\vec{r}'; \vec{u}, \vec{v}). \quad (299)$$

Empleando las ecuaciones de Sokhotsky - Plemel; al grupo de ecuaciones 299, se expresan así:

$$\vec{E}^+(\vec{r}_0) + \vec{E}^-(\vec{r}_0) = \mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}) + \mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}) = 2\mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}),$$

$$\vec{H}^+(\vec{r}_0) + \vec{H}^-(\vec{r}_0) = \mathbf{C}^{H+}(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}) + \mathbf{C}^{H-}(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}) = 2\mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}). \quad (300)$$

En caso contrario, si se cumplen las fórmulas de 296, 297 y las de Sokhotsky - Plemel, el resultado será el siguiente:

$$\vec{E}^+(\vec{r}_0) + \vec{E}^-(\vec{r}_0) = \mathbf{C}^{E+}(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}) - \mathbf{C}^{E-}(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}) = \vec{e}(\vec{r}_0),$$

$$\vec{H}^+(\vec{r}_0) + \vec{H}^-(\vec{r}_0) = \mathbf{C}^{H+}(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}) - \mathbf{C}^{H-}(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{h}) = \vec{h}(\vec{r}_0). \quad (301)$$

Como los lados izquierdos de los grupos de ecuaciones 300 y 301 son idénticos, entonces los derechos son equivalentes; por lo que:

$$\begin{aligned} \vec{e}(\vec{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^E(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{v}) = 2 \iint_S \{ \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{u}] \times \nabla G^h] + \\ + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{v}]G^h \} ds. \end{aligned} \quad (302)$$

$$\begin{aligned} \vec{h}(\vec{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0; \vec{u}, \vec{v}) = 2 \iint_S \{ \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{v}] \times \nabla G^h] + \\ + \sigma^*[\vec{n} \times \vec{u}]G^h \} ds. \end{aligned} \quad (303)$$

He aquí la semejanza entre el par de ecuaciones 302 y 303 con 292 y 293 pues las primeras dan solución a las segundas.

Siguiendo con el procedimiento aplicado en las ecuaciones 292 y 293, se alcanzan las transformadas integrales de Stratton - Chu:

$$\vec{u}(\vec{r}_0) = 2 \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{e} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{e}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu[\vec{n} \times \vec{h}]G^h \right] ds,$$

$$\vec{v}(\vec{r}_0) = 2 \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{h} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{h}] \times \nabla G^h] + \sigma^* [\vec{n} \times \vec{e}] G^h \right] ds \quad (304)$$

$$\vec{e}(\vec{r}_0) = 2 \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{u}] \times \nabla G^h] + i\omega\mu [\vec{n} \times \vec{v}] G^h \right] ds,$$

$$\vec{h}(\vec{r}_0) = 2 \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle \nabla G^h + [[\vec{n} \times \vec{v}] \times \nabla G^h] + \sigma^* [\vec{n} \times \vec{u}] G^h \right] ds. \quad (305)$$

Si se presenta el caso de  $\omega = 0$  y  $\sigma^* = 0$ , las transformadas integrales de Stratton - Chu se vuelven transformadas de Cauchy.

### 3.10.4 Transformadas integrales de Stratton - Chu en el plano

Donde  $S$  se ubica en el plano  $xy$  bajo la suposición de que  $\vec{e}, \vec{h}$  y  $\vec{u}, \vec{v}$  son de cero a infinito, se reescriben las ecuaciones 304 y 305.

Aquí las integrales de Stratton - Chu tiene valores principales en límites infinitos haciendo que la ecuación 304 y se escribe:

$$\begin{aligned} \vec{u}(x_0, y_0, 0) &= 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ e_z \frac{\partial G^h}{\partial y} \vec{d}_x + e_z \frac{\partial G^h}{\partial y} \vec{d}_y - \left( e_x \frac{\partial G^h}{\partial x} + e_y \frac{\partial G^h}{\partial y} \right) \vec{d}_z + \right. \\ &\quad \left. + i\omega\mu (h_x G^h \vec{d}_x - h_y G^h \vec{d}_x) \right] ds, \\ \vec{v}(x_0, y_0, 0) &= 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ h_z \frac{\partial G^h}{\partial y} \vec{d}_x + h_z \frac{\partial G^h}{\partial y} \vec{d}_y - \left( h_x \frac{\partial G^h}{\partial x} + h_y \frac{\partial G^h}{\partial y} \right) \vec{d}_z + \right. \\ &\quad \left. + \sigma^* (e_x G^h \vec{d}_x - e_y G^h \vec{d}_x) \right] ds. \end{aligned} \quad (306)$$

Para poder operar las funciones sobre el plano, se introducen los operadores integrales:

$$\hat{G}_x^h f(x, y) = \hat{G}_x^h f = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G^h}{\partial x} f dx dy,$$

$$\hat{G}_y^h f(x, y) = \hat{G}_y^h f = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G^h}{\partial y} f dx dy,$$

$$\hat{G}^h f(x, y) = \hat{G}^h f = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} G^h f dx dy, \quad (307)$$

Por las formulaciones de 306 se excitan como:

$$u_x = \hat{G}_x^h e_z - i\omega\mu \hat{G}^h h_y, \quad u_y = \hat{G}_y^h e_z + i\omega\mu \hat{G}^h h_x, \quad u_z = -\hat{G}_x^h e_x - \hat{G}_y^h e_y; \quad (308)$$

$$v_x = \hat{G}_x^h h_z - \sigma^* \hat{G}^h e_y, \quad v_y = \hat{G}_y^h h_z + \sigma^* \hat{G}_y^h e_x, \quad v_z = -\hat{G}_x^h h_x - \hat{G}_y^h h_y \quad (309)$$

y con sus correspondientes ecuaciones de inversión de 305:

$$e_x = \hat{G}_x^h u_z - i\omega\mu\hat{G}^h v_y, \quad e_y = \hat{G}_y^h u_z + i\omega\mu\hat{G}^h v_x, \quad e_z = -\hat{G}_x^h u_x - \hat{G}_y^h u_y; \quad (310)$$

$$h_x = \hat{G}_x^h v_z - \sigma^* \hat{G}^h u_y, \quad h_y = \hat{G}_y^h v_z + \sigma^* \hat{G}_y^h u_x, \quad h_z = -\hat{G}_x^h v_x - \hat{G}_y^h v_y. \quad (311)$$

Si  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  son valores de frontera en  $z = 0$  del campo  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  que cumplen con las ecuaciones de Maxwell 275 en cualquier parte en donde la mitad del espacio tienda de cero a infinito.

Entonces empleando el teorema 12, en conjunto con  $\vec{e} \equiv \vec{u}$  y  $\vec{h} \equiv \vec{v}$  que satisfacen 308 y 309; las ecuaciones se reescriben así:

$$e_x = \hat{G}_x^h e_z - i\omega\mu\hat{G}^h h_y, \quad e_y = \hat{G}_y^h e_z + i\omega\mu\hat{G}^h h_x, \quad e_z = -\hat{G}_x^h e_x - \hat{G}_y^h e_y \quad (312)$$

$$h_x = \hat{G}_x^h h_z - \sigma^* \hat{G}^h e_y, \quad h_y = \hat{G}_y^h h_z + \sigma^* \hat{G}_y^h e_x, \quad h_z = -\hat{G}_x^h h_x - \hat{G}_y^h h_y. \quad (313)$$

De la misma manera, para el model donde  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  sean valores de frontera para  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  satisfaciendo 275 en cualquier parte superior de la mitad del espacio hasta el infinito, entonces se coloca por el cambio de dirección un signo contrario; en las ecuaciones 312 y 313:

$$e_x = -\hat{G}_x^h e_z + i\omega\mu\hat{G}^h h_y, \quad e_y = -\hat{G}_y^h e_z - i\omega\mu\hat{G}^h h_x, \quad e_z = \hat{G}_x^h e_x + \hat{G}_y^h e_y \quad (314)$$

$$h_x = -\hat{G}_x^h h_z + \sigma^* \hat{G}^h e_y, \quad h_y = -\hat{G}_y^h h_z - \sigma^* \hat{G}_y^h e_x, \quad h_z = \hat{G}_x^h h_x + \hat{G}_y^h h_y. \quad (315)$$

Los diversos conjuntos de ecuaciones 312, 313 y 314, 315 brindan las componentes del campo electromagnético siempre y cuando sea en el plano horizontal.

### 3.11 Técnicas para la separación de los campos electromagnéticos de la Tierra

Concluido los diversos temas requeridos para la aplicación física de las integrales de Stratton - Chu, durante esta sección se desarrollarán las técnicas teóricas que existen para obtener una separación de los campos electromagnéticos de la Tierra donde se podrá observar como el álgebra cuaterniónica ensambla adecuadamente con estas ecuaciones y otorga una visión más amplia del comportamiento electromagnético de los campos.

#### 3.11.1 Separación del campo en partes externas e internas

El escenario a visualizar en esta sección es una superficies infinita  $S$  que se pasa en una Tierra que funciona como un buen conductor no homogéneo  $\Omega_-$ . La superficie separa la Tierra de la atmósfera homogénea  $\Omega_+$  que también es un buen conductor.

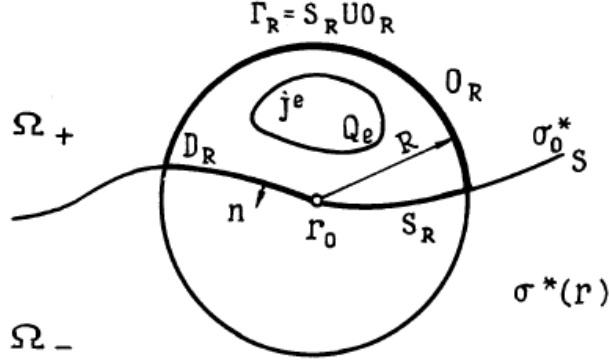


Figure 3: Modelo del campo electromagnético de la Tierra con sus partes externas e internas:  $Q_e$  es la sección de la atmósfera terrestre que se encuentra concentrada con las fuentes externas  $\vec{j}^e$ . Imagen extraída de Zhdanov, M. S. (2012). *Integral transforms in geophysics*. Springer Science & Business Media.

La Tierra está excitada por fuentes externas, particularmente, por la densidad de corriente  $\vec{j}^e$  sobre el dominio  $Q_e$  de la atmósfera como se visualiza en la Figura 3.

Para mantener la dependencia respecto al tiempo del campo electromagnético, se usa el factor de las ondas electromagnéticas de los campos homónimos  $e^{-i\omega t}$  y se recuerda que son campos monocromáticos. la conductividad eléctrica de la atmósfera es compleja y se escribe como  $\sigma_0^*$ ; por su parte la de la Tierra será  $\sigma^*(\vec{r})$ . Uno de los parámetros electromagnéticos, la permeabilidad magnética  $\mu_0$  se mantiene constante en el espacio.

Entonces, la descripción de los campos electromagnéticos, en conjunto con las ecuaciones de Maxwell se escriben así:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \begin{cases} \sigma_0^* \vec{E} + \vec{j}^e, \vec{r} \in \Omega_+ \\ \sigma^*(\vec{r}) \vec{E}, \vec{r} \in \Omega_- \end{cases}; \quad [\nabla \times \vec{E}] = i\omega\mu_0 \vec{H}. \quad (316)$$

Sus componentes tangenciales en la superficie  $S$  son continuas.

Facilitando los cálculos y representando el campo  $\vec{E}, \vec{H}$  como la suma de la parte externa e interna se escriben las siguientes relaciones:

$$\vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^i; \quad \vec{H} = \vec{H}^e + \vec{H}^i \quad (317)$$

y la suma de cada componente hace el campo completo.

Los campos externos  $\vec{E}^e, \vec{H}^e$  es creado por corrientes con conductividad compleja de la Tierra que es equivalente a:

$$\sigma^*(\vec{r}) \equiv \sigma_0^*. \quad (318)$$

Y aplicando las ecuaciones 316 a las partes externas e internas se logran las siguientes grupos de ecuaciones:

$$[\nabla \times \vec{H}^e] = \sigma_0^* \vec{E}^e + \vec{j}^e, \quad [\nabla \times \vec{E}^e] = i\omega\mu_0 \vec{H}^e; \quad (319)$$

$$[\nabla \times \vec{H}^i] = \sigma_0^* \vec{E}^i + \vec{j}, \quad [\nabla \times \vec{E}^i] = i\omega\mu_0 \vec{H}^i; \quad (320)$$

en este caso la densidad de corriente  $\vec{j} = [\sigma^*(\vec{r}) - \sigma_0^*] \vec{E}$  que se refiere a las corrientes que son inducidas en la Tierra [15].

Desde aquí el problema inicia con la evaluación de los campos externos e internos en la superficie  $S$  del campo completo.

Si se tiene que  $\sigma_0^* = 0$  (del aire), y teniendo en consideración 316 y 319, 320, el campo  $\vec{H}$  de la atmósfera fuera de  $Q_e$  se convierte en un laplaciano mientras que los campos se separarán con un método que al juntarse con las integrales de Stratton - Chu que se denomina como el método general de Kertz - Siebert.

Para iniciar con la aplicación del método, se considera un punto en la superficie  $S$  y se rodea en una esfera de radio  $R$  que encierra el dominio  $Q_e$ . Entonces, sea  $Q_R$  es una parte de la esfera donde está  $\Omega_+$  y  $S_R$  es la superficie terrestre que se ubica dentro de la esfera.

Luego, las integrales de Stratton - Chu sobre la superficie  $\Gamma_R = S_R \cup O_R$ :

$$\mathbf{C}^H(\vec{r}') = \int_{\Gamma} \int_R \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G_0^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G_0^h] + \sigma_0^* [\vec{n} \times \vec{E}] G_0^h \right] ds, \quad (321)$$

y la función  $G_0^h$  se mantiene como la función fundamental de Green, sólo con una variación de constantes:

$$G_0^h = G^h(\vec{r}'|\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0^*)|\vec{r}' - \vec{r}|}{|\vec{r}' - \vec{r}|}; \quad k_0^* = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0^*}.$$

Al igual que con las sumas de las partes externas e internas,  $\mathbf{C}^H$  se reescribe así:

$$\mathbf{C}^H = \mathbf{C}^{H_e} + \mathbf{C}^{H_i}$$

y cada una evaluada con sus respectivos campos externos e internos,  $\vec{H}^e, \vec{E}^e$  y  $\vec{H}^i, \vec{E}^i$ , genera las siguientes integrales:

$$\mathbf{C}^{H_e}(\vec{r}') = \int_{\Gamma} \int_R \left[ \langle \vec{n}, \vec{H}^e \rangle \nabla G_0^h + [[\vec{n} \times \vec{H}^e] \times \nabla G_0^h] + \sigma_0^* [\vec{n} \times \vec{E}^e] G_0^h \right] ds, \quad (322)$$

$$\mathbf{C}^{H_i}(\vec{r}') = \int_{\Gamma} \int_R \left[ \langle \vec{n}, \vec{H}^i \rangle \nabla G_0^h + [[\vec{n} \times \vec{H}^i] \times \nabla G_0^h] + \sigma_0^* [\vec{n} \times \vec{E}^i] G_0^h \right] ds, \quad (323)$$

Utilizando las ecuaciones de Maxwell para el campo  $\vec{E}^e, \vec{H}^e$  fuera de  $Q_e$ , se expresan a continuación:

$$[\nabla \times \vec{H}^e] = \sigma_0^* \vec{E}^e|_{r \notin Q_e}, \quad [\nabla \times \vec{E}^e] = i\omega\mu_0 \vec{H}^e|_{r \notin Q_e}$$

y se disipan en el infinito. Empleando las ecuaciones 250 se tiene

$$\mathbf{C}^{H^e}(\vec{r}') = \begin{cases} 0, \vec{r}' \in D_e \\ \vec{H}^e(\vec{r}'), \vec{r}' \in C\bar{D}_R \end{cases}$$

donde los dominios don internos y externos respecto  $\Gamma_R$ . Luego, el campo interno dentro  $D_R \subset \Omega_+$  con las ecuaciones de Maxwell:

$$[\nabla \times \vec{H}^i] = \sigma_0^* \vec{E}^i|_{\vec{r} \in D_R \subset \Omega_+}, \quad [\nabla \times \vec{E}^i] = i\omega\mu_0 \vec{H}^i|_{\vec{r} \in D_R \subset \Omega_+}.$$

Y de acuerdo con las ecuaciones de 249 se tiene la integral:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{H^i}(\vec{r}') &= \begin{cases} \vec{H}^i(\vec{r}'), \vec{r}' \in D_R \\ 0, \vec{r}' \in C\bar{D}_R \end{cases} \\ \Rightarrow \mathbf{C}^H(\vec{r}') &= \begin{cases} \vec{H}^i(\vec{r}'), \vec{r}' \in D_R \\ -\vec{H}^e(\vec{r}'), \vec{r}' \in C\bar{D}_R. \end{cases} \end{aligned}$$

Se prosigue a calcular los límites de  $\mathbf{C}^H$  en  $S_R$  usando la continuidad que existe por el campo electromagnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i^H(\vec{r}_0) &= \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^+} \mathbf{C}^H(\vec{r}') = \vec{H}^i(\vec{r}_0), \quad \vec{r}_0 \in S_R \\ \mathbf{C}_e^H(\vec{r}_0) &= \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}_0^-} \mathbf{C}^H(\vec{r}') = -\vec{H}^e(\vec{r}_0), \quad \vec{r}_0 \in S_R \end{aligned} \quad (324)$$

Estos límites se calcularon como se hicieron sus semejantes en secciones previas. Antes de seguir, otra versión de  $\mathbf{C}_0^H$  surge así:

$$\mathbf{C}_i^H(\vec{r}_0) = \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0) + \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}_0), \quad \mathbf{C}_e^H(\vec{r}_0) = \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0) - \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}_0). \quad (325)$$

Colocándolos en una integral:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^H(\vec{r}') &= \int_{\Gamma} \int_R \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G_0^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G_0^h] \right. \\ &\quad \left. + \sigma_0^* [\vec{n} \times \vec{E}] G_0^h \right] ds, \\ G_0^h &= G^h(\vec{r}_0|\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0^*)|\vec{r}_0 - \vec{r}|}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}. \end{aligned}$$

Con los límites de las ecuaciones 324 y 325, resulta en los límites de  $\vec{H}$ :

$$\vec{H}^i(\vec{r}_0) = \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}_0) + \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0), \quad \vec{H}^e(\vec{r}_0) = \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}_0) - \mathbf{C}_0^H(\vec{r}_0). \quad (326)$$

Trabajando con  $R \rightarrow \infty$ , la integral cambia a

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G_0^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G_0^h] + \sigma_0^* [\vec{n} \times \vec{E}] G_0^h \right] ds, \\ \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{C}_0^H &= \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G_0^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G_0^h] + \sigma_0^* [\vec{n} \times \vec{E}] G_0^h \right] ds. \end{aligned}$$

De acuerdo con el par de ecuaciones en 326, se obtienen las integrales del campo magnético externo e interno:

$$\begin{aligned} \vec{H}^i(\vec{r}_0) &= \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}_0) + \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G_0^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G_0^h] + \sigma_0^* [\vec{n} \times \vec{E}] G_0^h \right] ds, \\ \vec{H}^e(\vec{r}_0) &= \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}_0) - \iint_S \left[ \langle \vec{n}, \vec{H} \rangle \nabla G_0^h + [[\vec{n} \times \vec{H}] \times \nabla G_0^h] + \sigma_0^* [\vec{n} \times \vec{E}] G_0^h \right] ds, \end{aligned} \tag{327}$$

en estas fórmulas el vector  $\vec{n}$  se dirige hacia la Tierra. Con estas ecuaciones se puede separar el campo magnético en sus respectivas zonas externas e internas usando la Tierra como modelo siempre y cuando se tenga una atmósfera conductora. Las formulaciones para la separación del campo eléctrico se calculan de igual forma que las realizadas para su campo contrario.



## 4 Conclusiones

Lo demostrado en esta tesis es como el álgebra cuaterniónica al ser introducida en las ecuaciones de Maxwell y los campos electromagnéticos monocromáticos en conjunto con las integrales de radiación tipo Stratton - Chu se pueden elaborar análisis y estudios completos acerca del electromagnetismo. Esto muestra, a su vez, que al emplear los cuaternios en la Física satisfacen, por sus cuatro dimensiones, diversas propiedades que con el álgebra tridimensional no es posible.

Se trabajó detalladamente toda la teoría necesaria para el desarrollo de la aplicación del álgebra cuaterniónica implicada en la teoría electromagnética. Desde los antecedentes y definición de los cuaternios, pasando por los operadores e integrales utilizadas con cuaternios complejos, operadores vectoriales que se acoplan con ellos, su uso en los campos electromagnéticos monocromáticos homogéneos, las diversas reescrituras de las ecuaciones aplicando los números cuaterniónicos, y una aplicación física importante en la Geofísica que son las técnicas de separación para los campos electromagnéticos de la Tierra.

Con este último estudio, toda la teoría redactada se ensambla apropiadamente y brinda un uso de estos números tanto natural como extraordinario. Visualizando la Tierra como conductor y su atmósfera de manera semejante. Las ecuaciones de Stratton - Chu se adaptan perfectamente en la resolución de este problema, y cómo se vió antes, los cuaternios se pueden introducir fácilmente para evitar largas resoluciones y que, aún así, otorguen un resultado con sentido e interpretación física.

No obstante, en este estudio los campos que se trataron fueron homogéneos y se presentaron con algunas otras condiciones pero que no alterarán su homogeneidad. Un camino a revisar sería observar el comportamiento de las integrales de Stratton - Chu en los campos electromagnéticos no homogéneos, así como su comportamiento y las condiciones requeridas para que implementar las integrales en la problemática.

Por último, como comentario final se observa cómo una herramienta olvidada hasta cierto grado como los cuaternios han resurgido en la actualidad para diversas aplicaciones tecnológicas y como un tema renombrado en la Física - Matemática.

## References

- [1] Ávila, R., Abreu, R., Bory, J., (2016). *Álgebra Cuaterniónica y algunas aplicaciones con elementos de historia de la ciencia*. México.
- [2] Bauer, W., Westfall, G. D. (2014). *Física para ingenierías y ciencias con física moderna Volumen 2*. México: McGraw - Hill.
- [3] Cheng, D. K. (1998). *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. México: Pearson Education.
- [4] Gómez Laveaga, C. (2014). *Álgebra Superior Curso Completo*. Distrito Federal, México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- [5] Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. Estados Unidos de América: Pearson Education.
- [6] Gürlebeck, K., Sprössig, W. *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. John Wiley & Sons, 1997.
- [7] Harrington, R. F. (2001). *Time - Harmonic Electromagnetic Fields*. Estados Unidos de América: IEEE Press.
- [8] Kirsch, A., Hettlich, F. (2012). *The Mathematical Theory of Maxwell's Equations*. Karlsruhe, Alemania: Karlsruhe Institute of Technology.
- [9] Khmelnytskaya, K. V., Kravchenko, V.V. (2007). *Biquaternions for analytic and numerical solution of equations of electrodynamics*. Querétaro, Mexico.
- [10] Kravchenko, V.V. (2003). *Applied Quaternionic Analysis*. Research and Exposition in Mathematics, 28, 127.
- [11] Pérez-de la Rosa, M. A., Shapiro, M. (2014). *On the Hilbert operator and the Hilbert formulas on the unit sphere for the time-harmonic Maxwell equations*. Ciudad de México, México: Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.
- [12] Spiegel, M., Lipschutz, S., Spellman, D. (2009). *Análisis vectorial*. México: McGraw - Hill.
- [13] Stratton, J. A., Chu, L. J. (1939). *Diffraction Theory of Electromagnetic Waves*. Cambridge, Estados Unidos de América.
- [14] Zill, D. G., Shanahan, P. D. (2011). *Introducción al Análisis complejo con aplicaciones*. México: Cengage Learning.
- [15] Zhdanov, M. S. (2012). *Integral transforms in geophysics*. Springer Science & Business Media.