

**Universidad de las Américas Puebla**

Escuela de Ciencias

Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas



**LEYES DE POTENCIA, FRACTALES Y LA DESIGUALDAD  
DEL INGRESO EN MÉXICO**

Tesis que, para completar los requisitos del Programa de Honores  
presenta el estudiante

**Julián David Quintero Franco**

Presidente: Dra. Reyla Areli Navarro Cruz

Vocal y Director: Dr. Guillermo Romero Meléndez

Secretario: Dra. Elitania Leyva Rayón

Cholula, Puebla, México a 16 de Mayo de 2016

## **TABLA DE CONTENIDO**

<b>RESUMEN .....</b>	<b>2</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>2</b>
<b>2. FRACTALES .....</b>	<b>3</b>
DIMENSIÓN FRACTAL.....	4
<b>3. LEYES DE POTENCIA.....</b>	<b>10</b>
<b>4. LEY DE PARETO .....</b>	<b>12</b>
<b>5. DESIGUALDAD DEL INGRESO.....</b>	<b>14</b>
<b>6. MODELACIÓN DE LA DESIGUALDAD DEL INGRESO EN MÉXICO.....</b>	<b>16</b>
METODOLOGÍA.....	16
RESULTADOS.....	16
ANÁLISIS .....	19
<b>7. CONCLUSIÓN.....</b>	<b>20</b>
<b>TRABAJOS CITADOS .....</b>	<b>20</b>

# LEYES DE POTENCIA, FRACTALES Y LA DESIGUALDAD DEL INGRESO EN MÉXICO

Julián David Quintero Franco, Guillermo Romero-Meléndez  
Universidad de las Américas Puebla

## Resumen

Se muestra cómo las leyes de potencia nos permiten modelar la evolución de la desigualdad del ingreso en México y cómo ésta ha aumentado en el periodo 2010 - 2014. También, estudiando el cambio del perímetro y del área del copo de nieve de Koch en sus iteraciones, se analiza la complejidad de los fractales y la existencia de un vínculo entre la dimensión de éstos y las leyes de potencia. Además, se demuestra correctamente que las leyes de potencia tienen la única forma funcional que es autosimilar o invariante bajo cambios de escala. De esta manera se relaciona la desigualdad del ingreso en México con las leyes de potencia y la fractalidad.

**Palabras clave:** leyes de potencia, desigualdad del ingreso, fractales.

## 1. Introducción

Se presenta a las leyes de potencia como una herramienta matemática para estudiar la evolución de la desigualdad del ingreso en México. Para abordar este tema, se inicia con una introducción a la teoría de los fractales mediante el estudio de la evolución del perímetro del copo de nieve de Koch en sus iteraciones. En cuanto a las leyes de potencia homogéneas se modificó la demostración de M. E. J. Newman, que aparece en su artículo "*Power laws, Pareto distributions and Zipf's law*" (Newman, 2006), en la que Newman muestra que las leyes de potencia son las únicas fórmulas invariantes bajo cambios de escala. En tercer lugar, analizamos cómo la ley de potencia homogénea que aparece en la Ley de Pareto nos puede ser útil para estudiar la desigualdad del ingreso en México. En

---

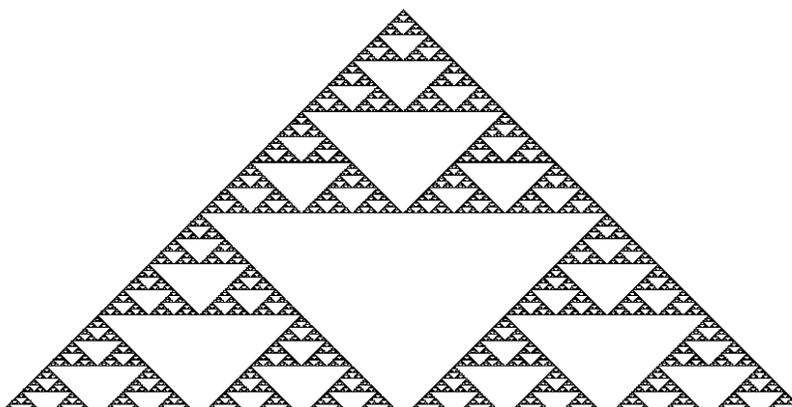
suma, los resultados encontrados en este trabajo muestran que durante el periodo 2010 – 2014 la desigualdad del ingreso en México se incrementó. A propósito de los resultados, las conclusiones extraídas de este trabajo coinciden con la reciente aseveración de Piketty de que la desigualdad del ingreso está creciendo alrededor del mundo. Finalmente, los hallazgos de este estudio adquieren mayor relevancia al notar que éstos concuerdan con los trabajos de Krugman, Easterly y con el estudio del índice de Gini para México de Márquez (Márquez, 2012). A partir de ahí, se justifica el por qué las leyes de potencia y los fractales se nos presentan como una herramienta muy importante para modelar la desigualdad del ingreso a diversas escalas.

## **2. Fractales**

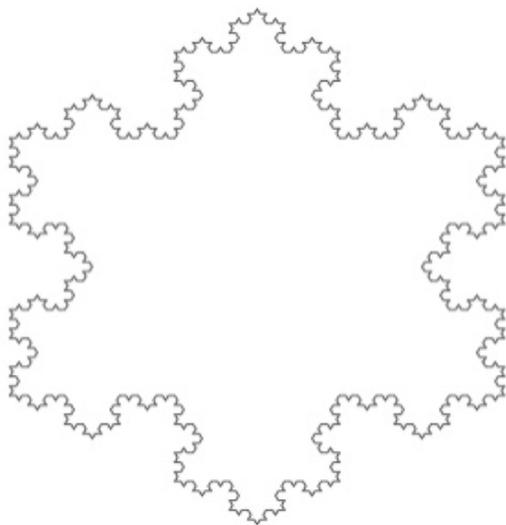
El término *fractal* fue acuñado por Benoit B. Mandelbrot con la intención de agrupar, bajo una misma denominación, una gran cantidad de objetos matemáticos que han sido fundamentales para el desarrollo de las matemáticas puras. Históricamente, los fractales fueron parte de una revolución ideológica que marcó el final de las matemáticas clásicas del siglo XIX y el principio de las matemáticas modernas del siglo XX. Las matemáticas clásicas encontraban sus raíces en estructuras geométricas regulares, conocidas como geometría Euclidiana, y la dinámica de Newton. Más tarde, el descubrimiento de estructuras matemáticas, catalogadas como 'monstruos', que ya no concordaban con los patrones de Euclides y Newton forzaron la revolución. Para los descubridores de dichos 'monstruos', estas estructuras sugerían que el mundo de las matemáticas puras contenía posibilidades que iban más allá de lo que, en ese entonces, se podía apreciar en la naturaleza. No obstante, con el paso del tiempo habría de encontrarse que aquellas estructuras inventadas para dejar atrás el naturalismo del siglo XIX resultarían ser inherentes a muchos objetos que nos son familiares.

Muchos de los patrones que podemos hallar en la naturaleza son irregulares y fragmentados por lo que la geometría estándar, o Euclidiana, no nos es suficiente para modelarlos. El tan elevado grado de complejidad desplegado por la naturaleza se debe, entre otras cosas, a que el número de distintas posibles escalas de longitud presente en los patrones naturales es prácticamente infinito. En respuesta a esta situación, Mandelbrot concibió y desarrolló una nueva geometría, la geometría fractal. Mediante una familia de

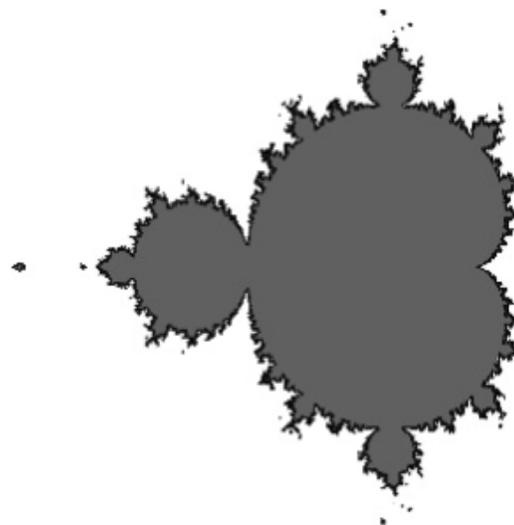
figuras autosimilares, conocidas como fractales, es posible describir aquellos patrones irregulares y fragmentados que nos rodean. Podemos encontrar fractales que son curvas o superficies, pero también podemos encontrar otros que están conformados tan extrañamente que ni la ciencia ni el arte es capaz de encontrar un término para nombrarlos. Por si fuera poco, su autosimilitud implica que las irregularidades y/o fragmentaciones de estas figuras son inmunes al escalamiento, o bien, invariantes bajo cambios de escala (Mandelbrot B. , 1983). A continuación se presentan algunas de las figuras fractales clásicas:



**Figura 1:** Triángulo de Sierpinski



**Figura 2:** Copo de Nieve de Koch



**Figura 3:** Conjunto de Mandelbrot

### **Dimensión Fractal**

A finales del siglo pasado, uno de los mayores problemas en el mundo matemático era contestar qué significaba *dimensión* y qué propiedades tenía. Tiempo después, la situación no habría cambiado significativamente dado que diversos matemáticos aparecerían con al

menos diez nociones diferentes de dimensión. Algunas de estas nociones son: dimensión topológica, dimensión Hausdorff, dimensión fractal, dimensión autosimilar, dimensión por conteo de cajas, dimensión de capacidad, dimensión Euclidiana, entre otras. Todas estas nociones de dimensión están relacionadas, pero no todas son útiles en todos los casos. Algunas tienen sentido en donde otras no, por lo que la dimensión y el contexto de aplicación no son independientes (Peitgen, Jürgens, & Saupe, 1992).

De manera particular, uno de los conceptos de dimensión surge naturalmente cuando intentamos medir la longitud de un fractal de la misma manera que lo haríamos con una curva suave. En otras palabras, una forma de aproximar la longitud de una curva suave es  $L(r) = N \cdot r$ , donde  $N$  es el número de segmentos de línea con longitud  $r$  que se necesitan para recorrer la curva de principio a fin. A medida que  $r \rightarrow 0$ ,  $L(r)$  se aproxima a un límite finito y se calcula con mayor precisión la longitud  $L$  de la curva.

Sin embargo, lo anterior no se mantiene para el caso de las curvas fractales debido a que el producto  $N \cdot r$ , que representa la longitud de la curva, tiende a infinito. Para un fractal, el hacer que  $r \rightarrow 0$  implica adentrarnos cada vez más a las rugosidades de estos objetos matemáticos. Afortunadamente, esta divergencia se comporta de acuerdo a una ley de potencia homogénea de  $r$  en donde existe un exponente crítico  $D_H > 1$  tal que el producto  $N \cdot r^{D_H}$  permanece finito. En relación, al exponente crítico  $D_H$  se le conoce como dimensión Hausdorff, en honor al matemático Alemán Felix Hausdorff (1868 – 1942), y es equivalente a:

$$D_H := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (1)$$

(Schroeder, 1991)

El acto de repetir una operación dada una y otra vez, cada ocasión a escalas más pequeñas, nos llevará en la mayoría de los casos a una estructura autosimilar. Al respecto, la operación aplicada repetidamente puede ser algebraica, simbólica o geométrica. Un ejemplo ilustrativo de lo anterior es la curva de Koch, propuesta por el matemático sueco Helge von Koch. La idea fundamental detrás de la construcción de esta curva clásica es tomar un segmento de línea recta (Figura 4) de longitud  $\ell_0$  y levantar un triángulo equilátero en el tercio medio. A la figura resultante se le conoce como generador (Figura 5)

y la longitud de éste es igual a cuatro tercios de la longitud del segmento de recta con el que se comenzó, el iniciador (Schroeder, 1991).



**Figura 4:** Iniciador

$$r_0 = \frac{\ell_0}{3^0} \quad N = 4^0$$



**Figura 5:** Generador

$$r_1 = \frac{\ell_0}{3^1} \quad N = 4^1$$

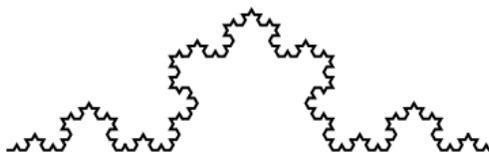
Si aplicamos la operación geométrica una vez más y levantamos un triángulo equilátero en el tercio medio de cada segmento de línea recta en el generador, obtendremos una curva (Figura 6) de longitud  $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \ell_0$ .



**Figura 6:** Curva de Koch dos iteraciones

$$r_2 = \frac{\ell_0}{3^2} \quad N = 4^2$$

Si seguimos iterando infinitamente, obtendremos una curva de longitud infinita, conocida como curva de Koch (Figura 7).



**Figura 7:** Curva de Koch

$$r_n = \frac{\ell_0}{3^n} \quad N = 4^n$$

La dimensión de Hausdorff para esta curva clásica sería:

$$D_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log \left(\frac{3^n}{\ell_0}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\log 4}{\log 3 - \frac{\log \ell_0}{n}} \right) \\
&= \frac{\log 4}{\log 3}
\end{aligned}$$

Entonces, en el caso de la curva de Koch:

$$D_H = \frac{\log 4}{\log 3} \quad (2)$$

Ahora, comprobemos que el producto  $N \cdot r^{D_H}$  permanece finito para la curva de Koch:

$$\begin{aligned}
\log(N \cdot r^{D_H}) &= \log N + D_H \log r \\
&= \left( n \log 4 + \frac{\log 4}{\log 3} \log \frac{\ell_0}{3^n} \right) \\
&= \left( n \log 4 + \frac{\log 4}{\log 3} (\log \ell_0 - n \log 3) \right) \\
&= \left( n \log 4 + \left( \frac{\log 4}{\log 3} \right) \log \ell_0 - n \log 4 \right) \\
&= \left( \frac{\log 4}{\log 3} \right) \log \ell_0 = \log \ell_0^{D_H}
\end{aligned}$$

Como resultado:

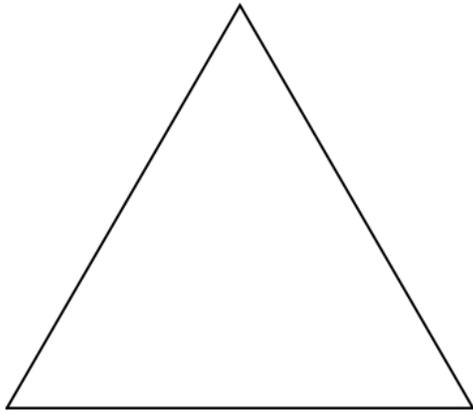
$$\log(N \cdot r^{D_H}) = \log \ell_0^{D_H}$$

De donde:

$$N \cdot r^{D_H} = \ell_0^{D_H} \quad (3)$$

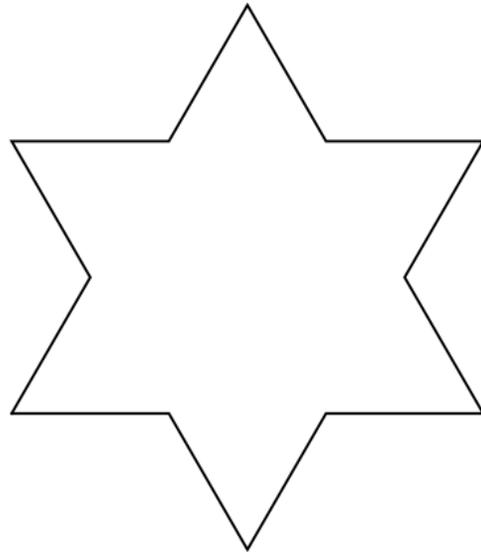
Confirmando así que para la curva de Koch el producto  $N \cdot r^{D_H}$  es finito y es igual a  $\ell_0^{D_H}$ .

Similarmente, el copo de nieve de Koch (Figura 2) resulta de tratar cada uno de los 3 segmentos de recta, de longitud  $\ell_0$ , de un triángulo equilátero como curvas de Koch. Como es de esperarse, el perímetro de esta figura es infinito, pero esto no nos dice nada acerca de qué pasa con el área. Para responder esta interrogante, veamos cómo cambia el área en cada iteración:



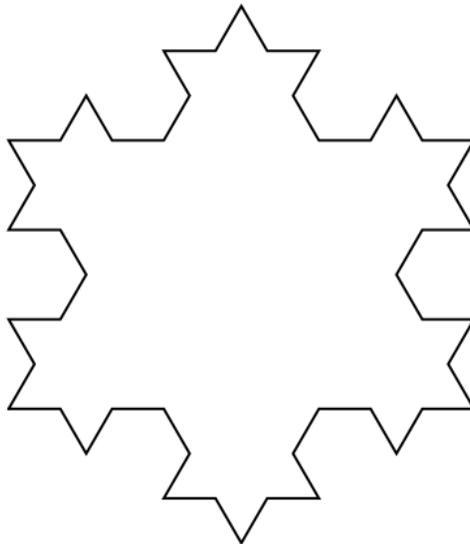
**Figura 8:** Inicializador Copo de Nieve de Koch

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell_0^2$$



**Figura 9:** Generador Copo de Nieve de Koch

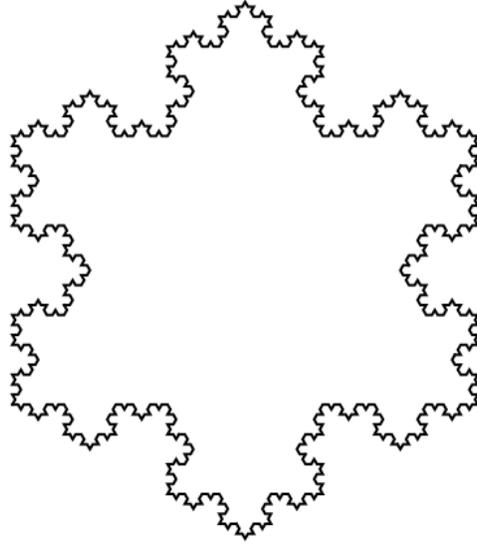
$$A_1 = A_0 + 4^0 \cdot 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\ell_0}{3^1}\right)^2$$



**Figura 10:** Copo de Nieve de Koch dos iteraciones

$$A_2 = A_0 + 4^0 \cdot 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\ell_0}{3^1}\right)^2 + 4^1 \cdot 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\ell_0}{3^2}\right)^2$$

Si continuamos con las iteraciones infinitamente:



**Figura 11:** Copo de Nieve de Koch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \ell_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^{2n+2}} = A_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \ell_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3^2}\right)^n$$

$$A_n = A_0 + \frac{1}{3} \cdot A_0 \left( \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) = A_0 + A_0 \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{5}\right)$$

$$= A_0 \left( 1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{8}{5} A_0$$

$$A_n = \frac{8}{5} A_0 \quad (4)$$

Consecuentemente, el área del Copo de Nieve de Koch tiende a un número finito a pesar de que su perímetro es infinito.

Como hemos visto, los métodos de medición convencionales se tornan inservibles al tratar de calcular el área de fractales que son superficies o el volumen de aquellos fractales que llenan el espacio. Aún con estas dificultades presentes, podemos medir el grado de complejidad de un fractal asumiendo que las dos cantidades: la longitud, o la superficie, o el volumen; y la escala de referencia ( $r$  en la dimensión Hausdorff) no varían arbitrariamente sino que están relacionadas mediante una ley. Esta ley debiera permitirnos calcular una cantidad a partir de la otra. Específicamente, se trata de una ley de potencia que está íntimamente relacionada con la dimensión fractal mediante el exponente (Peitgen, Jürgens, & Saupe, 1992). Cabe mencionar que las restricciones para el exponente, y su relación con la dimensión fractal, variarán de acuerdo al método utilizado.

### 3. Leyes de Potencia

“Una ley de potencia es una relación entre dos cantidades tal que una es proporcional a una potencia fija de la otra” (Power Law, 2016):

$$F(x) = cx^\alpha \quad (5)$$

donde  $c$  y  $\alpha$  son constantes. A su vez, podemos encontrar tanto leyes de potencia homogéneas, así como leyes de potencia no homogéneas. Las no homogéneas son aquellas que no son invariantes bajo cambios de escala, es decir, aquellas en las cuales  $\alpha$  cambia si la escala es modificada. Por su parte, por definición, las leyes de potencia homogéneas son autosimilares.

La autosimilitud de las leyes de potencia homogéneas implica invariancia con respecto al escalamiento, en otras palabras, invariancia bajo cambios multiplicativos de escala (Schroeder, 1991). Como demostración, y a manera de corrección de la demostración presente en el artículo “*Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law*” de M. E. J. Newman (Newman, 2006), proponemos la siguiente:

$$F(bx) = g(b)f(x) \quad (6)$$

**Para cualquier  $b$**

$$\frac{\partial}{\partial x} F(bx) = \frac{\partial}{\partial x} [g(b)f(x)] \quad , \quad \frac{\partial}{\partial b} F(bx) = \frac{\partial}{\partial b} [g(b)f(x)]$$

$$F'(bx)b = g(b)f'(x) \quad , \quad F'(bx)x = g'(b)f(x)$$

$$F'(bx) = \frac{g(b)}{b} f'(x) \quad , \quad F'(bx) = g'(b) \frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{g(b)}{b} f'(x) = g'(b) \frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(b)}{g(b)} \frac{b}{x}$$

**Dado que  $b$  puede tomar cualquier valor hacemos  $b = 1$**

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \frac{1}{x} ; \quad \alpha = \frac{g'(1)}{g(1)} \quad (7)$$

$$(\ln(f(x)))' = (\alpha \ln(x))'$$

**Integramos ambos lados**

$$\ln(f(x)) = \ln(x^\alpha) + C_1$$

**Exponenciamos ambos lados**

$$f(x) = C_2 x^\alpha$$

**Retomando la ecuación (7) y tomando el caso  $x = 1$**

$$f(1) = C_2; \alpha = \frac{g'(1)}{g(1)} = \frac{f'(1)}{f(1)}$$

**Por lo tanto**

$$f(x) = f(1)x^\alpha; \alpha = \frac{f'(1)}{f(1)} \quad (8)$$

Esta invariancia que resulta de la autosimilitud de las leyes de potencia homogéneas tiene un límite que de ninguna manera afecta su utilidad. Este límite se hace presente cuando nos acercamos a escalas demasiado pequeñas como la constante de Planck ( $6.62607 \times 10^{-34} J \cdot s$ ) o cuando rondamos escalas significativamente grandes como la velocidad de la luz ( $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ ). Una situación en la que aparece este límite es la modelación de las fuerzas interatómicas, escalas extremadamente pequeñas, éstas son modeladas usando leyes de potencia no homogéneas con al menos dos exponentes diferentes.

Gran parte de las leyes de la naturaleza son independientes, o casi independientes, de un factor de escalamiento. Una de estas leyes, muy conocida, es la ley universal de atracción gravitacional de Newton:  $F(r) \sim r^{-2}$ , que no tiene una escala intrínseca definida. De la misma manera, la frecuencia media con la que estrellas fugaces y/o meteoritos impactan la atmósfera terrestre es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro del proyectil, siendo esto cierto a lo largo de diez órdenes de magnitud ( $10^{-4} - 10^4$ ) en metros. Por otra parte, en la naturaleza humana también abundan fenómenos bien descritos por leyes de potencia homogéneas. Para gran parte de nuestro rango auditivo, el volumen o sonoridad subjetiva  $L$  que percibimos es proporcional al valor de la magnitud física conocida como intensidad  $I$ , elevada a una potencia de tres décimos:  $L \sim I^{0.3}$ . Finalmente, sabiendo que hay muchos más ejemplos, las leyes de potencia están presentes también en la economía. Hace aproximadamente 100 años, el economista italiano Vilfredo Pareto, encontró que el número de personas cuyo ingreso personal excede un cierto valor grande sigue una ley de potencias (Schroeder, 1991).

#### 4. Ley de Pareto

El italiano Vilfredo Pareto (1848 – 1923), mediante una tesis vinculada con las matemáticas, habría de titularse en la universidad de Turín en 1869. Más adelante, su trayectoria habría de comenzar ejerciendo como ingeniero en la industria ferroviaria italiana, en Florencia. Sin embargo, alrededor de 1890, Pareto dejaría atrás la industria para incursionar en la docencia. Vilfredo sería quien ocuparía la plaza vacante que el economista francés, y mentor de Pareto, Léon Walras había dejado en la universidad de Lausanne, Suiza. Ahora como docente, se encargaría del área de economía política. De esta manera, Vilfredo Pareto llegaría a ser considerado un economista liberal, sociólogo y uno de los principales responsables de la matematización de la ciencia económica.

En su primer trabajo, *Cours d'économie politique* (1896 -1897), en una sección dedicada a la curva de las rentas, el economista italiano abordó el tema de la desigualdad del ingreso o de los patrimonios. En un intento por determinar si la desigualdad del ingreso había crecido o disminuido, Pareto propuso la ley que lleva su nombre. Dicha ley nos dice que, de manera aproximada, la proporción de la población  $P(x)$  con un ingreso superior a un valor dado  $x$  es:

$$P(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha ; x \geq x_0 \quad (9)$$

(Barbut, 2003)

En donde el exponente  $1 < \alpha < 2$ , de acuerdo con los casos estudiados por Pareto. Por su lado, a  $x_0$  se le conoce como la renta mínima de la distribución estudiada puesto que  $P(x_0) = 1$  (Barbut, 2003). La presencia de  $x_0$  atiende al hecho de que la Ley de Pareto cobra relevancia en las colas de los datos, lo que significa que la ecuación (8) falla en la región del ingreso medio (Mandelbrot B. , 1963). Subsecuentemente,  $x_0$  no es el ingreso mínimo de la población, sino un valor por encima del cual el modelo se aproxima a la realidad (Barbut, 2003).

Comúnmente, la Ley de Pareto es tratada como una función de supervivencia. Lo antes mencionado se debe a que una proporción también puede ser vista como una frecuencia relativa. Aunado a lo anterior, una función  $S(x)$  que indica la probabilidad de que una variable aleatoria  $X$  tome valores mayores a  $x$  es precisamente la definición de una

función de supervivencia  $P(X > x)$ . En este caso, la probabilidad de que un individuo tenga un ingreso  $X$  mayor a cierto valor  $x$ , de acuerdo con la Ley de Pareto, sería:

$$S(x) = P(X > x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha ; x \geq x_0 \quad (10)$$

En donde, nuevamente,  $\alpha > 1$ .

Por lo general, con el objetivo de estandarizar el umbral de la desigualdad del ingreso, se dice que un individuo está en condición de pobreza cuando éste percibe un ingreso menor a cierta fracción fija  $\lambda$ , para  $0 < \lambda < 1$ , de un valor central como la mediana  $\mu$  de la distribución del ingreso. En el caso de la Ley de Pareto y partiendo de la ecuación (9), la mediana se calcula como sigue:

$$P(\mu) = \left(\frac{x_0}{\mu}\right)^\alpha = \frac{1}{2}$$

De donde, si despejamos  $\mu$ , la mediana sería:

$$\mu = 2^{\frac{1}{\alpha}} x_0 \quad (11)$$

Dicho sea de paso, la región de pobreza será aquella comprendida entre la renta mínima  $x_0$  y el umbral de la pobreza  $\lambda\mu = \lambda 2^{\frac{1}{\alpha}} x_0$ , donde:

$$\lambda 2^{\frac{1}{\alpha}} x_0 > x_0$$

$$\lambda 2^{\frac{1}{\alpha}} > 1 \quad (12)$$

Tomando en cuenta que  $1 < \alpha < 2$ , para que la ecuación (12) se cumpla  $\lambda$  deberá ser estrictamente mayor que  $1/2$ . De modo que, la proporción de la población que se encuentra en condición de pobreza es:

$$1 - P(\lambda\mu) \quad (13)$$

Siguiendo con el mismo razonamiento, la razón entre el número de “pobres” y el número de “ricos” se encuentra de la siguiente manera:

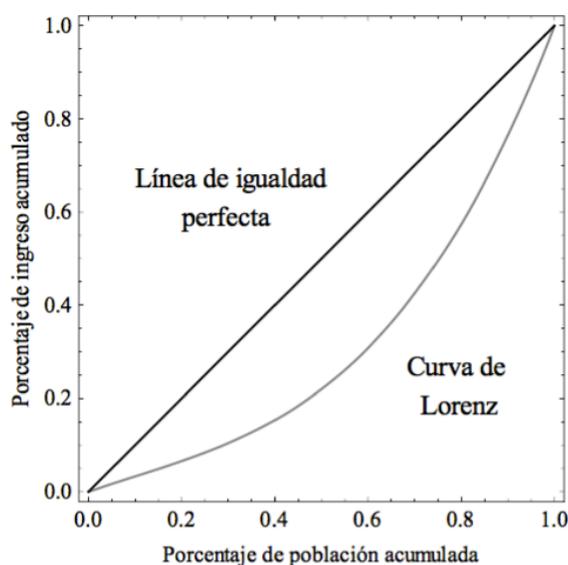
$$\frac{1 - P(\lambda\mu)}{P(\lambda\mu)} = \frac{1}{P(\lambda\mu)} - 1 = 2\lambda^\alpha - 1 \quad (14)$$

Debido a que  $\lambda > 1/2$  y  $\alpha > 1$ ,  $\lambda^\alpha$  decrece a medida que  $\alpha$  aumenta. Es así como de la ecuación (14), una reducción en la desigualdad del ingreso es equivalente a que el

exponente crezca. También de la ecuación (14), la desigualdad del ingreso no depende de la renta mínima  $x_0$  (Barbut, 2003).

## 5. Desigualdad del Ingreso

Primeramente, la desigualdad del ingreso nos indica qué tan desigual es la distribución del ingreso entre la población. De igual forma, ésta representa la brecha entre los ricos y todos los demás. Más aún, en 1912 el estadista italiano Corrado Gini desarrollaría su coeficiente para medir la desigualdad, mismo que aún hoy es utilizado. El trabajo de Gini estuvo basado en las proposiciones del economista estadounidense Max Lorenz. Lorenz propuso que una sociedad en donde la distribución del ingreso es perfectamente equitativa es representada por una línea de igualdad perfecta que es una recta a 45 grados en una gráfica bidimensional normalizada en donde el eje  $x$  es el porcentaje acumulativo de la población, comenzando por la población más pobre, y el eje  $y$  establece qué porcentaje del ingreso total de la población le corresponde (What is the Gini coefficient?, 2015). La curva de Lorenz muestra la variación de los porcentajes acumulados del ingreso total recibido en la realidad. El coeficiente de Gini es el cociente del área entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad perfecta, dividida entre el área bajo la línea de igualdad perfecta, como se observa en la gráfica 1 (Índice de Gini, 2016).



(Romero-Meléndez & Márquez, La curva de Lorenz, 2015)

**Gráfica 1:** Coeficiente de Gini

En este ámbito, Thomas Piketty, profesor en la Escuela de Economía de París, analizó una colección de datos provenientes de 20 países, datos que cubren desde el siglo XVIII, buscando encontrar cómo ha sido la evolución de la desigualdad y la concentración de la riqueza a largo plazo. Como resultado de este análisis, Piketty publicó su libro *Capital in the Twenty-First Century* en 2014, donde resalta que la tasa de crecimiento del rendimiento del capital es mayor que la tasa de crecimiento de la economía. Lo ya mencionado se puede entender como que cualquier riqueza que haya sido acumulada en el pasado está siendo recapitalizada más rápido que la tasa de crecimiento del ingreso laboral. Recordando que el ingreso laboral incluye todas las compensaciones que son resultado de un esfuerzo laboral (*Capital in the Twenty-First Century*, 2016).

Análogamente, en este contexto, en su artículo *Economists and Inequality* publicado en las páginas de opinión del New York Times, Paul Krugman explica que la razón detrás del por qué les tomó tanto tiempo a los economistas prestar atención a la desigualdad del ingreso es que ésta es difícil de modelar (Krugman, *Economists and Inequality*, 2016). Krugman, ganador del premio Nobel de Economía en el 2008 por su análisis de los patrones de comercio de acuerdo a la localización de la actividad económica (Krugman *Wins Nobel Prize for Economics*, 2008), también afirma que realmente no sabemos cómo modelar la distribución del ingreso personal y que, a pesar de que las normas políticas han influido, hasta el momento ningún modelo puede explicar el aumento en la cola derecha de la distribución del ingreso, dicho de otra forma, el aumento de las riquezas heredadas (Krugman, *Economists and Inequality*, 2016).

Recientemente, en su libro *Peddling Prosperity* (Krugman, *Peddling Prosperity: Economic Sense and Nonsense in the Age of Diminished Expectations*, 1994), Krugman hace notar que la distribución de la renta, en la década de 1980, en Estados Unidos nos hace pensar en fractales puesto que ésta presenta una creciente desigualdad en su conjunto que es reproducida en cualquier subgrupo de la población. En el artículo *Beautiful fractals and ugly inequality* (Easterly, 2010), William Easterly arribaría a la misma conclusión de que la desigualdad del ingreso se comporta como un fractal. Con estos antecedentes, en el 2012, Oscar Márquez en su tesis *Estudio de la Estructura Fractal de la Distribución de la Riqueza en México* habría de presentar evidencias de que el coeficiente de Gini para

México tiene un comportamiento fractal. Márquez calculó la dimensión fractal de las gráficas del coeficiente de Gini para México en su totalidad y por regiones, encontrando que los valores obtenidos son cercanos (Romero-Meléndez & Márquez, ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA FRACTAL DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA RIQUEZA EN MÉXICO, 2015).

## 6. Modelación de la Desigualdad del Ingreso en México

Atendiendo la necesidad de prestarle mayor atención a la desigualdad del ingreso, en el presente trabajo se modeló la desigualdad del ingreso en México utilizando la Ley de Pareto, a partir del Anexo Estadístico 2014 del Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social (CONEVAL) y utilizando el software Wolfram Mathematica.

### Metodología

Particularmente, se utilizó el cuadro 9 del Anexo estadístico del CONEVAL relacionado con la medición de la pobreza en México (Estadístico, 2014), que comunica el ingreso corriente total mensual per cápita por deciles para los años 2010, 2012 y 2014 en México. A partir de esta fuente de información actualizada, es sencillo darse cuenta que el 90% de la población posee un ingreso mensual mayor que el del primer decil. Bajo el mismo principio, una proporción de la población igual a .8 tendrá un ingreso corriente total mensual per cápita mayor que el del segundo decil y así sucesivamente. Habiendo entendido esto, es posible crear un conjunto de pares ordenados asignándole al ingreso corriente total mensual por persona de cada decil la proporción de la población que recibe un ingreso mensual mayor que ese valor. Asimismo, partiendo de una ley de potencia como la de la Ley de Pareto:

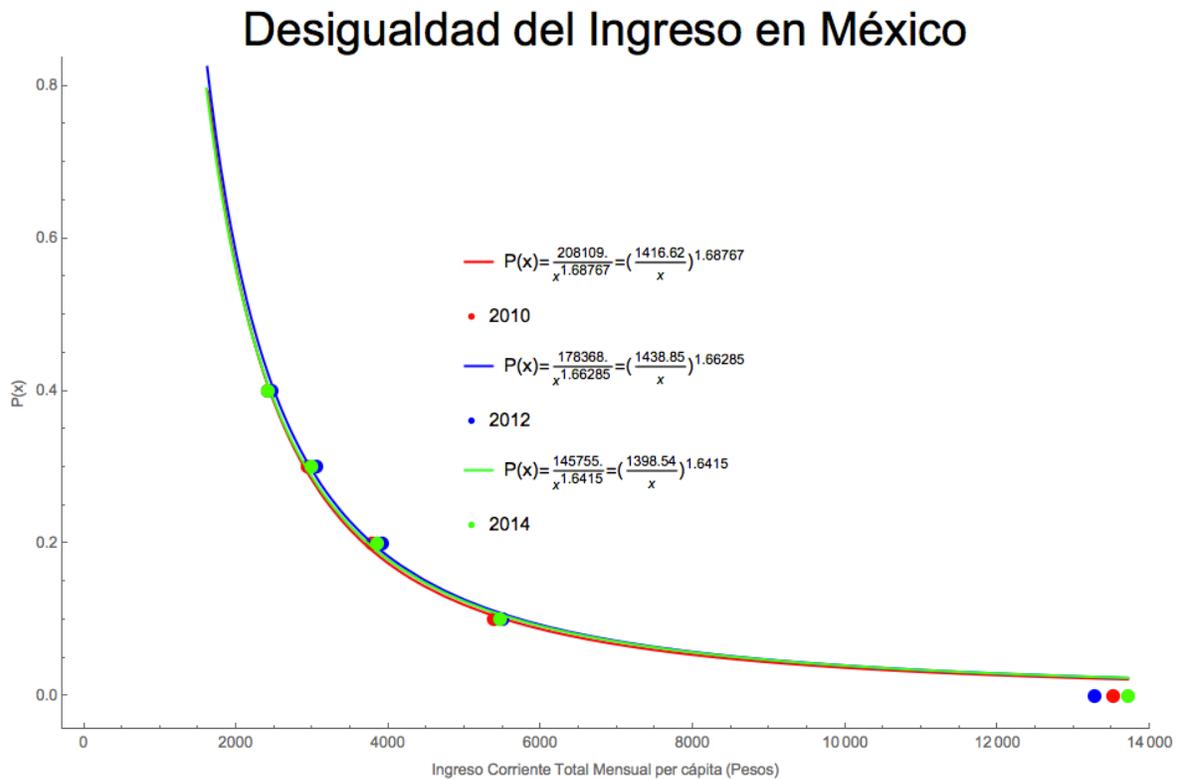
$$P(x) = \left(\frac{\text{Constante}}{x}\right)^{exp} ; x \geq \text{Constante} \quad (15)$$

y con la capacidad de Wolfram Mathematica se buscó modelar cómo cambia la proporción de la población que recibe un ingreso mensual mayor a cierto valor  $x$ , a medida que incrementamos ese valor.

### Resultados

Como era de esperarse, y en acuerdo con la teoría, el modelo falla en la región del ingreso medio. En contraste, a medida que nos acercamos a la cola de la distribución del ingreso, a

partir de un ingreso mensual igual al del sexto decil se logró modelar la desigualdad del ingreso exitosamente.



**Gráfica 2: Resultados**

En donde, los ajustes presentan las siguientes características:

<b>Parámetros</b>	<b>{ Constante → 1416.62, exp → 1.68767 }</b>				
<b>Prueba de Hipótesis – Parámetros</b>		<b>Estimate</b>	<b>Standard Error</b>	<b>t-Statistic</b>	<b>P-Value</b>
	<b>Constante</b>	1416.62	81.3307	17.418	0.000412425
	<b>exp</b>	1.68767	0.137042	12.315	0.00115334
<b>Intervalos de Confianza – Parámetros</b>		<b>Estimate</b>	<b>Standard Error</b>	<b>Confidence Interval</b>	
	<b>Constante</b>	1416.62	81.3307	{1157.79, 1675.45}	
	<b>exp</b>	1.68767	0.137042	{1.25154, 2.12381}	

	Observed	Predicted	Standard Error	Confidence Interval
$P(x)$	0.4	0.407975	0.0142227	{0.362712, 0.453238}
	0.3	0.291159	0.00866063	{0.263597, 0.318721}
	0.2	0.191028	0.00970383	{0.160146, 0.221909}
	0.1	0.10515	0.00997093	{0.0734179, 0.136882}
	0	0.0221999	0.00485194	{0.00675888, 0.037641}
$R^2$	<b>0.99588</b>			

**Tabla 1:** Características Ajuste 2010

Parámetros	<b>{ Constante → 1438.85, exp → 1.66285 }</b>				
Prueba de Hipótesis – Parámetros		Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
	Constante	1438.85	98.216	14.6499	0.000689813
Intervalos de Confianza – Parámetros		Estimate	Standard Error	Confidence Interval	
	Constante	1438.85	98.216	{1126.29, 1751.42}	
$P(x)$		Estimate	Standard Error	Confidence Interval	
	0.4	0.41022	0.0170777	{0.355871, 0.464568}	
	0.3	0.287349	0.0102765	{0.254645, 0.320054}	
	0.2	0.18938	0.0114435	{0.152962, 0.225799}	
	0.1	0.107772	0.0117274	{0.0704498, 0.145093}	
	0	0.0248291	0.00608418	{0.00546649, 0.0441916}	
$R^2$	<b>0.994144</b>				

**Tabla 2:** Características Ajuste 2012

Parámetros	<b>{ Constante → 1398.54, exp → 1.6415 }</b>				
Prueba de Hipótesis – Parámetros		Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
	Constante	1398.54	91.3159	15.3154	0.000604592
Intervalos de Confianza – Parámetros		Estimate	Standard Error	Confidence Interval	
	Constante	1398.54	91.3159	{1126.29, 1751.42}	
$P(x)$		Estimate	Standard Error	Confidence Interval	
	0.4	0.41022	0.0170777	{0.355871, 0.464568}	
	0.3	0.287349	0.0102765	{0.254645, 0.320054}	
	0.2	0.18938	0.0114435	{0.152962, 0.225799}	
	0.1	0.107772	0.0117274	{0.0704498, 0.145093}	
	0	0.0248291	0.00608418	{0.00546649, 0.0441916}	
$R^2$	<b>0.994144</b>				

Intervalos de Confianza – Parámetros	Estimate	Standard Error	Confidence Interval	
	Constante	1398.54	91.3159	{1107.93, 1689.15}
exp	1.6415	0.147249	{1.17289, 2.11011}	
$P(x)$	Observed	Predicted	Standard Error	Confidence Interval
	0.4	0.409566	0.0159948	{0.358664, 0.460469}
	0.3	0.288214	0.00965036	{0.257503, 0.318926}
	0.2	0.190414	0.01077	{0.156139, 0.224689}
	0.1	0.106989	0.0110598	{0.0717912, 0.142186}
	0	0.0235856	0.00556825	{0.00586498, 0.0413063}
$R^2$	<b>0.994848</b>			

**Tabla 3:** Características Ajuste 2014

### Análisis

Es necesario recalcar que Wolfram Mathematica trabaja con un nivel de confianza del 95% y que por ende se necesita un P-Value menor a .05 para rechazar la hipótesis nula, es decir, para aceptar los parámetros (Wackerly, Mendenhall III, & Scheaffer, 2013). Como se aprecia en los resultados, con un P-Value menor a .05, tanto la constante, que juega el papel de la renta mínima  $x_0$ , así como el exponente aprueban satisfactoriamente la prueba de hipótesis en los tres años. Además, para cada año, los valores reales de  $P(x)$ , a excepción del cero correspondiente a aquellos que perciben un ingreso mayor al del décimo decil, caen dentro de los intervalos de confianza del modelo. Esto es entendible ya que los datos de CONEVAL son un promedio en donde ingresos muy grandes son considerados anómalos. Lo mencionado no deja de ser consistente cuando observamos que el  $R^2$  de cada modelo, al estar sumamente cerca de uno, es prácticamente inmejorable.

Recordando la Ley de Pareto, de la gráfica 2, la renta mínima  $x_0$  en los tres ajustes es cercana a los \$1400. En efecto, el modelo no ajusta idealmente todos los deciles, pero a partir del sexto decil los ajustes son buenos. En este punto, hay que resaltar que  $x_0$  es un factor de estructura vital para las leyes de potencia. A pesar de ser necesario, como se vio en la ecuación (15),  $x_0$  pasa a segundo término cuando se desea medir la desigualdad del ingreso. En este caso, el parámetro determinante es el exponente que como predijo Pareto está entre 1 y 2, éste debiera crecer para que nosotros pudiéramos asegurar que la

desigualdad del ingreso está disminuyendo. Lamentablemente, al decrecer el exponente de un año a otro, los resultados nos indican que la desigualdad del ingreso está creciendo.

## 7. Conclusión

En conclusión, se encontró que el estudio de la evolución de la desigualdad del ingreso en México se puede modelar usando leyes de potencia. En un principio, se presentó una introducción al tema de fractales, utilizando como ejemplo la evolución del perímetro y del área del copo de nieve de Koch. Dentro de este tema, se resaltó la existencia de una relación entre las dimensiones fractales y el exponente de leyes de potencia. En cuanto a las leyes de potencia, se modificó la demostración de M. E. J. Newman, que aparece en su artículo “*Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law*” (Newman, 2006), en la que se prueba que las leyes de potencia son las únicas fórmulas invariantes bajo cambios de escala. Continuando, gracias a la utilización de una ley de potencia como la propuesta por Vilfredo Pareto poco antes del año 1900, se modeló la desigualdad del ingreso en México en el periodo 2010 – 2014. Coincidiendo con los trabajos recientes de Piketty, gracias a esta modelación se encontraron evidencias de que, en el periodo y país estudiado, incrementó la desigualdad del ingreso. Finalmente, dado que hemos corroborado que la modelación de la desigualdad del ingreso en México es posible utilizando una ley de potencia homogénea que tiene la propiedad de invariancia bajo cambios de escala, la desigualdad del ingreso presenta características propias de los fractales, tal como Krugman y Easterly observaron en Estados Unidos, así como lo hizo Márquez en México.

## Trabajos citados

*Capital in the Twenty-First Century*. (2016). Recuperado el 11 de Febrero de 2016, de Harvard University Press:  
<http://www.hup.harvard.edu/catalog.php?isbn=9780674430006>

Barbut, M. (2003). V. PARETO, G.SOREL y la ambigüedad en la comparación de las desigualdades.

Easterly, W. (8 de Septiembre de 2010). *Beautiful fractals and ugly inequality*. Recuperado el 11 de Febrero de 2016, de Aid Watch Blog:  
<http://www.nyudri.org/aidwatcharchive/2010/09/beautiful-fractals-and-ugly-inequality/>

Estadístico, A. (2014). *CONEVAL*. Recuperado el 2015, de Medición de la Pobreza: [http://www.coneval.gob.mx/Medicion/MP/Paginas/AE\\_pobreza\\_2014.aspx](http://www.coneval.gob.mx/Medicion/MP/Paginas/AE_pobreza_2014.aspx)

*Krugman Wins Nobel Prize for Economics*. (13 de Octubre de 2008). Recuperado el 11 de Febrero de 2016, de The New York Times: <http://www.nytimes.com/2008/10/14/business/14nobel.html?ref=opinion>

Krugman, P. (8 de Enero de 2016). *Economists and Inequality*. Recuperado el 11 de Febrero de 2016, de The New York Times: <http://krugman.blogs.nytimes.com/2016/01/08/economists-and-inequality/>

Krugman, P. (1994). *Peddling Prosperity: Economic Sense and Nonsense in the Age of Diminished Expectations*. Nueva York: Norton & Co.

Márquez, O. (2012). *ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA FRACTAL DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA RIQUEZA EN MÉXICO*. Puebla: Tesis de Licenciatura, Universidad de las Américas Puebla.

Mandelbrot, B. (1963). New methods in statistical economics. *The Journal of Political Economy*, 71 (5), 421-440.

Mandelbrot, B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. FREEMAN AND COMPANY.

Newman, M. (2006). *Power laws, Pareto distributions and Zipf's law*. University of Michigan, Department of Physics and Center for the Study of Complex Systems. Ann Arbor: University of Michigan.

*Índice de Gini*. (2016). Recuperado el 11 de Febrero de 2016, de El Banco Mundial: <http://datos.bancomundial.org/indicador/SI.POV.GINI>

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (1992). *Chaos and Fractals*. New York: Springer-Verlag.

*Power Law*. (2016). Recuperado el 29 de Enero de 2016, de Oxford Dictionaries: [http://www.oxforddictionaries.com/definition/american\\_english/power-law?q=power+law](http://www.oxforddictionaries.com/definition/american_english/power-law?q=power+law)

Romero-Meléndez, G., & Márquez, O. La curva de Lorenz. *ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA FRACTAL DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA RIQUEZA EN MÉXICO*. Puebla.

Romero-Meléndez, G., & Márquez, O. (2015). *ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA FRACTAL DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA RIQUEZA EN MÉXICO*. Puebla.

Schroeder, M. (1991). *Fractals, chaos, power laws*. New York: W.H. Freeman and Company.

Wackerly, D. D., Mendenhall III, W., & Scheaffer, R. L. (2013). *Estadística Matemática con Aplicaciones*. México D.F.: CENGAGE Learning.

*What is the Gini coefficient?* (12 de Marzo de 2015). Recuperado el 11 de Febrero de 2016, de BBC News Magazine Monitor: <http://www.bbc.com/news/blogs-magazine-monitor-31847943>