

## CAPÍTULO 6.

### Ecuaciones diferenciales con evolución en el tiempo.

A continuación se propone una metodología de procesamiento óptico para visualizar a las soluciones de distintas ecuaciones diferenciales que contienen evolución temporal, más que propagación en el espacio [1]. Se discute un método general el cual se ilustra con dos casos específicos.

#### 6.1 Solución general de ecuaciones diferenciales de grado indefinido.

Considérese una ecuación diferencial parcial de dos variables del tipo

$$\frac{\partial^m U}{\partial x^m} - \alpha \frac{\partial^n U}{\partial t^n} = 0. \quad (6.1)$$

En la ecuación ( 6.1 ) las letras m y n denotan números positivos; los cuales representan los grados en las variables x, y t, respectivamente.

Una forma de obtener una solución general es suponer que existe el espectro de Fourier

$\tilde{U}(\mu, \zeta)$  de la solución de  $U(x, t)$  [3]. Es decir,

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, \zeta) e^{i2\pi(x\mu + t\zeta)} d\mu d\zeta \quad (6.2)$$

Si a continuación se aplica el teorema de la derivada a la transformada, entonces se obtiene

$$\frac{\partial^m U}{\partial x^m} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, \zeta) (i2\pi\mu)^m e^{i2\pi(x\mu + t\zeta)} d\mu d\zeta, \quad (6.3)$$

De igual manera, se puede obtener

$$\frac{\partial^n U}{\partial t^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, \zeta) (i2\pi\zeta)^n e^{i2\pi(x\mu + t\zeta)} d\mu d\zeta. \quad (6.4)$$

Consecuentemente, sustituyendo la ecuación ( 6.3 ) y ( 6.4 ) y factorizando la función exponencial, la ecuación ( 6.1 ) se puede expresar como

$$\frac{\partial^m U}{\partial x^m} - \alpha \frac{\partial^n U}{\partial t^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(i2\pi\mu)^m - \alpha(i2\pi\zeta)^n] \tilde{U}(\mu, \zeta) e^{i2\pi(x\mu + t\zeta)} d\mu d\zeta = 0. \quad (6.5)$$

Excluyendo la solución trivial  $\tilde{U}(\mu, \zeta) = 0$ , para que la transformada inversa de Fourier para cualquier valor de  $x$  y de  $t$  sea igual a cero, es necesario que el integrando sea igual a cero. En términos matemáticos,

$$[(i2\pi\mu)^m - \alpha(i2\pi\zeta)^n] = 0. \quad (6.6)$$

Al despejar la variable  $\zeta$ , la condición en la ecuación ( 6.6 ) puede describirse como:

$$\zeta = \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha} \frac{(i2\pi)^m}{(i2\pi)^n} \mu^m} \quad ; \quad (6.7)$$

Es conveniente re expresar a la ecuación ( 6.7 ) como

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} (i2\pi)^{\frac{m-n}{n}} (\mu)^{\frac{m}{n}}. \quad (6.8)$$

Una vez realizado el cálculo anterior, al igual que en el capítulo 2 y 4, conviene considerar un sistema óptico con un filtro en el plano de difracción de Fraunhofer .

De acuerdo con la solución obtenida en la ecuación ( 6.8 ) la transmitancia en amplitud del filtro para obtener una representación óptica de la solución a la ecuación ( 6.17 ); de una rendija estrecha, sobre un fondo opáco, se expresa como,

$$P(\mu, \zeta) = \delta\left(\zeta - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} (i2\pi)^{\frac{m-n}{n}} (\mu)^{\frac{m}{n}}\right). \quad (6.9)$$

Como es de esperarse esta formulación está restringida a trayectorias posibles en el plano  $(\mu, \zeta)$ . Es decir para curvas que son factibles en el plano  $(\mu, \zeta)$ . Por lo que la formulación solo es valida para ciertos parámetros  $\alpha, m, n$ .

A continuación se discuten dos casos particulares que ilustran las ventajas y limitaciones de esta propuesta.

La tabla 6.1 muestra un sumario de la solución a distintas ecuaciones diferenciales parciales variando los valores de m y n

Ecuación Diferencial	$\frac{\partial U}{\partial x} - \alpha \frac{\partial U}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial U}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial U}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$
Trayectoria infinitesimal del filtro	$\delta(\zeta - \frac{1}{\alpha} \mu)$	$\delta(\zeta - \frac{i2\pi}{\alpha} \mu^2)$	$\delta(\zeta - \sqrt{\frac{1}{i2\pi\alpha}} \mu)$	$\delta(\zeta - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \mu)$

Tabla 6.1 Solución a ecuaciones diferencial y trayectoria infinitesimal del filtro.

Como se puede observar de los resultados que presenta la tabla 6.1 solo dos casos son factibles de ser graficados en el plano  $(\mu, \zeta)$ . Los otros dos casos no son físicamente realizables con lo discutido en esta tesis.

## 6.2 Visualización óptica de ciertos casos específicos.

Considérese la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \alpha \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (6.10)$$

En este caso particular la ecuación ( 6.5 ) se transforma en

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \alpha \frac{\partial U}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(i2\pi\mu) + \alpha(i2\pi\zeta)] \tilde{U}(\mu, \zeta) e^{i2\pi(x\mu + t\zeta)} d\mu d\zeta = 0. \quad (6.11)$$

Consecuentemente la ecuación ( 6.8 ) toma la forma

$$\zeta = -\frac{1}{\alpha} \mu. \quad (6.12)$$

Por lo tanto el filtro espacial requerido es una rendija estrecha sobre un fondo opaco y se expresa como en la referencia [3],

$$P(\mu, \zeta) = \delta\left(\zeta + \frac{1}{\alpha} \mu\right). \quad (6.13)$$

Esta trayectoria es físicamente realizable si el parámetro  $\alpha$  es un número real distinto de cero.

La solución a este tipo de ecuación diferencial, ecuación (6.10), es entonces de la forma

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_0(\mu) e^{-i2\pi\left(\frac{t}{\alpha}\right)\mu} e^{i2\pi x\mu} d\mu. \\ &= U_0\left(x - \frac{t}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Por lo que claramente el parámetro  $\alpha$  es el recíproco de una velocidad  $V = \frac{1}{\alpha}$ , por lo que la condición es en realidad  $x - Vt$ .

En la figura 6.1 se muestra esquemáticamente este tipo de filtro espacial.

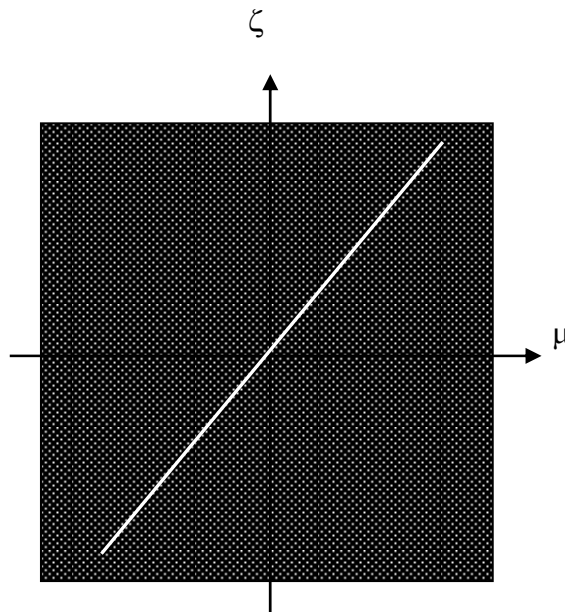


Figura 6.1 Transmitancia en amplitud del filtro de una rendija estrecha sobre un fondo opaco.

Consideremos ahora dos ejemplos de soluciones ópticas a ecuaciones diferenciales parciales aplicadas a la física directamente [4].

*Ecuación diferencial linealizada de Korteweg de Vries (KDV)*

De acuerdo con la referencia [5] esta ecuación representa una aproximación del movimiento unidireccional de una onda en la capa delgada de la superficie de un fluido, cuando la deformación de la superficie es conocida.

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x^3} = 0 \quad (6.15)$$

La solución a la ecuación ( 6.15 ) en su forma integral se expresa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(i2\pi\zeta) + \alpha(i2\pi\mu) + \beta(i2\pi\mu)^3] \tilde{U}(\mu, \zeta) e^{i2\pi(x\mu+t\zeta)} d\mu d\zeta = 0 \quad (6.16)$$

Por lo que la ecuación ( 6.16 ) se transforma en la condición

$$\zeta = 4\pi^2 \beta \mu^3 - \alpha \mu . \quad (6.17)$$

Por lo tanto el filtro espacial requerido, para visualizar ópticamente a la solución, es una rendija estrecha sobre un fondo opáco y se expresa como ,

$$P(\mu, \zeta) = \delta(\zeta - (4\pi^2 \beta \mu^3 - \alpha \mu)) . \quad ( 6.18 )$$

La solución a la ecuación diferencial linealizada KDV, ecuación ( 6.15 ), es entonces de la forma

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_0(\mu) e^{i2\pi t (4\pi^2 \beta \mu^3 - \alpha \mu)} e^{i2\pi x \mu} d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_0(\mu) e^{i2\pi t 4\pi^2 \beta \mu^3} e^{i2\pi(x-\alpha)\mu} d\mu \end{aligned} \quad (6.19)$$

Por lo que se prevé que la solución tenga su origen en  $x = \alpha$  , par  $t=0$ .

La figura 6.2 muestra esquemáticamente la forma del filtro espacial que simula óptimamente la solución a la ecuación diferencial linealizada KDV, par los valores de  $\alpha = 1, \beta = 1$

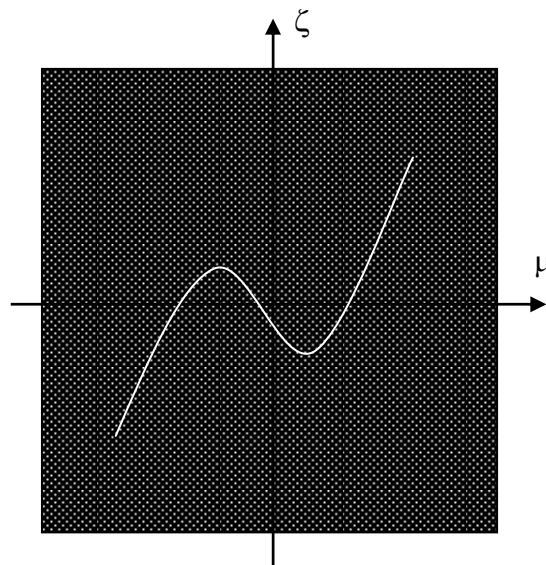


Figura 6.2 Transmitancia en amplitud del filtro de una rendija estrecha sobre un fondo opaco.

La figura 6.3 muestra un dispositivo óptico como el que se discute en capítulos anteriores con un filtro en el plano de difracción de Fraunhofer como el que describe la ecuación 6.18.

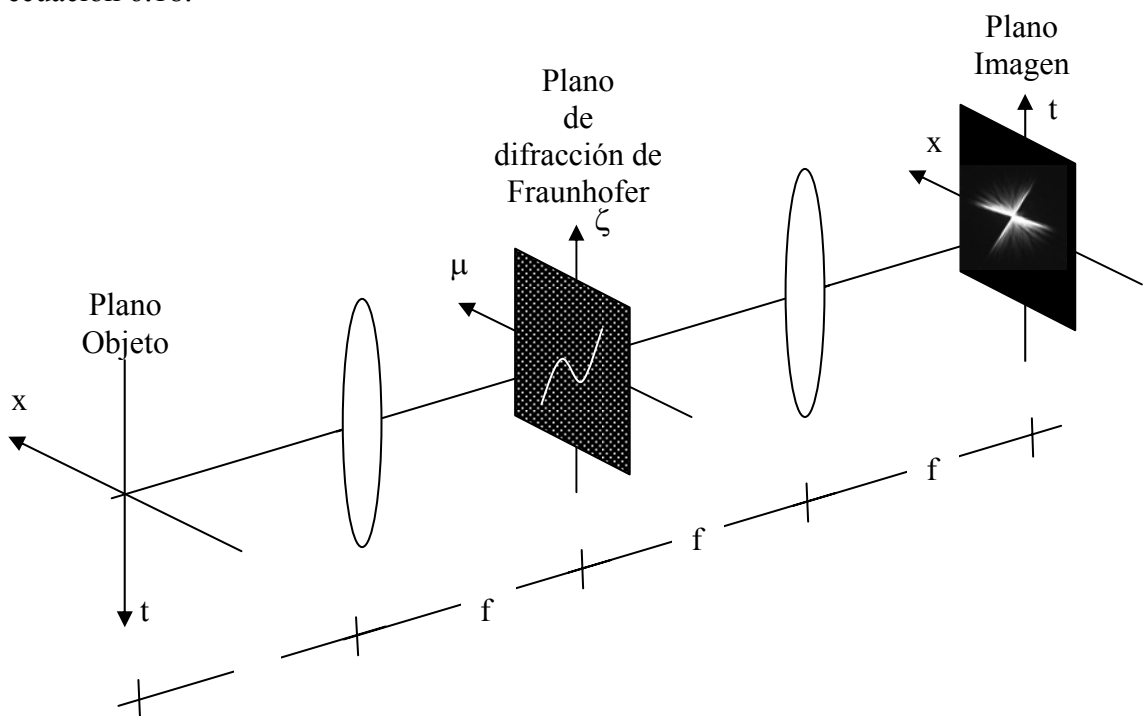


Figura 6.3 Dispositivo óptico con filtro en el plano de difracción de Fraunhofer.

La figura 6.4 muestra la distribución de irradiancia experimental en el plano imagen de un sistema con una fuente puntual en el plano objeto y un filtro en el plano de difracción de Fraunhofer como el que muestra la figura 6.2.

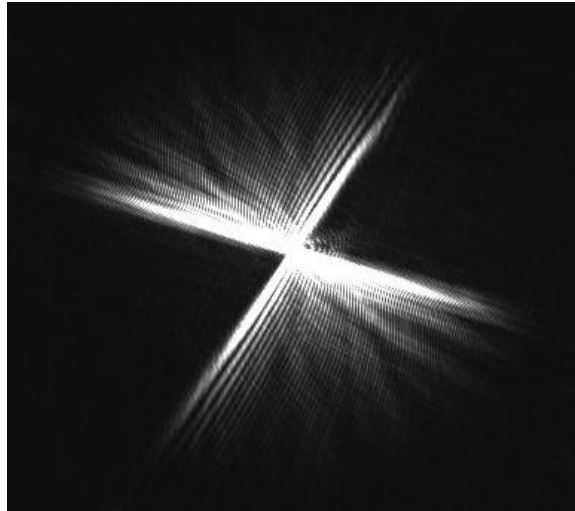


Figura 6.4 Distribución de irradiancia experimental.

Si se realizan barridos a lo largo del eje  $x$  de la distribución de irradiancia experimental se obtienen variaciones en irradiancia proporcionales a la solución de la ecuación diferencial linealizada KDV para distintos valores de tiempo.

La tabla 6.2 muestra el resultado de realizar el barrido mediante un programa de análisis de imágenes a lo largo del eje  $x$  de la distribución de irradiancia experimental para distintos valores de tiempo  $t$ .

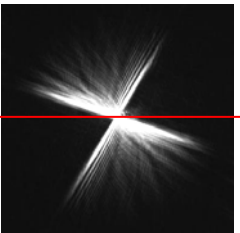
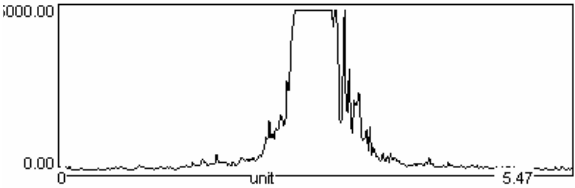
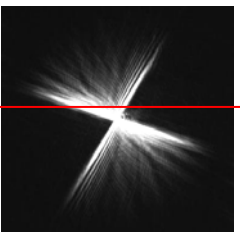
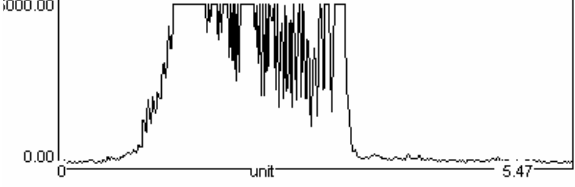
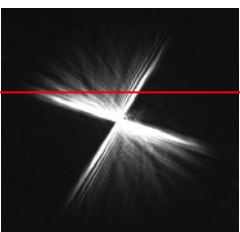
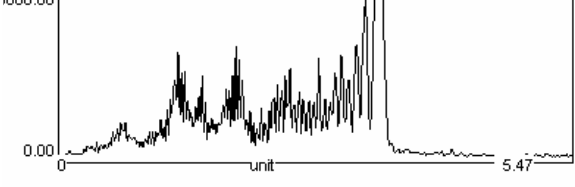
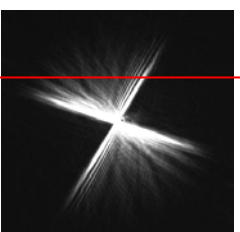
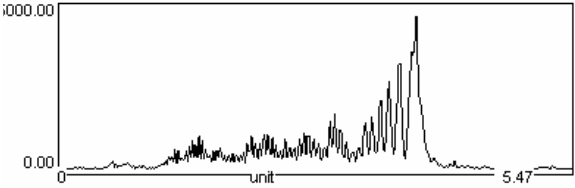
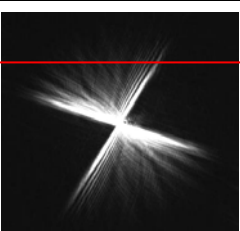
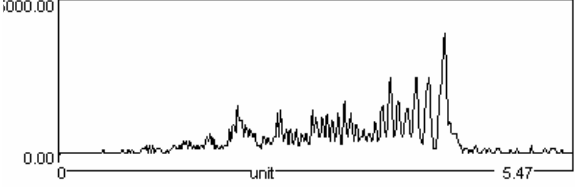
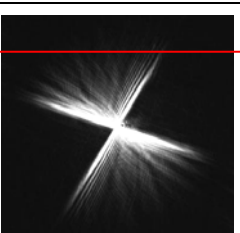
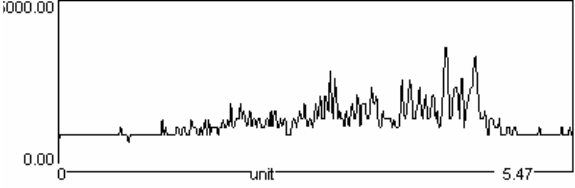
<b>t</b>	<b>Dist. de Irradiancia exp</b>	<b>Distribución de irradiancia a lo largo del eje x</b>
<b>t=0</b>		
<b>t<sub>1</sub></b>		
<b>t<sub>2</sub></b>		
<b>t<sub>3</sub></b>		
<b>t<sub>4</sub></b>		
<b>t<sub>5</sub></b>		

Tabla 6.2 Distribución de Irradiancia a lo largo del eje x para distintos valores de tiempo.



Como se puede concluir de los casos considerados en la tabla 6.1 no todas las trayectorias son físicamente realizables debido a que para ciertos casos de los parámetros  $m$  y  $n$  se obtienen trayectorias que contienen un factor complejo.

En los resultados de la tabla 6.2 se puede observar que los valores máximos están saturados. A pesar de ello es factible notar que la distribución de irradiancia indica como se propaga la onda sobre la superficie del agua con respecto al eje  $x$  en función de variaciones en el tiempo. Obsérvese que para  $t=0$  la onda inicial es prácticamente simétrica. Al evolucionar en el tiempo la onda inicial, esta simetría desaparece. El máximo valor (ya sin saturación) se encuentra desplazado de mano derecha. La tendencia para tiempos largos es la condición de estado estacionario con un valor constante. Cuando se tiene como condición inicial una delta de Dirac, de acuerdo con el fenómeno que describe la ecuación linealizada KDV.

## Referencias

- [1] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda, and C. Frausto, “Optical simulation of free-space propagation”, *Optics Communications*, **157**, 7-12 (1998).
- [2] J. W. Goodman. “Introduction to Fourier Optics.” Editorial: McGraw-Hill. U.S.A. 49-51 (2004).
- [3] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda and A. Serrano-Heredia, “Bessel functions: Parallel display and processing”, *Optics Letters*, **19**, No.1, 55-57 (1994).
- [4] G. Bickel, J. and G. Häusler, “Optical simulation of Huygens’s principle”, *J. Optical Society of America*, **5**, No.6, 843-848 (1988).
- [5] R. Haberman. “Elementary Applied Partial Diferential Equations”. Editorial: Prentice Hall. 181-183, U.S.A. (1987).