

CAPÍTULO 3

Filtro binario en amplitud.

Se analiza la influencia que tiene un filtro anular de ancho finito sobre la visualización óptica de propagación

Para ello es conveniente emplear como referencia la solución que se obtiene al emplear un anulo infinitesimalmente delgado. Posteriormente se discute el caso de un anulo con ancho finito.

3.1 Filtro anular infinitesimalmente delgado.

En la figura 3.1, se muestra un dispositivo óptico como el discutido en capítulos anteriores con un filtro óptico anular localizado en el plano de difracción de Fraunhofer [1].

La transmitancia en amplitud del filtro binario, con un anulo infinitesimalmente delgado se representa por la función de transferencia

$$\tilde{P}(\mu, \zeta) = \frac{\delta(\rho - \Omega)}{\rho}. \quad (3.1)$$

En la ecuación (3.1) se denota con ρ a la coordenada radial en frecuencias espaciales

$$\rho^2 \equiv \mu^2 + \zeta^2. \quad (3.2)$$

El valor máximo de la transmitancia en amplitud del filtro binario es Ω que representa al radio del círculo, sobre el cual se localiza la abertura anular.

$$\Omega = \rho_{\max}. \quad (3.3)$$

La distribución de amplitud compleja en el plano imagen del procesador óptico es proporcional a la transformada de Fourier inversa de la distribución de amplitud en el plano de Fraunhofer.

$$U(r, \phi) = \int_0^{\Omega} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\rho - \Omega)}{\rho} e^{i2\pi(x\mu + z\zeta)} \rho d\rho d\theta. \quad (3.4)$$

Debido a la simetría radial de la abertura circular se puede realizar el cambio a coordenadas polares

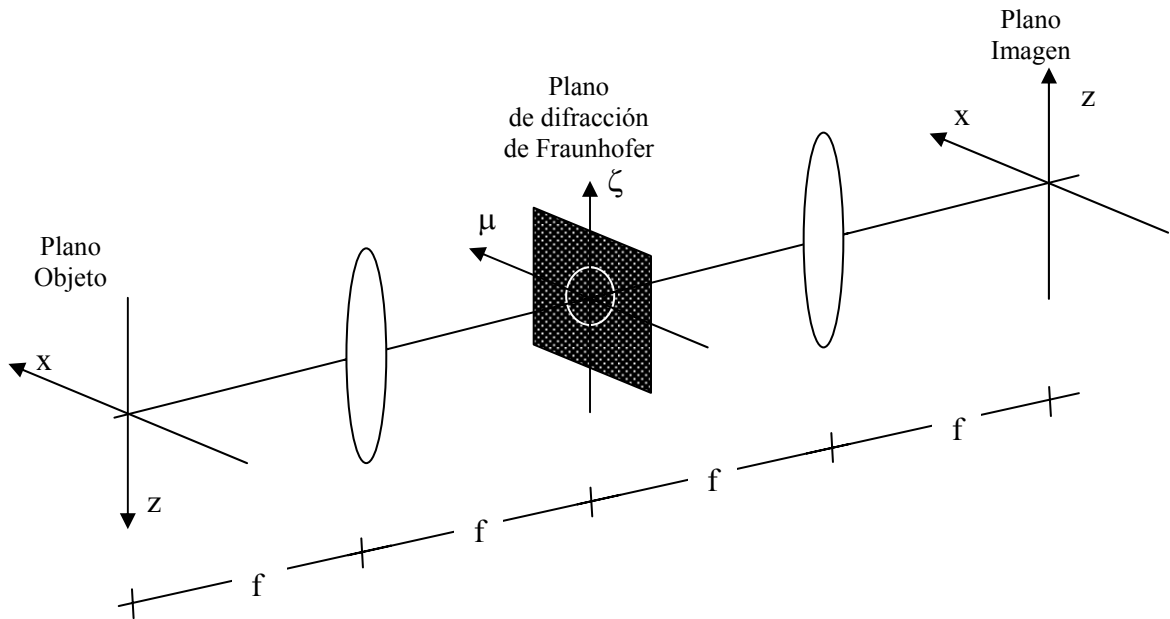


Figura 3.1 Sistema óptico formado por dos lentes y un filtro anular infinitesimalmente delgado en el plano de difracción de Fraunhofer.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ z &= r \sin \phi, \\ \mu &= \rho \cos \theta, \\ \zeta &= \rho \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Es inmediato verificar en la ecuación (3.5) que:

$$x\mu + z\zeta = r\rho[\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi]. \quad (3.6)$$

La expresión en la ecuación (3.6) se puede describir en forma más compacta como:

$$x\mu + z\zeta = r\rho(\cos(\phi - \theta)). \quad (3.7)$$

Sustituyendo en (3.4) el resultado de la ecuación (3.7), se obtiene la expresión en coordenadas polares para la distribución de amplitud compleja en el plano imagen

$$U(r, \phi) = \int_0^{\Omega} \int_0^{2\pi} \delta(\rho - \Omega) e^{i2\pi\rho r \cos(\phi - \theta)} d\rho d\theta. \quad (3.8)$$

Después de integrar a lo largo de la coordenada radial ρ , se obtiene

$$U(r, \phi) = \int_0^{2\pi} e^{i2\pi\Omega r \cos(\phi - \theta)} d\theta. \quad (3.9)$$

Como se detalla en el Apéndice A, la expresión en la ecuación (3.9) se puede escribir como

$$U(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i)^m J_m(2r\pi\Omega) e^{im(\phi - \theta)} d\theta. \quad (3.10)$$

Consecuentemente, la distribución de amplitud compleja es:

$$U(r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i)^m J_m(2r\pi\Omega) e^{im\phi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\theta, \quad (3.11)$$

$$U(r, \phi) = 2\pi J_0(2r\pi\Omega). \quad (3.12)$$

El resultado anterior también puede expresarse en coordenadas cartesianas

$$U(r, \phi) = 2\pi J_0(2\pi\Omega\sqrt{x^2 + z^2}). \quad (3.13)$$

En la figura 3.2 se grafica el resultado de evaluar la distribución de irradiancia normalizada cuando se relaciona el valor $\Omega = 5.9 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ para la máxima frecuencia radial

$$\begin{aligned} I(r) &= \left[\frac{|U(r, \phi)|^2}{(2\pi)^2} \right], \\ &= J_0^2(2\pi r\Omega). \end{aligned} \quad (3.14)$$

En la figura 3.3 se muestra la simulación digital para obtener la imagen de un punto luminoso, cuando el sistema óptico tiene una pupila anular infinitesimalmente delgada.

En la que los valores de la gráfica, en la figura 3.2 se traducen en tonos de gris de la distribución de irradiancia normalizada

$$I(x, z) = J_0^2(2\pi\Omega\sqrt{x^2 + z^2}). \quad (3.15)$$

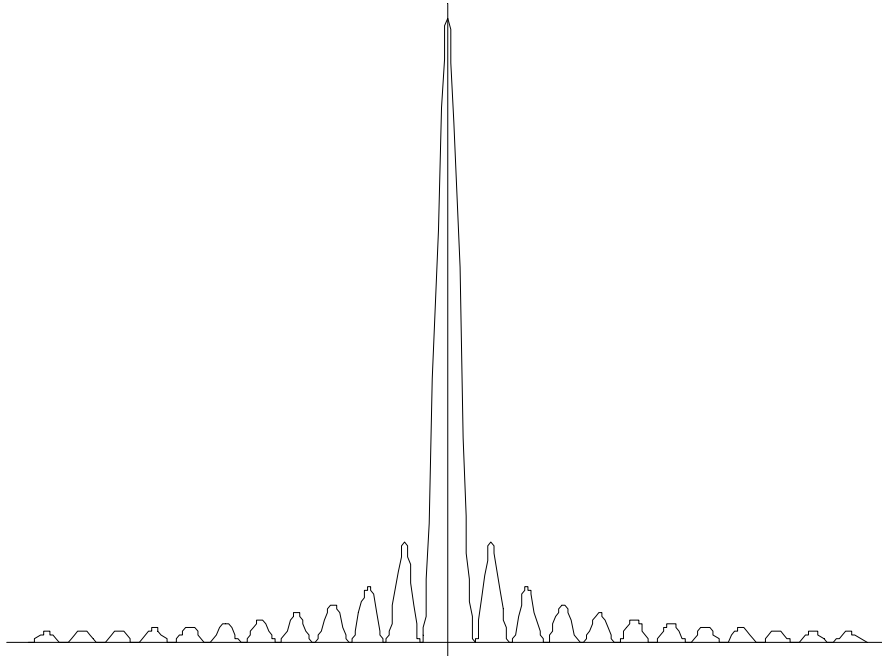


Figura 3.2 Gráfica de la distribución de irradiancia normalizada.

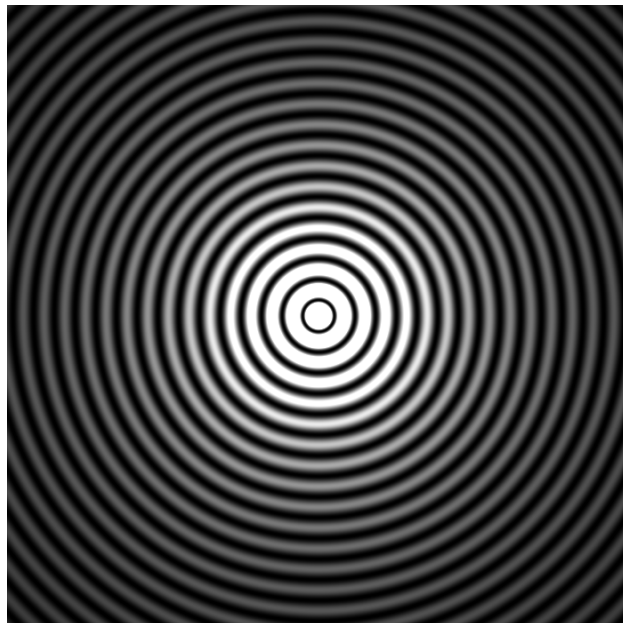


Figura 3.3 Simulación en tonos de gris de la distribución de irradiancia normalizada

Es interesante observar que si se evalúa la ecuación (3.14) cuando $r = 0$ se obtiene:

$$I(0) = J_0^2(0) = 1. \quad (3.16)$$

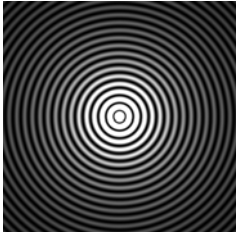
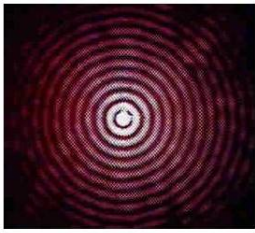
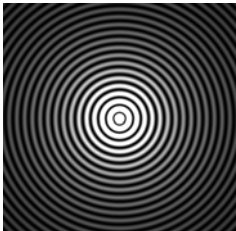
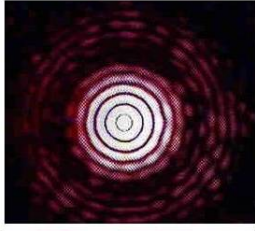
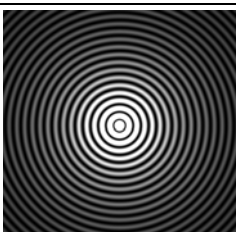
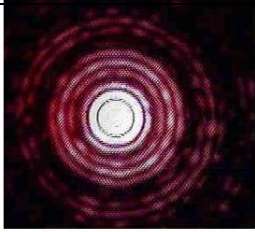
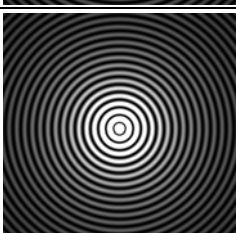
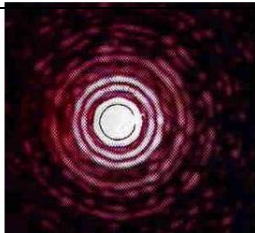
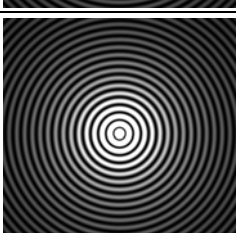
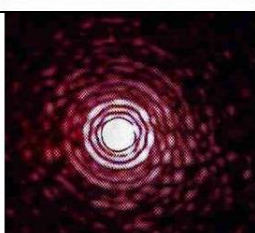
$\Omega = 5.9 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$	Caso ideal		Resultado experimental
		$\varepsilon = 0.93$	
		$\varepsilon = 0.86$	
		$\varepsilon = 0.73$	
		$\varepsilon = 0.66$	
		$\varepsilon = 0.6$	

Tabla 3.1 Distribución de irradiancia experimental.

Ya que experimentalmente no es posible tener una abertura anular infinitesimal, se emplea una abertura anular de ancho finito. El ancho finito conviene expresarlo como una fracción de la máxima frecuencia radial (ε).

En la Tabla 3.1 se puede observar la simulación digital (en tonos de gris) APRA el caso ideal. La distribución de irradiancia de un anulo infinitesimalmente delgado sirve de patrón de referencia para comparar con la distribución de irradiancia experimental de un ánulo de ancho finito para cinco valores distintos de ancho anular (ε). De la comparación entre ambos resultados se puede observar que conforme el ancho finito del anulo aumenta la forma en la que se distribuye la irradiancia cada vez difiere más de la simulación digital. Con esto se puede concluir que el ancho finito del anulo es una variable relevante para poder describir correctamente la influencia que tiene en la simulación óptica un filtro anular. En la siguiente sección se discute el caso de un filtro anular con ancho finito.

3.2 Filtro anular de ancho finito.

Considérese un sistema óptico como el que se muestra en la figura 3.4 con un filtro anular de ancho finito en el plano de Fraunhofer .

La transmitancia de la función de transferencia coherente de un anulo de ancho finito, como se muestra en la figura 3.5, es:

$$\tilde{P}(\mu, \zeta) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) - \text{circ}\left(\frac{\rho}{\varepsilon\Omega}\right). \quad (3.17)$$

De la misma forma que en el caso del anulo infinitesimalmente delgado se denota con ρ a la coordenada radial en frecuencias espaciales y Ω representa al radio del círculo, sobre el cual se localiza la abertura anular.

En la ecuación (3.17) la letra ε denota la fracción real de Ω que representa al ancho de la abertura anular. Es decir ε es un número real positivo tal que

$$0 < \varepsilon < 1. \quad (3.18)$$

Consecuentemente los valores de la frecuencia radial están comprendidos es el intervalo

$$0 < \varepsilon\Omega < \Omega. \quad (3.19)$$

Ya que la transmitancia está compuesta de dos términos, es conveniente separar $\tilde{P}(\mu, \zeta)$ en dos casos y resolver cada uno por separado:

$$\tilde{P}_1(\mu, \zeta) = \text{circ} \left(\frac{\rho}{\Omega} \right). \quad (3.20)$$

$$\tilde{P}_2(\mu, \zeta) = \text{circ} \left(\frac{\rho}{\varepsilon\Omega} \right). \quad (3.21)$$

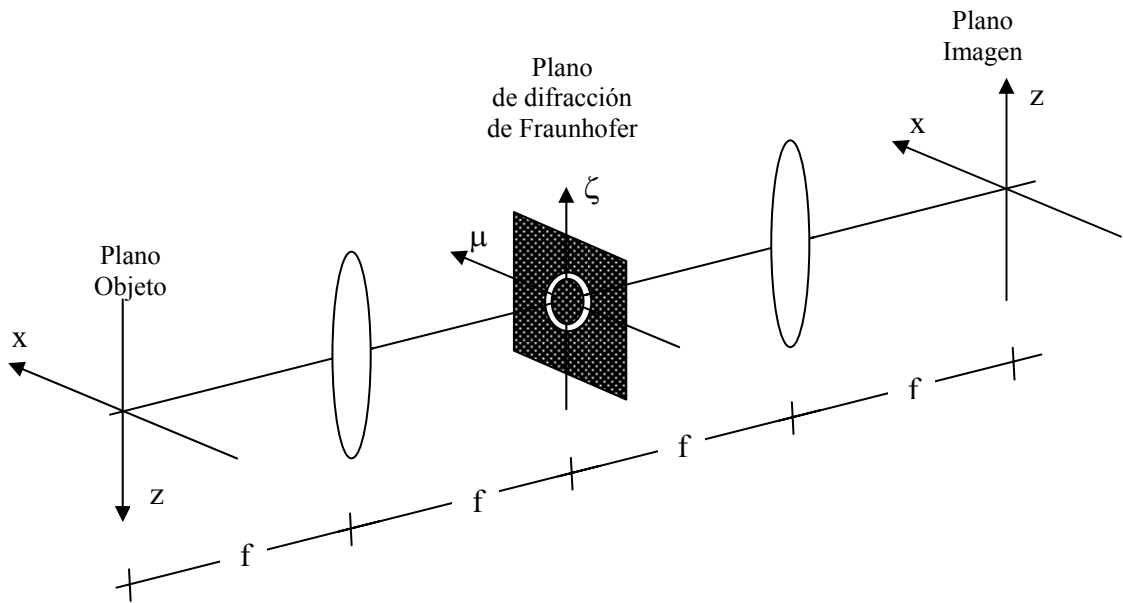


Figura 3.4 Sistema óptico formado por dos lentes y un filtro anular de ancho finito en el plano de difracción de Fraunhofer.

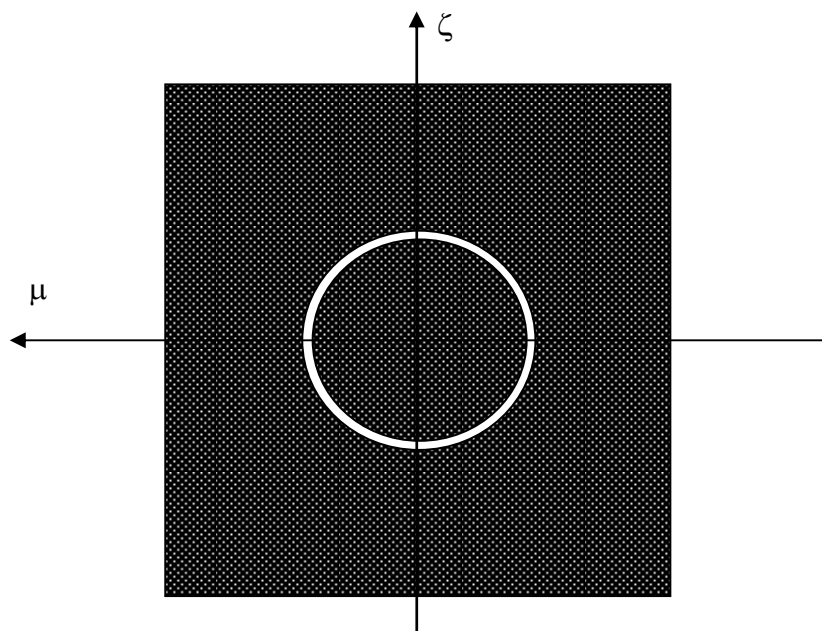


Figura 3.5 Filtro anular de ancho finito

Para el caso de $\tilde{P}_1(\mu, \zeta)$ la distribución de amplitud compleja en el plano imagen es

$$U_1(r, \phi) = 2\pi\Omega^2 \frac{J_1(2\pi r\Omega)}{2\pi r\Omega}. \quad (3.22)$$

Y para $\tilde{P}_2(\mu, \zeta)$ la distribución de amplitud compleja en el plano imagen es

$$U_2(r, \phi) = 2\pi\varepsilon^2\Omega^2 \frac{J_1(2\pi r\varepsilon\Omega)}{2\pi r\varepsilon\Omega}. \quad (3.23)$$

Realizando la resta de (3.22) y (3.23) se obtiene la distribución de amplitud en el plano imagen:

$$U(r, \phi) = 2\pi\Omega^2 \left[\frac{J_1(2\pi r\Omega)}{2\pi r\Omega} - \varepsilon^2 \frac{J_1(2\pi r\varepsilon\Omega)}{2\pi r\varepsilon\Omega} \right]. \quad (3.24)$$

En la ecuación (3.24) la distribución de amplitud compleja para $U(r, \phi)$ en el plano imagen depende de dos parámetros, el radio de la abertura Ω y la fracción ε que especifica el ancho anular del aro.

La distribución de irradiancia normalizada se obtiene del modo siguiente

$$\begin{aligned} I(r) &= \left[\frac{|U(r, \phi)|^2}{(2\pi\Omega^2)^2} \right] \\ &= \left[\frac{J_1(2\pi r\Omega)}{2\pi r\Omega} - \varepsilon^2 \frac{J_1(2\pi r\varepsilon\Omega)}{2\pi r\varepsilon\Omega} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En la Tabla 3.2 se muestra el resultado de evaluar la ecuación (3.25), y la simulación digital en tonos de gris de la distribución de irradiancia normalizada de la ecuación (3.26) ; ambos para cinco valores distintos de ancho anular (ε), manteniendo fijo el valor máximo de la frecuencia radial (Ω).

$$I(r) = \left[\frac{J_1(2\pi\sqrt{x^2 + z^2}\Omega)}{2\pi\sqrt{x^2 + z^2}\Omega} - \varepsilon^2 \frac{J_1(2\pi\sqrt{x^2 + z^2}\varepsilon\Omega)}{2\pi\sqrt{x^2 + z^2}\varepsilon\Omega} \right]^2. \quad (3.26)$$

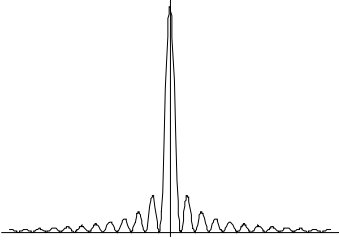
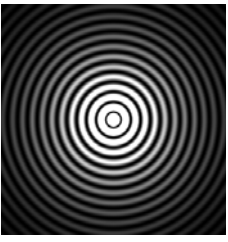
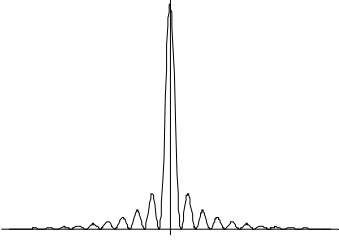
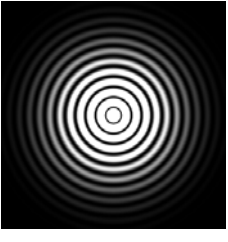
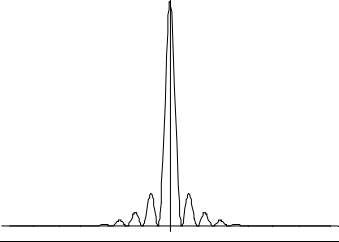
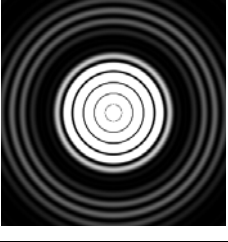
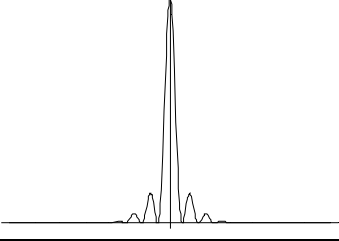
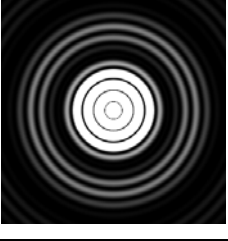
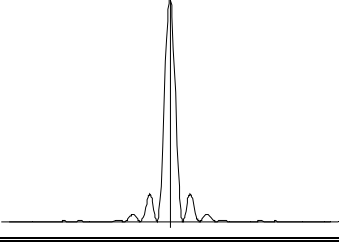
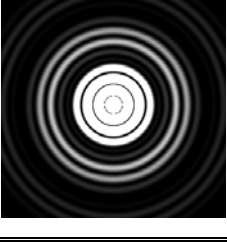
$\Omega = 5.9 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$	Gráfica	Simulación
$\varepsilon = 0.93$		
$\varepsilon = 0.86$		
$\varepsilon = 0.73$		
$\varepsilon = 0.66$		
$\varepsilon = 0.6$		

Tabla 3.2 Gráfica resultante de evaluar la ecuación 3.25 y simulación digital en tonos de grises de la distribución de irradiancia, para cinco distintos valores de ε .

La Tabla 3.3 muestra una comparación entre las simulaciones digitales en tonos de gris de la distribución de irradiancia normalizada en la imagen y los resultados experimentales obtenidos; manteniendo Ω fijo y haciendo variar el valor de ε .

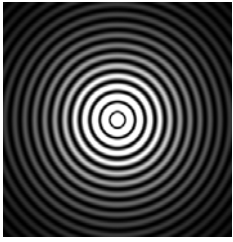
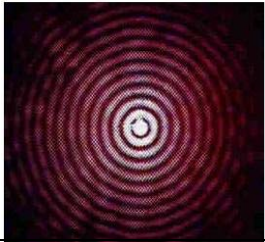
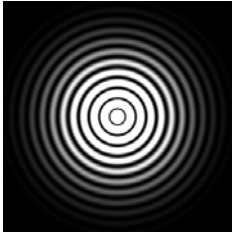
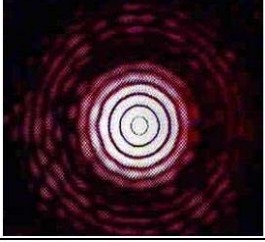
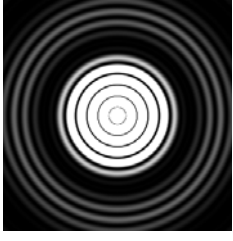
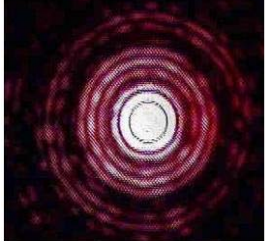
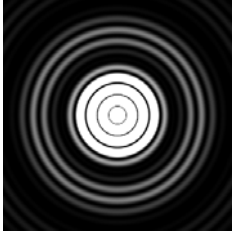

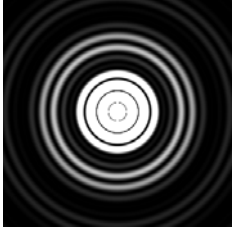
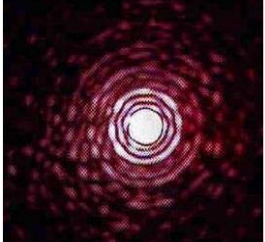
$\Omega = 5.9 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$	Simulación Numérica	Resultado experimental
$\varepsilon = 0.93$		
$\varepsilon = 0.86$		
$\varepsilon = 0.73$		
$\varepsilon = 0.66$		
$\varepsilon = 0.6$		

Tabla 3.3 Simulación digital en tonos de grises de la distribución de irradiancia y resultados experimentales para cinco distintos valores de ancho anular (ε).

De la Tabla 3.3 se puede observar que el número de ceros en la distribución de irradiancia varia conforme cambia el ancho anular del filtro. Lo anterior se resume en la de la figura 3.6 la cual muestra la relación del número de ceros (simulación numérica y resultados experimentales) con respecto al tamaño finito del ancho anular (ε).

ϵ	No. De ceros Simulación	No. De ceros Res. Exp.
0.93	30	26
0.86	24	20
0.73	22	16
0.66	18	12
0.6	14	8

Tabla 3.4 Relación del número de ceros (simulación numérica y resultados experimentales) con el tamaño finito del ancho anular (ϵ).

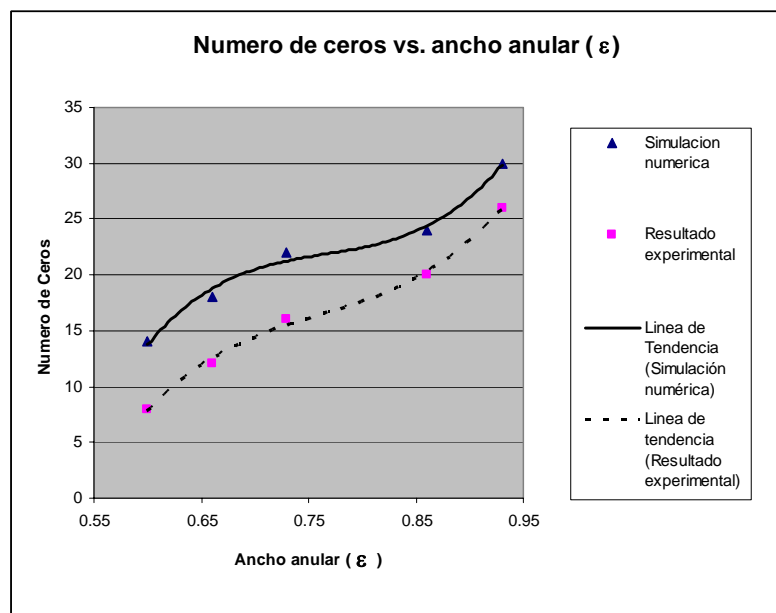


Figura 3.6 Gráfica de número de ceros (simulación numérica y resultados experimentales) contra tamaño finito del ancho anular (ϵ).

De la Tabla 3.4 y la Figura 3.6 se puede observar en ambos casos la curva que describe el cambio en el número de ceros con respecto a distintos valores de ancho anular ϵ tiene una tendencia similar.

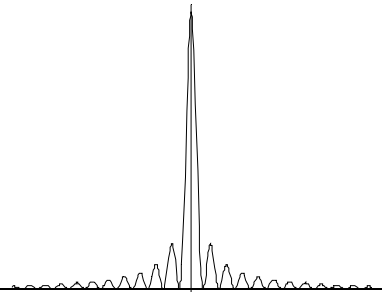
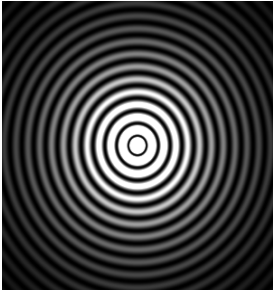
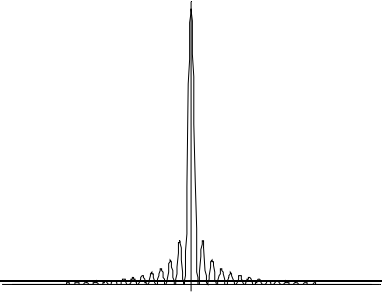
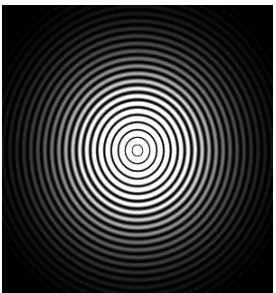
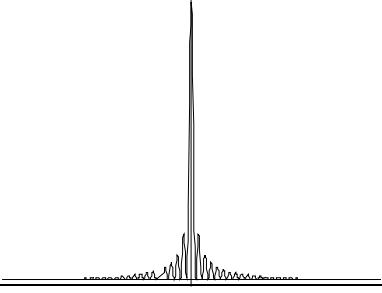
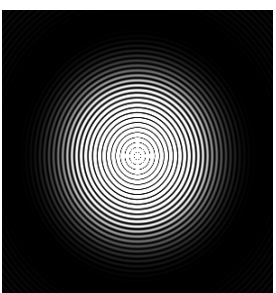
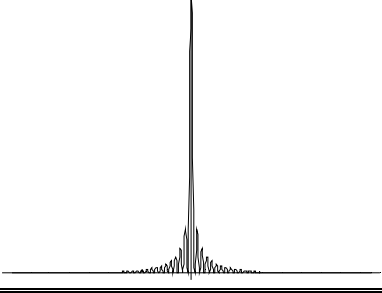
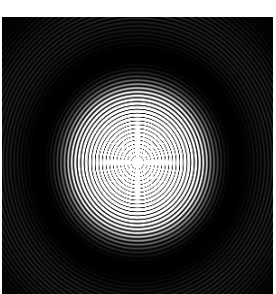
$\varepsilon = 0.73$	Gráfica	Simulación
$\Omega = 5.9 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$		
$\Omega = 10.0 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$		
$\Omega = 15.2 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$		
$\Omega = 19.4 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$		

Tabla 3.5 Gráfica resultante de evaluar la ecuación 3.25 mulación digital en tonos de grises de la distribución de irradiancia, para cuatro distintos valores de Ω .

La Tabla 3.5 muestra el resultado de evaluar la ecuación (3.25) y la simulación digital en tonos de gris de la distribución de irradiancia normalizada en la imagen de un sistema óptico con una fuente puntual, ambas para un valor fijo de ε (ancho anular) y cuatro valores distintos de Ω .

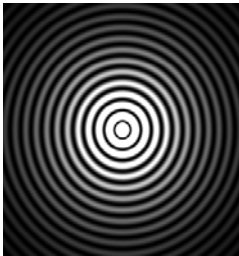
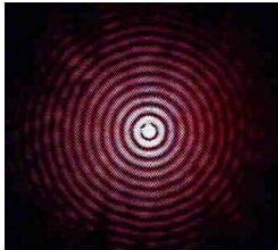
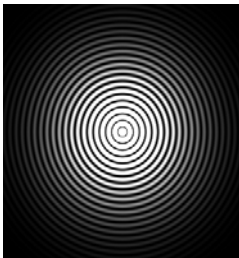
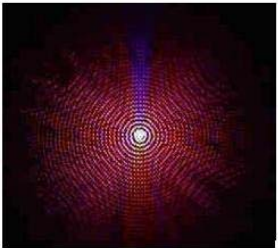
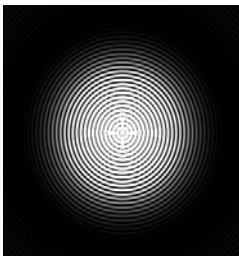
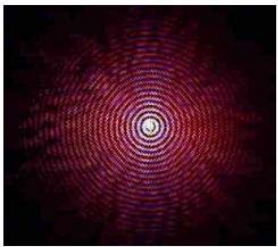
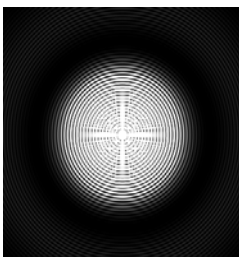

$\varepsilon = 0.73$	Simulación Numérica	Resultados Experimentales
$\Omega = 5.9 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$		
$\Omega = 10.0 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$		
$\Omega = 15.2 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$		
$\Omega = 19.4 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$		

Tabla 3.6 Simulación digital en tonos de grises de la distribución de irradiancia y resultados experimentales para cuatro distintos valores de Ω .

En la Tabla 3.6 se puede observar que la separación de los ceros de la ecuación (3.26) depende del valor de la frecuencia espacial máxima del anulo (Ω). La relación entre la separación de los ceros y el valor de la frecuencia espacial máxima del anulo es inversamente proporcional.

Ya que experimentalmente no se puede tener una abertura de ancho infinitesimalmente delgado se tienen que considerar el ancho anular como una variable experimental, por lo que se debe realizar el cálculo tomando en cuenta dicha variable.

Para el caso del anulo con ancho finito la forma en que se distribuye la irradiancia cambia dependiendo del valor del ancho anular, lo cual se apega más a lo obtenido en los resultados experimentales que los cálculos hechos para un anulo infinitesimalmente delgado.

A medida que el ancho anular es más pequeño, tanto la simulación numérica como los resultados experimentales se asemejan más a la simulación numérica obtenida para un anulo infinitesimalmente delgado.

El ancho anular (ϵ) determina el número de ceros observables en la distribución de irradiancia y el valor de la frecuencia espacial máxima del anulo (Ω) determina la separación de los ceros. La relación entre el número de ceros y el ancho anular es inversamente proporcional, al igual que la relación entre el valor de la frecuencia espacial máxima y la separación de los ceros, este hecho permite una correcta elección de ambos parámetros al momento de realizar los experimentos dependiendo de lo que se desee observar en la distribución de irradiancia.

Referencias

- [1] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda, and C. Frausto, “Optical simulation of free-space propagation”, *Optics Communications*, **157**, 7-12 (1998).
- [2] E. Hecht. “Optics”. Editorial: Adison Wesley Longman, Inc. U.S.A., (1998).
- [3] J. Ojeda-Castañeda, “Parallel display of the Chebyshev Polynomials”, *Optical Memory and Neural Networks*, **5**, No.4, 223-226 (1996).
- [4] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda and A. Serrano-Heredia, “Bessel functions: Parallel display and processing”, *Optics Letters*, **19**, No.1, 55-57 (1994).
- [5] G. Bickel, J. and G. Häusler, “Optical simulation of Huygens’s principle”, *J. Optical Society of America*, **5**, No.6, 843-848 (1988).