

CAPÍTULO 2

Ecuación paraxial de Helmholtz.

Se discute la posibilidad de visualizar, mediante un procesador óptico [1], a las soluciones de la ecuación paraxial de Helmholtz. Para ello se realiza una comparación de los resultados obtenidos considerando el fenómeno de difracción de Fraunhofer, en un procesador óptico (en esta discusión se considera al filtro como una parábola infinitesimalmente delgada) y la solución clásica a la ecuación paraxial de Helmholtz.

2.1 Filtraje espacial de una función mediante un filtro con transmitancia parabólica.

Considerando un sistema óptico, como el que se discute en el capítulo 1. En la figura 2.1, se muestra un filtro óptico localizado en el plano de difracción de Fraunhofer.

Considérese una función bidimensional de entrada $G_0(x, z)$ que representa la transmitancia en amplitud en el plano objeto. La transmitancia es diferente de cero solo a lo largo del eje x ; este hecho se representa con una Delta de Dirac $\delta(z)$. A lo largo del eje x , la transmitancia varía de acuerdo a la función real positiva $F(x)$ [2], como se muestra en la figura 2.2 (a). Por lo tanto la transmitancia en amplitud de la pantalla de entrada es

$$G_0(x, z) = F(x) \delta(z). \quad (2.1)$$

La distribución de amplitud compleja en el plano de difracción de Fraunhofer es proporcional a la transformada de Fourier de $G_0(x, z)$. Por lo que

$$\tilde{G}_0(\mu, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, z) e^{-i2\pi(\mu x + \zeta z)} dx dz. \quad (2.2)$$

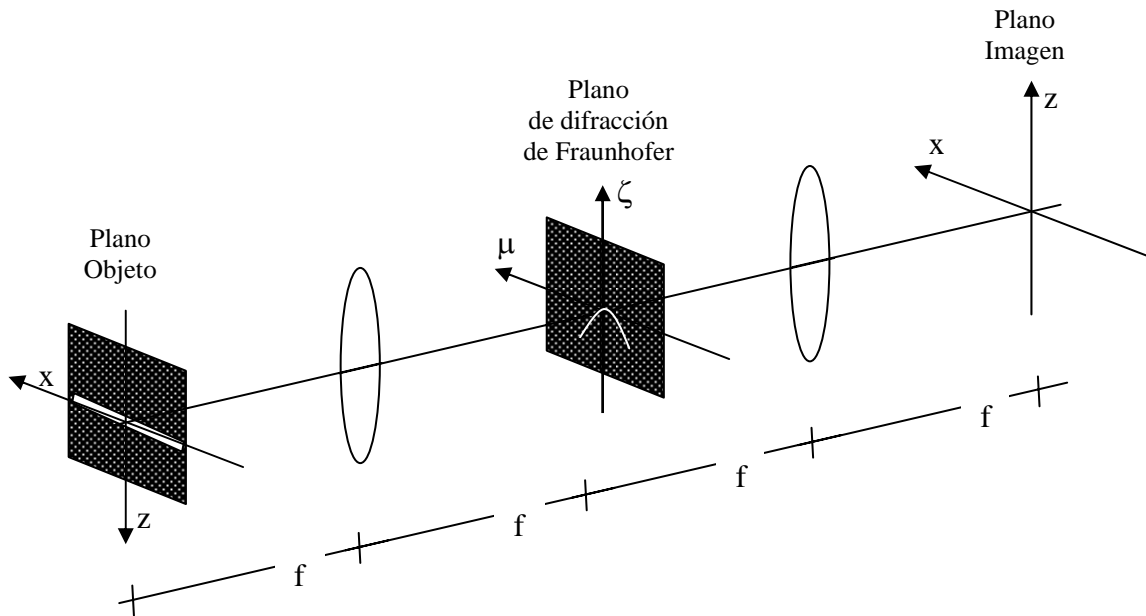


Figura 2.1 Sistema óptico formado por dos lentes y un filtro en el plano de difracción de Fraunhofer.

Al sustituir la ecuación (2.1) en la (2.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_0(\mu, \zeta) &= \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(z) e^{-i2\pi(\mu x + \zeta z)} dx dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i2\pi \mu x} dx \\
 &= \tilde{F}(\mu) \quad . \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

En la ecuación (2.3) la función $\tilde{F}(\mu)$ representa a la transformada de Fourier de la función $F(x)$.

Considérese ahora que en el plano de Fraunhofer se tiene una rendija muy estrecha, la cual sigue la curva $\zeta = -A\mu^2$, en donde A es un parámetro positivo $A > 0$ como se indica en la

figura 2.1. La transmitancia a través de esta rendija estrecha, sobre un fondo se representa como la función de transferencia coherente como lo muestra la figura 2.2 (b) [3].

$$\tilde{P}(\mu, \zeta) = \delta(\zeta + A\mu^2). \quad (2.4)$$

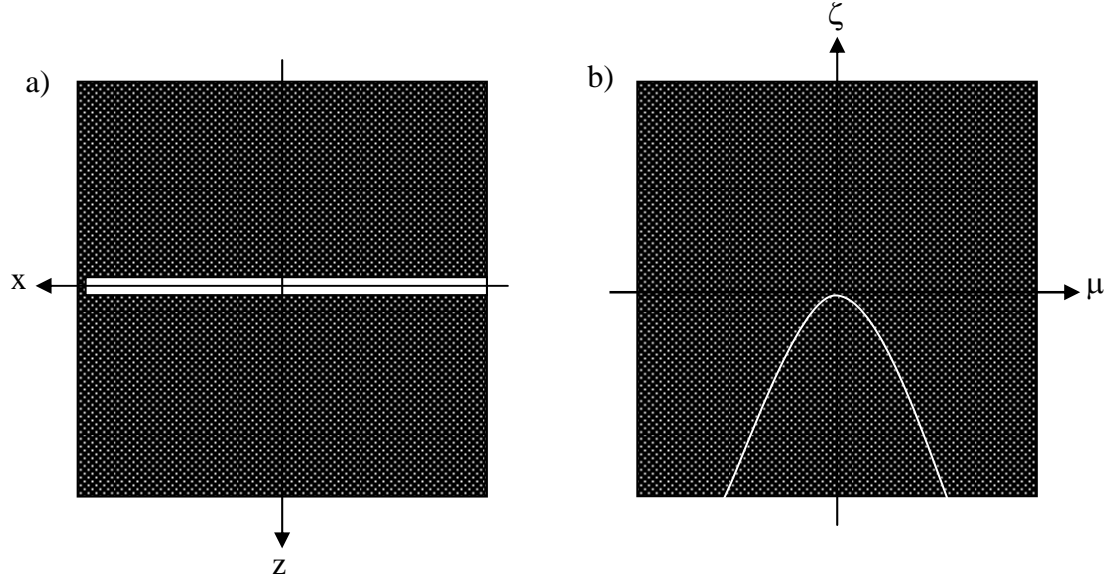


Figura 2.2 (a) Función de entrada $F(x)$ a lo largo del eje x , (b) Rendija estrecha, sobre un fondo opaco, que se distribuye a lo largo de la curva para generar el filtro óptico.

Empleando el resultado de la ecuación (2.3) la distribución de amplitud compleja detrás del filtro es

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\mu, \zeta) &= \delta(\zeta + A\mu^2) \tilde{U}_0(\mu, \zeta) \\ &= \delta(\zeta + A\mu^2) \tilde{F}(\mu). \end{aligned} \quad (2.5)$$

La distribución de amplitud compleja en el plano de Fraunhofer genera una distribución de amplitud compleja en el plano imagen; la cual es proporcional a la transformada de Fourier inversa de $\tilde{G}(\mu, \zeta)$ en otros términos

$$G(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mu, \zeta) e^{i2\pi[x\mu + z\zeta]} d\mu d\zeta, \quad (2.6)$$

Sustituyendo la ecuación (2.5) en (2.6) se tiene que

$$G(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta + A\mu^2) \tilde{F}(\mu) e^{i2\pi[x\mu + z\zeta]} d\mu d\zeta . \quad (2.7)$$

De acuerdo con las propiedades de la Delta de Dirac se tiene que

$$G(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mu) e^{-i2\pi A\mu^2 z} e^{i2\pi x\mu} d\mu . \quad (2.8)$$

Este resultado se relaciona más adelante con el proceso de visualización de la solución a la ecuación diferencial de Helmholtz.

2.2 Ecuación paraxial de Helmholtz.

El resultado expresado en la ecuación (2.8) es muy similar a la expresión que se obtiene al representar en el espacio de frecuencias la ecuación diferencial que describe la difracción de Fresnel [4]. Para verificar esta relación conviene considerar la ecuación paraxial de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + i2k \frac{\partial U}{\partial z} = 0 . \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) describe ondas que viajan en una trayectoria tal que sus vectores k de propagación viajan muy cerca al eje z y con ángulos de inclinación respecto a este suficientemente pequeños.

Una forma de obtener una solución general es considerando la expresión de la onda en el plano de frecuencias espaciales [5]

$$U(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, z) e^{i2\pi x\mu} d\mu . \quad (2.10)$$

La ecuación anterior considera a la onda como una suma de ondas planas. Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (2.9) se obtiene que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, z)(i2\pi\mu)^2 e^{i2\pi x\mu} d\mu. \quad (2.11)$$

De igual manera se obtiene

$$i2k \frac{\partial U}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} (i2k) \frac{\partial \tilde{U}(\mu, z)}{\partial z} e^{i2\pi x\mu} d\mu. \quad (2.12)$$

Consecuentemente, sumando la ecuación (2.11) y (2.12) y factorizando la función exponencial, la ecuación paraxial de Helmholtz se puede expresar como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + i2k \frac{\partial U}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{U}(\mu, z)(i2\pi\mu)^2 + (i2k) \frac{\partial \tilde{U}(\mu, z)}{\partial z} \right] e^{i2\pi x\mu} d\mu = 0. \quad (2.13)$$

Para que la transformada inversa de Fourier sea igual a cero, para cualquier valor de x el integrando debe ser igual a cero. Es decir ,

$$\tilde{U}(\mu, z)(i2\pi\mu)^2 + (i2k) \frac{\partial \tilde{U}(\mu, z)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (2.14)$$

El resultado en la ecuación (2.14) puede describirse como:

$$\frac{\partial \tilde{U}(\mu, z)}{\partial z} = \frac{(2\pi\mu)^2}{(i2k)} \tilde{U}(\mu, z); \quad (2.15)$$

en donde k es el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Es directo verificar que la solución a la ecuación (2.15) es

$$\tilde{U}(\mu, z) = \tilde{U}_0(\mu) e^{-i\pi\lambda\mu^2 z}. \quad (2.16)$$

Por lo que el espectro de Fourier de la solución a la Ecuación de Helmholtz esta dado por la ecuación (2.16).

Entonces la solución a la ecuación paraxial de Helmholtz es

$$U(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_0(\mu) e^{-i\pi\lambda\mu^2 z} e^{i2\pi x\mu} d\mu. \quad (2.17)$$

De las ecuaciones (2.8) y (2.17) se concluye que la imagen generada por el procesador óptico $G(x, z)$ simula ópticamente la solución a la ecuación de paraxial de Helmholtz, $G(x, z) = U(x, z)$, si

$$\tilde{U}_0(\mu) = \tilde{F}(\mu). \quad (2.18)$$

Es decir el espectro de Fourier de la señal $F(x)$ representa al espectro de Fourier de la amplitud en $z = 0$. Consecuentemente:

$$U(x, z = 0) = F(x). \quad (2.19)$$

Este hecho demuestra que para el caso de la ecuación paraxial de Helmholtz el filtro óptico opaco con una rendija estrecha a lo largo de la curva $\zeta = -A\mu^2$ es suficiente para representar la solución a dicha ecuación diferencial.

Referencias

- [1] J. Ojeda-Castañeda, “Parallel display of the Chebyshev Polynomials”, *Optical Memory and Neural Networks*, **5**, No.4, 223-226 (1996).
- [2] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda and A. Serrano-Heredia, “Trading dimensionality in signal processing”, *Optics & laser Technology*, **Vol. 00**, No. 00 (1996).
- [3] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda, and C. Frausto, “Optical simulation of free-space propagation”, *Optics Communications*, **157**, 7-12 (1998).
- [4] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda, and J. Ibarra, “Airy function and Laguerre polynomials : optical display and processing”, *Optics Communications*, **109**, 361-367 (1994).
- [5] J. W. Goodman. “Introduction to Fourier Optics.” Editorial: McGraw-Hill. U.S.A 49-51, (2004).