

CAPÍTULO 1

Conceptos básicos.

A continuación se describen los conceptos básicos de óptica física y la notación de los modelos matemáticos que serán empleados a lo largo de la tesis.

1.1 Transmitancia.

La transmitancia en amplitud de un filtro óptico, el cual se representa por un plano infinitesimalmente delgado, es una función compleja de dos variables reales (las coordenadas del plano). La transmitancia representa los cambios que sufre la amplitud compleja (amplitud y fase) al atravesar el plano del filtro [1].

Consecuentemente la transmitancia, $P(x,z)$, está definida por la relación

$$U(x, z) = P(x, z) U_0(x, z). \quad (1.1)$$

La elección de las variables (x,z) el eje óptico, en la variable z , se simula como el eje perpendicular al eje x [2]. Esta notación se modifica ligeramente, en el capítulo 6, para visualizar soluciones que no solo dependen de variables espaciales sino también temporales. Así mismo la elección de ciertas zonas unidimensionales del patrón de difracción permitirá el análisis de variaciones de amplitud proporcionales a las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales [3-5].

Ya que en esta tesis se consideran filtros que no ceden energía (filtros pasivos) entonces la transmitancia cumple con la condición $|P(x, z)| \leq 1$. Es interesante observar que si la amplitud $U_0(x, z)$ antes del filtro es distinta de cero, entonces la transmitancia puede también ser definida como el cociente

$$P(x, z) = \frac{U(x, z)}{U_0(x, z)}, \quad (1.2)$$

como se muestra en la Figura 1.1.

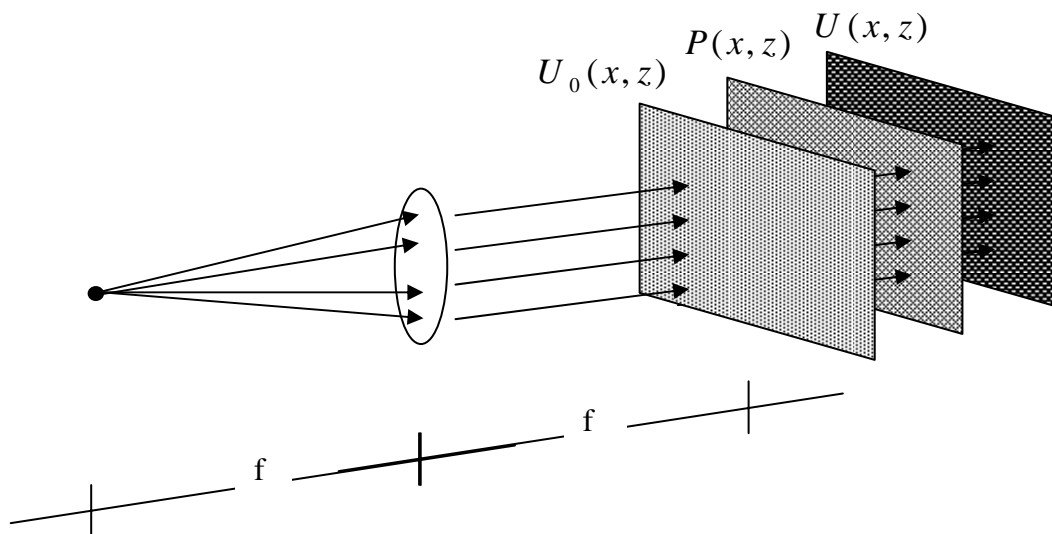


Figura 1.1 Representación esquemática de un sistema óptico para visualizar el concepto de transmitancia (la separación entre planos no se encuentra escalada).

1.2 Transformada de Fourier.

A lo largo de la segunda mitad del siglo XX, el fenómeno de difracción de Fraunhofer se describe en términos de un sistema lineal invariante al desplazamiento. Dicho sistema es conveniente analizarlo a través de la transformada de Fourier, por lo que antes de hablar de difracción es útil repasar la definición de la transformada de Fourier bidimensional

$$\tilde{F}(\mu, \zeta) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z) e^{-i2\pi(\mu x + \zeta z)} dx dz . \quad (1.3)$$

De la misma forma la transformada inversa de Fourier bidimensional se define por:

$$F(x', z') = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mu, \zeta) e^{i2\pi(\mu x + \zeta z)} d\mu d\zeta . \quad (1.4)$$

En la ecuación (1.4) las letras “x” y “z” son las coordenadas en el plano objeto; y las letras “μ” y “ζ” denotan a las coordenadas en el plano frecuencial o plano de difracción de Fraunhofer como se ilustra en la Figura 1.2.

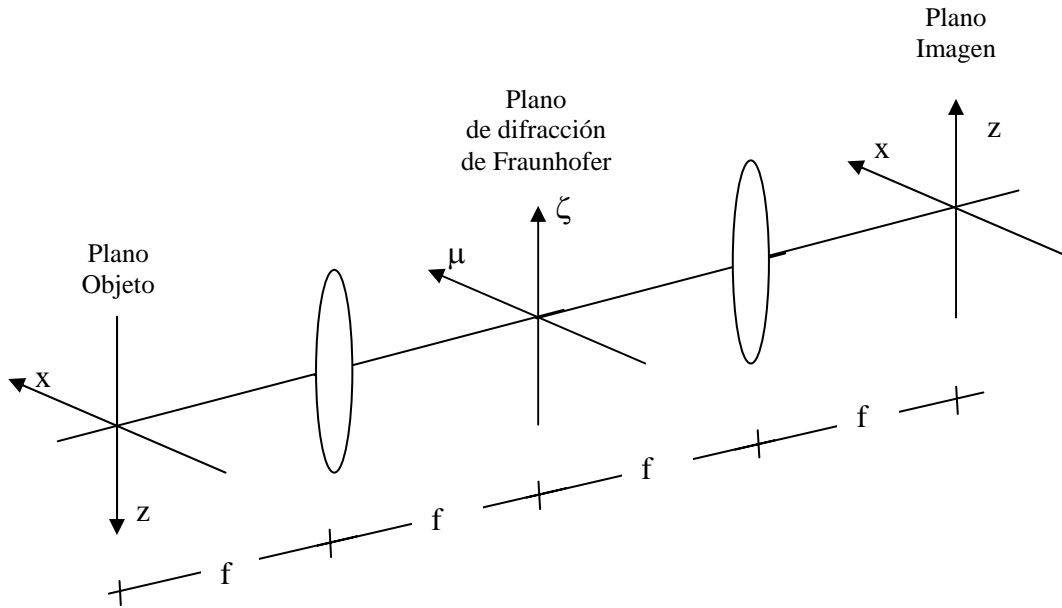


Figura 1.2 Representación esquemática de un sistema óptico para visualizar a la difracción de Fraunhofer.

La separación entre planos (f) es la distancia focal de la lente [5].

La función $F(x, z)$ representa la distribución de amplitud compleja en el objeto; mientras que la función $\tilde{F}(\mu, \zeta)$ representa la distribución de amplitud compleja del patrón de difracción. Considerando que el patrón de difracción de Fraunhofer se obtiene a través de una lente delgada positiva (Fig. 1.2), frecuencias espaciales están localizadas en coordenadas cartesianas a través de las siguientes ecuaciones

$$\mu = \frac{x'}{\lambda f} \quad (1.5)$$

$$\zeta = \frac{z'}{\lambda f} \quad (1.6)$$

Las dimensiones de (μ, ζ) son $[L^{-1}, L^{-1}]$, en los experimentos de esta tesis

$$\lambda f = 633 \times 10^{-7} m^2$$

1.3 Sistema óptico.

Consideremos un sistema óptico como el que muestra la Figura 1.3, que consta de una fuente puntual que es usada para generar ondas planas, estas producen una iluminación uniforme sobre un filtro binario ubicado en el plano de difracción de Fraunhofer.

Con el propósito de representar la condición inicial, $z=0$, de una fuente puntual la transmitancia en amplitud en el plano del objeto es

$$U_0(x, z) = \delta(x) \delta(z). \quad (1.7)$$

En el plano de difracción de Fraunhofer la distribución de amplitud compleja, $\tilde{U}_0(\mu, \zeta)$, es proporcional a la transformada de Fourier de $U_0(x, z)$. Por lo que

$$\tilde{U}_0(\mu, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, z) e^{-i2\pi(\mu x + \zeta z)} dx dz. \quad (1.8)$$

Al sustituir la ecuación (1.7) en la (1.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(\mu, \zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(z) e^{-i2\pi(\mu x + \zeta z)} dx dz, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i2\pi\mu x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) e^{-i2\pi\zeta z} dz \\ &= 1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Esto es, la distribución de amplitud compleja es constante en todo el plano de difracción de Fraunhofer, lo que garantiza la iluminación uniforme en dicho plano.

La distribución de amplitud compleja detrás del filtro binario es

$$\tilde{U}(\mu, \zeta) = \tilde{P}(\mu, \zeta) \tilde{U}_0(\mu, \zeta). \quad (1.10)$$

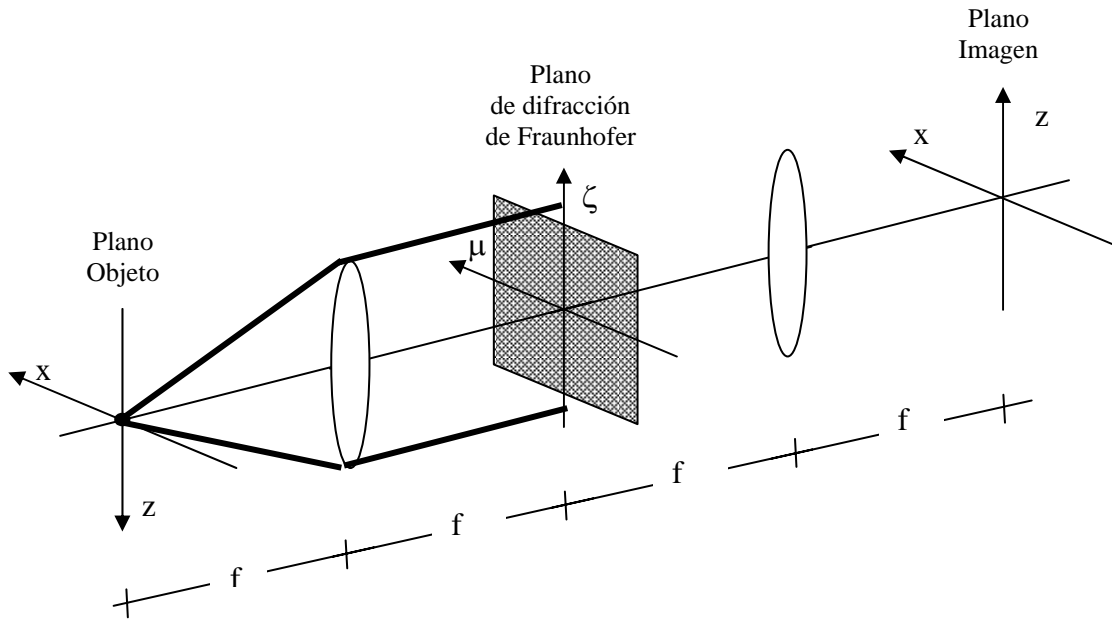


Figura 1.3 Sistema óptico con fuente puntual en plano objeto y filtro binario en el plano de difracción de Fraunhofer.

Sustituyendo el resultado de la ecuación (1.9) en (1.10) se tiene que la distribución de amplitud es la transmitancia del filtro espacial

$$\tilde{U}(\mu, \zeta) = \tilde{P}(\mu, \zeta). \quad (1.11)$$

Ahora bien, la distribución de amplitud compleja en el plano imagen es proporcional a la transformada de Fourier inversa bidimensional de la función detrás del filtro.

$$U(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, \zeta) e^{i2\pi[x\mu+z\zeta]} d\mu d\zeta. \quad (1.12)$$

Sustituyendo la ecuación (1.11) en (1.12) se obtiene que la distribución de amplitud en el plano imagen es

$$U(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\mu, \zeta) e^{i2\pi[x\mu+z\zeta]} d\mu d\zeta. \quad (1.13)$$

De la ecuación (1.13) podemos concluir que para el caso de una fuente puntual la distribución de amplitud compleja en el plano imagen es proporcional a la transformada de Fourier inversa bidimensional de la transmitancia del filtro binario ubicado en el

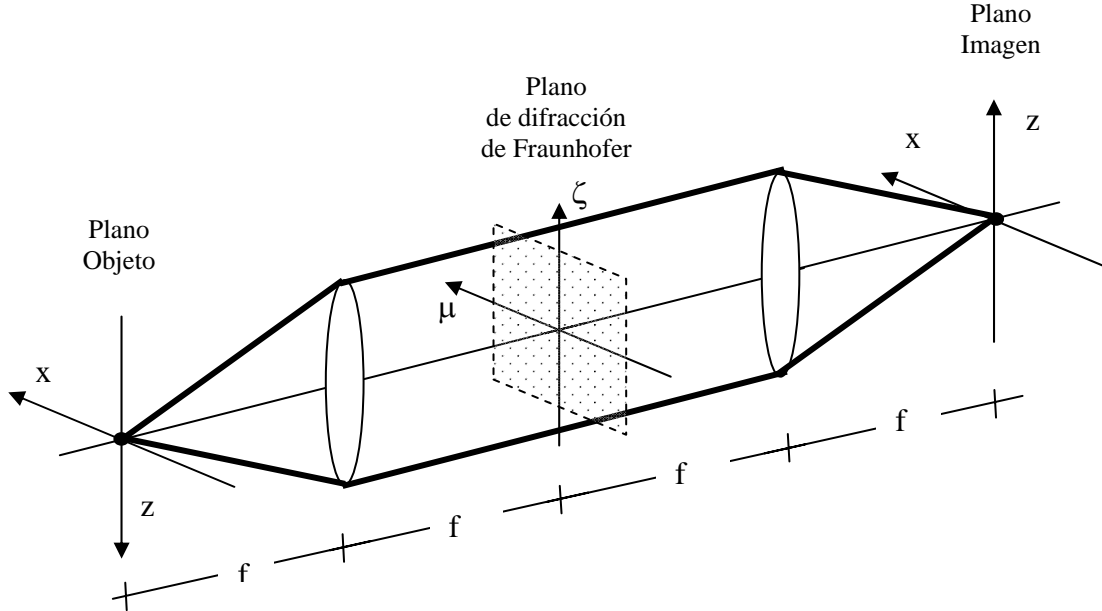


Figura 1.4 Dispositivo óptico con filtro binario transparente.

plano de difracción de Fraunhofer . Es decir, la amplitud compleja en el plano imagen es la "Point Spread Function" PSF[6] del filtro espacial. Este concepto se discute en la sección 1.4

A continuación se considera el caso en que el filtro binario es transparente en todo el plano:

$$\tilde{P}(\mu, \zeta) = 1 . \quad (1.14)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.13)

$$\begin{aligned} U(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi[x\mu+z\zeta]} d\mu d\zeta , \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi x\mu} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi z\zeta} d\zeta , \\ &= \delta(x)\delta(z) . \end{aligned} \quad (1.15)$$

De acuerdo con la ecuación (1.15) se puede concluir que si no existiera el filtro binario en el plano de difracción de Fraunhofer ($\tilde{U}(\mu, \zeta) = \tilde{U}_0(\mu, \zeta)$), se obtendría de nuevo una fuente puntual en el plano imagen; como lo muestra la Figura 1.4.

1.4 PSF y OTF

Si un sistema óptico emplea iluminación que es (coherente temporal) coherente espacial, monocromática entonces es conveniente representar al sistema óptico como un sistema lineal invariante al desplazamiento en amplitud compleja. Haciendo esta consideración este puede describirse mediante su función de respuesta al impulso o *PSF* en amplitud.

Otra forma de describir a los sistemas ópticos es mediante su función de transferencia, la función de transferencia coherente es la transformada de Fourier de la *PSF* en amplitud y es conocida como ATF (Amplitude Transfer Function).

Para el caso de un sistema óptico con iluminación no-coherente en el que en el plano objeto tenemos una fuente puntual la distribución de irradiancia en el plano imagen está descrita por su función de respuesta al impulso no-coherente o *PSF* (Point Spread Function) en irradiancia. La *PSF* en irradiancia es proporcional al módulo al cuadrado de la respuesta al impulso coherente del sistema; la función de transferencia no-coherente está definida como la transformada de Fourier de la *PSF* en irradiancia del sistema y es conocida como la OTF (Optical Transfer Function) del sistema [6].

Referencias

- [1] E. Hecht. "Optics". Editorial: Adison Wesley Longman, Inc. U.S.A., (1998).
- [2] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda and A. Serrano-Heredia, "Trading dimensionality in signal processing", *Optics & laser Technology*, **Vol. 00**, No. 00 (1996).
- [3] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda and A. Serrano-Heredia, "Bessel functions: Parallel display and processing", *Optics Letters*, **19**, No.1, 55-57 (1994).
- [4] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda, and J. Ibarra, "Airy function and Laguerre polynomials : optical display and processing", *Optics Communications*, **109**, 361-367 (1994).
- [5] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda, and C. Frausto, "Optical simulation of free-space propagation", *Optics Communications*, **157**, 7-12 (1998).
- [6] J. W. Goodman. "Introduction to Fourier Optics." Editorial: McGraw-Hill. U.S.A. 101-115, (2004).