CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES GENERALES

6.1 Resumen

Esta última parte tiene como objetivo buscar puntos de convergencia entre los métodos antes usados, así como dar un breve recuento de lo extraído a lo largo de este trabajo. De esta manera, se encuentran semejanzas entre el método que usa Jacobianas y el de integrales para caso de fuerte localización. Se encuentran soluciones periódicas en el rango de amplitudes muy pequeñas para el método de integrales, queriendo con esto, poder hacer comparaciones con el método de perturbaciones.

6.2 Relación entre el método de integrales y el método de la función elíptica de Jacobi para casos de fuerte localización

Tomando en consideración los valores $b = \mp 3$ para el caso de fuerte localización ($m = 1$), procedemos a sustituir los valores de estos parámetros en las ecuaciones (3.31) con $b = +3$ y (3.38) para el cual $b < 0$, con $b = -3$. Las ecuaciones antes encontradas en el capítulo 3, son:

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} b \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{b}{3}} h - \frac{\sqrt{2}}{3} b \text{ ,} \qquad \text{para } E_{\max} . \tag{6.1}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} |b| \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{|b|}{3}} h \text{ ,} \qquad \text{para } E = 0 . \tag{6.2}$$

Y llevan a las soluciones de la tabla 4.1 para las desigualdades de fase positiva y negativa respectivamente.

Éstas cuentan con las expresiones:

Para el máximo de energía:

$$r_1(h) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\operatorname{sech}^2 h - \sqrt{2}\,, \qquad \text{con } b > 0\,. \tag{6.3}$$

Y para un valor nulo de energía, se tiene:

$$r_1(h) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\operatorname{sech}^2 h\,, \qquad \text{con } b < 0\,. \tag{6.4}$$

Ambas soluciones corresponden como ya hemos apuntado en los capítulos tercero y quinto, al caso de solitones.

De esta manera se tiene que las soluciones de tipo solitón mediante el método de la función de elíptica de Jacobi, son un caso especial de solución para un desplazamiento de fase $b = \pm 3$. Siendo estos, los valores extremos del rango que puede tomar el parámetro de desplazamiento de fase, según lo permite la aproximación matemática que se ha seguido en el capitulo anterior. Esto, debido a relación que guardan el módulo m de la función elíptica de Jacobi y el parámetro b.

6.3 Comparación entre los métodos de integrales y de perturbaciones

Para comparar estos métodos, se tiende a considerar el caso de amplitudes pequeñas que ha sido analizado previamente en el caso de perturbaciones y se trata de encontrar la solución para el caso particular de amplitudes pequeñas usando el método de integrales en el caso de desplazamiento de fase positivo.

Empecemos por tratar el caso particular del método de integrales para amplitudes pequeñas: Procedamos a igualar la energía total, a un valor máximo de energía que tiene equivalencia con el potencial (ver ecuaciones 3.10 y 3.12) para el caso especial de una pequeña amplitud que tiene como valor máximo: $r_{\max}$. Esto equivale a un pequeño cambio alrededor del punto de mínimo correspondiente al origen (ver figura 3.2 del capítulo 3):

$$\frac{1}{2}\dot{r}_1^2+\frac{2}{3}b\,r_1^2+\frac{2}{3}\sqrt{2}\,r_1^3=\frac{2}{3}b\,r_{\max}^2+\frac{2}{3}\sqrt{2}\,r_{\max}^3 . \tag{6.5}$$

Despejando el valor de $\dot{r}_1$:

$$\frac{d\,r_1}{dh}=2\sqrt{\frac{b}{3}\left(r_{\max}^2-r_1^2\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}\left(r_{\max}^3-r_1^3\right)} . \tag{6.6}$$

Factorizando dentro del radical y llamando ahora $\tilde{r}_1=r_1/r_{MAX}$ se tiene:

$$\frac{d\,r_1}{dh}=2\sqrt{\frac{b}{3}\,r_{\max}^2\left(1-\tilde{r}_1^2\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}\,r_{\max}^3\left(1-\tilde{r}_1^3\right)} . \tag{6.7}$$

Como una aproximación, se despreciarán los términos de amplitudes de tercer grado, por ser de orden de magnitud muy pequeño. De esta manera, separando variables e integrando:

$$2\int_0^h dh=\int_1^{\tilde{r}_1}\frac{d\,\tilde{r}_1}{\sqrt{b\,(1-\tilde{r}_1^2)/3}} . \tag{6.8}$$

Resolviendo la integral, se obtiene:

$$2h=-\sqrt{\frac{3}{b}}\ \mathrm{Arcsin}\ \tilde{r}_1\Big|_1^{\tilde{r}_1} . \tag{6.9}$$

A partir de esta igualdad podemos despejar el valor de la amplitud normalizada, haciendo uso de relaciones trigonométricas elementales, llegando finalmente al valor:

$$\tilde{r}_1=\cos 2\sqrt{\frac{b}{3}}h . \tag{6.10}$$

O escrito en términos de r_1:

$$r_1=r_{\max}\cos 2\sqrt{\frac{b}{3}}h . \tag{6.11}$$

Este resultado es exactamente igual a aquél descrito en la ecuación (4.25) del capítulo 4, para la aproximación $e \to 0$ y un desplazamiento de fase positivo. Encontrando equivalencia para estos casos particulares entre el método de perturbaciones y el de integrales.

6.4 Comentarios generales a modo de conclusión final

En resumen, en todo este trabajo: se ha encontrado solución a las ecuaciones diferenciales acopladas (2.39) y (2.40) descritas en el capítulo 2 dentro del objetivo que se perseguía. Se encontraron soluciones explícitas analíticas de solitones ópticos cuadráticos espaciales que tienen un perfil de tipo secante hiperbólico cuadrado, mostrando un máximo de intensidad en el centro que corresponde a lo esperado para solitones brillantes en el caso de desplazamiento de fase negativo, y de solitones oscuros, que poseen menor intensidad en el centro, para el caso de desplazamiento de fase positivo, explicados en las conclusiones y resumidos en las tablas 3.2 y 3.3 del capítulo 3 con mayor detalle, así como en el caso particular de solitones con $b = \pm 3$, que se tratan en el capítulo 5 y que resume soluciones en las tablas 5.1 y 5.2 de ese capítulo (ver conclusiones). Estos casos corresponden a los puntos de máxima energía para cada una de las contribuciones del potencial, como se ha mostrado en el segundo capítulo. Es interesante señalar la peculiaridad de los solitones oscuros encontrados, pues muestran también un pequeño pico de intensidad en el centro dentro de un rango de valores de la coordenada transversal. Sin embargo, de manera general, poseen claramente mayor intensidad en los extremos que en el centro, situación que los hace ser catalogados como oscuros.

También se han encontrado soluciones de tipo de ondas armónicas en el rango de amplitudes pequeñas, alrededor de los puntos de mínimo local de la energía potencial para casos de desplazamiento de fase tanto positivo como negativo, lo cual se trató en el tercer capítulo, donde se aborda la solución mediante el método de perturbaciones (ver ecuaciones finales de la amplitud en función de la coordenada transversal, así como las conclusiones de este capitulo).

A su vez se encontraron soluciones mediante el método de la función elíptica de Jacobi, el cual ayuda a generalizar el tipo de funciones tanto trigonométricas, que caracterizan a las ondas armónicas, como hiperbólicas que son típicas de las soluciones de tipo solitón. Se obtuvo una ecuación general de la amplitud en función de la coordenada transversal que involucra al módulo de la función elíptica Jacobiana (ver ecuación (5.15) del capítulo anterior). Además se encontraron los casos para débil localización, los cuales se hallan escritos en la tabla 5.1 del capítulo cuatro.

De este último capítulo, se encuentra coincidencia de solución de solitones $c^{(2)}$ para los métodos de energías y el de la función elíptica Jacobiana para el caso particular de desplazamiento de fase $b = \pm 3$, siendo tres positivo, el valor que resulta ser el máximo para este parámetro según lo permite su relación de dependencia con el módulo de la función elíptica Jacobiana. Por último, en el intento de convergir el método de integrales para el caso particular de pequeñas amplitudes con el de perturbaciones, se logra una exacta coincidencia a una función armónica de tipo cosenoidal para el caso de desplazamientos de fase positivos.

Todas las soluciones encontradas para la amplitud de la frecuencia fundamental, dan solución a aquellas del segundo armónico debido a la sencilla relación de proporcionalidad que existe entre ellas (ecuación (2.43) del punto 2.5 del segundo capítulo).

Normalmente, para terminar, se intenta hacer alusión a la hipótesis, no siendo este el caso, basta mencionar que se ha respondido a las preguntas de investigación planteadas inicialmente (ver 2.4:*Pregunta de investigación*) en el segundo capítulo de la tesis, resolviendo las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del perfil de las funciones de las amplitudes en dependencia de la coordenada transversal normalizada (ver 2.5: *Objetivo*) mediante los distintos métodos que se propusieron (ver 2.6: *Forma de abordar el problema*) para alcanzar el objetivo del presente trabajo de investigación.