

## CAPÍTULO 5

### MÉTODO DE LA FUNCIÓN ELÍPTICA DE JACOBI

#### 5.1 Resumen

Se busca solución a las ecuaciones acopladas que describen los perfiles de onda mediante el método de la función elíptica Jacobiana, el cual nos permite encontrar una solución más general que en los casos anteriores. Esta vez en términos de funciones elípticas Jacobianas Snoidales y Cnoidales, ya que al usar este método se generalizan las funciones hiperbólicas y trigonométricas que fueron solución de los métodos anteriores.

#### 5.2 Objetivo

Partimos de la ecuación diferencial (3.5), la cual incluye de forma integrada a las dos ecuaciones acopladas, mediante el uso de la proporción de los modos normales y que han sido resueltas por dos métodos distintos en los capítulos anteriores. Esta expresión que a continuación describimos posee la forma:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dh^2} + \frac{4}{3} \mathbf{b} \mathbf{r}_1 + 2\sqrt{2} \mathbf{r}_1^2 = 0. \quad (5.1)$$

Se requiere nuevamente resolver esta ecuación diferencial a fin de encontrar una solución más general mediante el método de la función elíptica de Jacobi, que se explicará a continuación y que tiene la ventaja de involucrar también al módulo de las funciones elípticas, que sirve como un parámetro matemático que puede conducir a los casos especiales de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

### 4.5 Generalidades sobre el método de la función elíptica de Jacobi

Este método se emplea con el fin de encontrar soluciones a funciones de onda periódicas a ecuaciones de evolución no lineales. En este caso se emplean las funciones elípticas Jacobianas Snoidal y Cnoidal o llamadas también funciones elípticas  $sn$  y  $cn$  de Jacobi (B).

Tanto el método de la función  $sn$  como el de la función  $cn$ , constituyen una generalización de los métodos de funciones  $\tanh$  y  $\text{sech}$  respectivamente, siendo el primero de estos métodos propuesto por Liu et al. [1] y el segundo, propuesto posteriormente por Fu et al. [2], quien encontró además otros métodos que hacen uso de las funciones elípticas Jacobianas  $dn$  y  $cs$ . El método que se usará para las ecuaciones que nos interesa resolver, busca encontrar soluciones que representen ondas solitarias y se puede describir en este caso de la manera que a continuación describimos [3]:

Si es posible, se procede a integrar la ecuación diferencial ordinaria, obteniéndose una o más constantes de integración. Se toma un *Ansatz*, lo cual corresponde a un polinomio en términos de las funciones  $sn$ :

$$U(\mathbf{h}) = \sum_{i=0}^M a_i \text{sn}^i(k\mathbf{h}|m). \quad (5.2)$$

Se toman las derivadas correspondientes de la función polinomial propuesta al principio, se sustituyen en la ecuación diferencial que se propone resolver, quedando como polinomio de funciones  $\text{sn}^i$ . Esta ecuación se puede escribir para que se tengan coeficientes dependientes de las constantes  $a_i$ , multiplicando cada uno a un  $\text{sn}^i(k\mathbf{h}/m)$  a una potencia  $i$  específica. Estos coeficientes son igualados a cero, lo que lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas que contiene a las constantes:  $a_i$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $m$  y en caso de haberse llevado a cabo la integración,

también a las constantes que resultaron de ella, así como posibles coeficientes de constantes arbitrarias que hayan estado presentes en la ecuación diferencial original. Sólo en el caso de haber una solución real no trivial, la ecuación diferencial original tendrá una forma como la de la ecuación (5.2).

#### 5.4 Resolución mediante el método de la función elíptica de Jacobi

Proponemos una solución de la forma:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{h}) = A \operatorname{sn}^2(\mathbf{h}|m) + B. \quad (5.3)$$

Cuyas derivadas son las siguientes (C38-C40):

$$\dot{\mathbf{r}}_1(\mathbf{h}) = \frac{d\mathbf{r}_1}{d\mathbf{h}} = 2A \operatorname{sn}(\mathbf{h}|m) \operatorname{cn}(\mathbf{h}|m) \operatorname{dn}(\mathbf{h}|m). \quad (5.4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1(\mathbf{h}) = 2A \left[ \operatorname{cn}^2(\mathbf{h}|m) \operatorname{dn}^2(\mathbf{h}|m) - \operatorname{sn}^2(\mathbf{h}|m) \operatorname{dn}^2(\mathbf{h}|m) - m^2 \operatorname{sn}^2(\mathbf{h}|m) \operatorname{cn}^2(\mathbf{h}|m) \right]. \quad (5.5)$$

Usando algunas identidades funcionales de las funciones elípticas de Jacobi (C16) y (C19), esta última ecuación se puede escribir como:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1(\mathbf{h}) = 6Am^2 \operatorname{sn}^4(\mathbf{h}|m) - 4A(m^2 + 1) \operatorname{sn}^2(\mathbf{h}|m) + 2A. \quad (5.6)$$

De esta forma se tiene escrita la expresión en términos de senos elípticos Jacobianos a distintas potencias sin involucrar otras funciones elípticas de Jacobi.

Sustituyendo los valores de las derivadas en la ecuación (5.1), haciendo algunos desarrollos algebraicos a partir de sustituciones y ordenando las funciones  $\operatorname{sn}(\mathbf{h}|m)$  por potencias, se obtiene:

$$\begin{aligned} (6Am^2 + 2\sqrt{2}A^2) \operatorname{sn}^4(\mathbf{h}|m) + \left[ 4\sqrt{2}AB - 4A(m^2 + 1) + \frac{4}{3} \mathbf{b}A \right] \operatorname{sn}^2(\mathbf{h}|m) + \dots \\ \dots + (2A + \frac{4}{3} \mathbf{b}B + 2\sqrt{2}B^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Que tiene la forma:

$$P(A, B)\operatorname{sn}^4(\mathbf{h}|m) + Q(A, B)\operatorname{sn}^2(\mathbf{h}|m) + R(A, B) = 0. \quad (5.8)$$

Con:

$$P(A, B) = 6Am^2 + 2\sqrt{2}A^2 = 0. \quad (5.9)$$

$$Q(A, B) = 4\sqrt{2}AB - 4A(m^2 + 1) + \frac{4}{3}\mathbf{b}A = 0. \quad (5.10)$$

$$R(A, B) = 2\sqrt{2}B^2 + \frac{4}{3}\mathbf{b}B + 2A = 0. \quad (5.11)$$

De  $P(A, B)$  obtenemos:

$$A = -\frac{3\sqrt{2}}{2}m^2. \quad (5.12)$$

A partir de  $Q(A, B)$ , encontramos:

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( m^2 + 1 - \frac{1}{3}\mathbf{b} \right). \quad (5.13)$$

Finalmente, con los valores anteriores y  $R(A, B)$ , se consigue el valor de:

$$\mathbf{b} = \pm 3\sqrt{m^4 - m^2 + 1}. \quad (5.14)$$

Habiendo encontrado los valores de  $A$ ,  $B$  y  $\mathbf{b}$ , es posible obtener una expresión para  $\mathbf{r}_1$ , sustituyendo estos valores en la expresión (5.3) propuesta anteriormente.

Resulta entonces:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{h}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ -3m^2 \operatorname{sn}^2(\mathbf{h}|m) + m^2 + 1 \mp \sqrt{m^4 - m^2 + 1} \right]. \quad (5.15)$$

Y su armónico, posee como solución, la expresión que se encuentra dentro del paréntesis de la ecuación anterior (5.15), lo que equivale a un múltiplo de  $\sqrt{2}$ , de esta última ecuación.

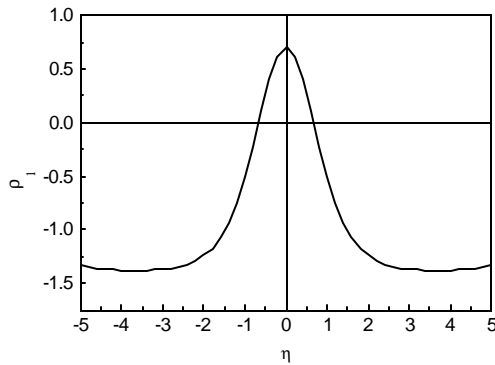
La expresión puede ser escrita también en términos del parámetro de desplazamiento de fase, lo que nos da ventaja para analizar los distintos casos como se ha hecho anteriormente.

Con ayuda de relaciones funcionales (C16), llegamos a:

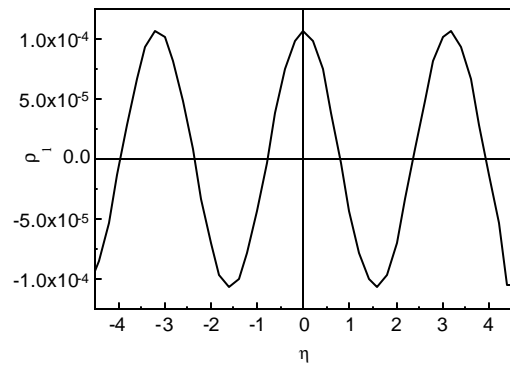
$$r_1(\mathbf{h}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 3m^2 \operatorname{cn}^2(\mathbf{h}|m) - 2m^2 + 1 - \frac{1}{3}\mathbf{b} \right). \quad (5.16)$$

En donde el valor del desplazamiento de fase está dado por la ecuación (5.14).

A continuación se muestra el comportamiento de las gráficas de la ecuación (5.15) para dos casos distintos del módulo de la función elíptica de Jacobi, ambos con un desplazamiento de fase  $\mathbf{b} = 3$  y valores alrededor de los números extremos.



**Figura 5.1:** Gráfica de  $r_1$  para  $m = 0.99$



**Figura 5.2:** Gráfica de  $r_1$  para  $m = 0.01$

Estas gráficas muestran dos casos particulares de módulo de la función elíptica de Jacobi, que están cercanos a los casos extremos que corresponden a fuerte y débil localizaciones.

Cuando el módulo de la función elíptica Jacobiana tiende a cero, se presenta un comportamiento trigonométrico, y cuando el valor del módulo tiende a su máximo valor, que corresponde a la unidad, se convierte en comportamiento hiperbólico.

## 5.5 Análisis de los distintos casos de localización de las amplitudes

### 5.5.1 Caso de fuerte localización para el armónico fundamental

Se desea ahora encontrar el comportamiento de  $r_1(\mathbf{h})$  para el caso de fuerte localización con el fin de encontrar la solución de una onda solitaria [3]. Para esta situación, se toma el límite cuando el módulo de la función amplitud seno tiende a la unidad ( $m \rightarrow 1$ ) de la ecuación (5.15):

$$\lim_{m \rightarrow 1} r_1(\mathbf{h}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \left( -3 \lim_{m \rightarrow 1} m^2 \right) \left( \lim_{m \rightarrow 1} \operatorname{sn}^2(\mathbf{h}|m) \right) + \lim_{m \rightarrow 1} \left( m^2 + 1 \mp \sqrt{m^4 - m^2 + 1} \right) \right]. \quad (5.17)$$

Llevando a cabo los límites (Ver tabla C1 del apéndice C), nos conduce a:

$$\lim_{m \rightarrow 1} r_1(\mathbf{h}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -3 \tanh^2 \mathbf{h} + 2 \mp 1 \right). \quad (5.18)$$

Que se puede simplificar dependiendo de si  $\mathbf{b}$  es positivo o negativo.

De la ecuación (5.14) se extrae el hecho de que los valores de desplazamiento de fase para este caso particular son  $\mathbf{b} = \pm 3$ .

### 5.5.2 Caso de débil localización para el armónico fundamental

En forma similar, si se desea obtener el comportamiento de la función de la amplitud del primer modo:  $r_1(\mathbf{h})$  para el caso de débil localización, se toma el límite a cero del módulo de la función seno elíptico Jacobiano ( $m \rightarrow 0$ ), lo que da por resultado:

$$\lim_{m \rightarrow 0} r_1(\mathbf{h}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \mp 1). \quad (5.19)$$

De manera análoga, se puede llegar a dos soluciones distintas dependiendo del signo de  $\mathbf{b}$ .

Estos resultados se encuentran resumidos en la tabla 5.1 de la siguiente página.

**5.5.3 Soluciones de la amplitud de onda del primer armónico según el signo de  $b$**

Se pueden obtener distintos resultados según sea el signo del desplazamiento de fase, el cual se encuentra implícito en la ecuación (5.15). Mostramos en seguida los resultados:

**Tabla 5.1:** Casos límite de la amplitud del primer armónico.

Desplazamiento de fase	Fuerte localización $m \rightarrow 1$	Débil localización $m \rightarrow 0$
$b > 0$	$r_1(h) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\operatorname{sech}^2 h - \sqrt{2}$	$r_1(h) = 0$
$b < 0$	$r_1(h) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\operatorname{sech}^2 h$	$r_1(h) = \sqrt{2}$

Resumen de los casos especiales de localización según el módulo de la función Jacobiana.

**5.5.4 Casos de fuerte y débil localizaciones para la amplitud del segundo armónico**

Como ha sido el caso en los resultados de los dos anteriores capítulos, para la amplitud del segundo armónico se presentan situaciones que sólo difieren en la proporción de un múltiplo de la raíz de dos.

## 5.6 Casos extremos para fuerte localización según el signo del desplazamiento de fase

### 5.6.1 Casos extremos para fuerte localización del primer armónico

De manera similar que los resultados de perfiles de onda que fueron solucionados mediante energías, se procede a considerar los distintos casos según el signo de  $b$ , los que se muestran en la tabla de abajo.

**Tabla 5.2:** Casos extremos para una fuerte localización atendiendo a  $b$ .

	$r_1(h=0)$	$r_1(h \rightarrow \pm\infty)$	$h(r_1=0)$
$b > 0$	$r_1(h) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$r_1(h) = -\sqrt{2}$	$h = \ln\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$b < 0$	$r_1(h) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$	$r_1(h) = 0$	$h = \pm\infty$

Resumen de los perfiles de onda del primer armónico según el signo de desigualdad de fase.

### 5.6.2 Casos extremos para fuerte localización del segundo armónico.

Similarmente a los demás casos de la amplitud del segundo armónico, teniendo las soluciones para la amplitud del armónico fundamental, sólo basta multiplicar la amplitud  $r_1$  por  $\sqrt{2}$  con el fin de obtener las soluciones de  $r_2$ .



## 5.7 Conclusiones

Se encontró solución en términos de funciones elípticas de Jacobi y el módulo de éstas, a la ecuación (5.1) que involucra las dos ecuaciones acopladas de las amplitudes de los armónicos, la cual cuenta con la ventaja de poder generalizar tanto funciones de tipo armónico, que se expresan comúnmente en términos de funciones senoidales y cosenoidales como funciones de tipo hiperbólico que resultan de interés por ser funciones que pueden representar el comportamiento de solitones. Esto se puede notar en las gráficas 5.1 y 5.2, en las que un módulo de la función elíptica de Jacobi  $m \rightarrow 0$  conduce a funciones trigonométricas y a medida que  $m \rightarrow 1$  se obtienen soluciones de tipo hiperbólico. Se obtuvieron solitones a partir de la ecuación antes mencionada, pues se encontraron soluciones localizadas y acotadas tales que a medida que la coordenada transversal normalizada tiende a infinito (positivo y negativo), la función de la amplitud tiende a un valor constante, situación presentada anteriormente en el caso de solución mediante integrales y que mostramos en la tabla 5.2 referente a los casos extremos para fuerte localización. Este es el caso de fuerte localización ( $m \rightarrow 1$ ) con desplazamiento de fase tanto positivo como negativo, exceptuando el valor  $b = 0$  por ser un caso fuera de consideración, según se vio en el capítulo 3 cuando se abordó la solución por medio de integrales. Se encontraron valores extremos y cotas para este caso, mismos que se encuentran resumidos en la tabla 5.2 de este capítulo. En las conclusiones finales se mostrarán las similitudes entre los distintos métodos, dónde se hará presente la coincidencia entre las soluciones de solitones encontradas en este capítulo y el tercero.