

CAPÍTULO 4

MÉTODO DE PERTURBACIONES

4.1 Resumen

Se encuentra solución analítica a la ecuación diferencial (3.5) del perfil de ondas en términos de las amplitudes de los armónicos, que resulta de las ecuaciones acopladas, y cuyas amplitudes de los armónicos se hallan en proporcionalidad. Para esto, se usa un método de perturbaciones que intenta encontrar solución alrededor los puntos de mínimo local del potencial (fig 3.2 y 3.3 del capítulo 3). Se encuentran las funciones de las amplitudes $r(\mathbf{h})$ según sea el signo del desplazamiento de fase \mathbf{b} , describiéndose la formación de ondas ópticas espaciales estacionarias que posean un comportamiento armónico.

4.2 Objetivo

Encontrar la solución de la ecuación diferencial que resulta de la relación de las ecuaciones de perfiles de los armónicos de bombeo y secundario, mediante el método de perturbaciones, tomando en cuenta la proporción $r_2(\mathbf{h}) = \mathbf{a}r_1(\mathbf{h})$ y la condición de periodicidad $r_1(\mathbf{h}) = r_1(\mathbf{h} + H)$ descritas anteriormente. Además se requiere de un valor máximo de amplitud de armónico fundamental tal que $\max|r_1| \ll 1$. Rescribamos la ecuación (3.5) del capítulo anterior como:

$$\frac{d^2 r_1}{dh^2} + \frac{4}{3} \mathbf{b} r_1 + \frac{4}{\sqrt{2}} r_1^2 = 0. \quad (4.1)$$

En este caso se desean encontrar soluciones de tipo oscilatorio alrededor de los puntos mínimos de los pozos para cada una de las contribuciones del potencial halladas en el capítulo anterior (figuras 3.2. y 3.3 del tercer capítulo).

Para esto se toma en cuenta un parámetro e tal que cumpla con la restricción:

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \ll 1. \quad (4.2)$$

Esto último, asegura la existencia de una pequeña perturbación.

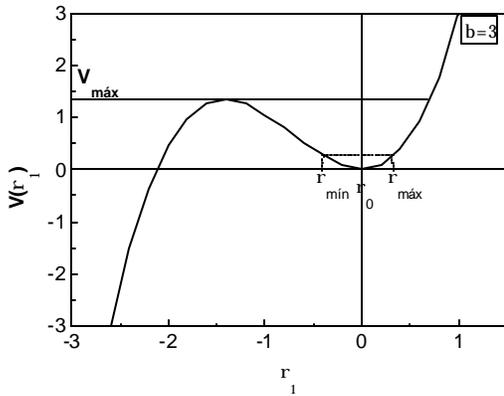


Figura 4.1: Potencial en función de la amplitud para $b > 0$

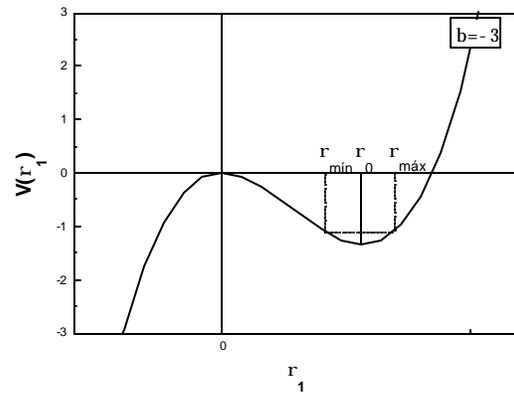


Figura 4.2: Potencial en función de la amplitud para $b < 0$

Las figuras 4.1 y 4.2 son las gráficas correspondientes a las contribuciones del potencial para los casos de un desplazamiento de fase positivo ($b > 0$) y negativo ($b < 0$) respectivamente. En ambas, se señalan r_{\min} y r_{\max} , las cuales equivalen al rango de variación alrededor de la abscisa r_0 del punto de mínimo local.

4.3 Generalidades del método de perturbaciones

El esquema general de este método específico de perturbaciones en la frontera busca hacer uso de un parámetro de perturbación, el cual podría aparecer en las condiciones de frontera, por ejemplo una ϵ positiva, tal que $\epsilon \ll 1$. Supongamos que una ecuación diferencial posee la forma siguiente:

$$Lu + \epsilon Nu = 0. \quad (4.3)$$

En donde L es un operador diferencial ordinario y N es un operador lineal o no lineal que hace la ecuación difícil de solucionar, y se conoce la solución de la ecuación homogénea $Lu = 0$; Se procede por considerar que u puede ser escrita, mediante una expansión en series en términos de potencias de ϵ , de la siguiente manera:

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n. \quad (4.4)$$

De tal forma que al hacer la sustitución de u en términos de su expansión, se obtiene:

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n\right) + \epsilon N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n\right) = 0. \quad (4.5)$$

Si se asume que u_0 satisface las condiciones preescritas y que u_n , $n \neq 0$, satisface las condiciones homogéneas, se puede obtener un sistema de ecuaciones diferenciales comparando las distintas potencias de ϵ [1]. La ecuación diferencial en u_n dependerá sólo de u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , lo que nos permite ir encontrando mejores aproximaciones de manera sucesiva, es decir, se van encontrando las soluciones empezando por la primera aproximación u_0 , la cual satisface las condiciones de frontera y la ecuación homogénea $Lu = 0$, la segunda aproximación es entonces u_1 , que satisface la ecuación:

$$Lu_1 + \epsilon Nu_0 = 0, \quad (4.6)$$

y las condiciones de frontera. Los términos de las soluciones del problema homogéneo para las distintas aproximaciones, llamados términos seculares son eliminados [3] en el proceso, el cual continúa hasta llegar a una solución u_i , que complete el grado de precisión que se requiera. Finalmente es posible escribir la solución completa como la suma de las soluciones de las aproximaciones anteriores según la expresión (4.4).

4.4 Resolución mediante el método de perturbaciones

Se requiere encontrar una solución a la ecuación (3.1) en torno al punto \mathbf{r}_0 , el cual señalamos en las gráficas de las figuras 4.1 y 4.2. Para ese fin necesitamos una amplitud $\mathbf{r}_1(\mathbf{h})$ cuyo valor máximo satisfaga: $|\mathbf{r}_1| \ll 1$, lo que asegura valores cercanos al punto que hace mínimo el potencial. Cumpliéndose este requerimiento, se tiene $\mathbf{r}_{\max} \approx \mathbf{r}_{\min} \ll 1$, lo que implica una aproximación parabólica para cada una de las contribuciones del potencial. El potencial de interés ahora es $V_{\min} < V \ll V_{\max}$.

Es necesario escribir la ecuación (4.1) en términos de una nueva función amplitud renormalizada $\tilde{\mathbf{r}}_1$, que tome en consideración una amplitud máxima tal que: $|\mathbf{r}_{\max}| \ll 1$ y que permita trabajar a la vez con un parámetro menor a la unidad que pueda ser usado como perturbación, además de ser indispensable para poder hacer aproximaciones y comparaciones de magnitudes [2].

Con la nueva amplitud: $\tilde{\mathbf{r}}_1 = [\mathbf{r}_1(\mathbf{h}) - \mathbf{r}_0] / \mathbf{r}_{\max}$, es posible sustituir el valor de la amplitud \mathbf{r}_1 en la ecuación (4.1) con los puntos $\mathbf{r}_0 = 0$ para el caso $\mathbf{b} > 0$ y $\mathbf{r}_0 = \sqrt{2}|\mathbf{b}|/3$ para un desplazamiento de fase negativo. Estos puntos fueron encontrados previamente en el capítulo 3 y corresponden a los puntos de mínimo, los cuales llevaron a las ecuaciones

(3.15) y (3.20). El resultado de la sustitución que considera la nueva amplitud $\tilde{\mathbf{r}}_1$, nos lleva en ambos casos a la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1}{dh^2} + \frac{4}{3} |\mathbf{b}| \tilde{\mathbf{r}}_1 + 4\mathbf{e} \tilde{\mathbf{r}}_1^2 = 0. \quad (4.7)$$

En donde se tiene: $\mathbf{e} = \mathbf{r}_{\max} / \sqrt{2}$ y se ha escrito el valor absoluto del desplazamiento de fase como $|\mathbf{b}|$, a fin de poder escribir las 2 ecuaciones para los dos casos de desplazamiento de fase, en una sola. Siendo $\mathbf{e} \ll 1$ y positivo, se puede hacer una expansión de $\tilde{\mathbf{r}}_1$ en potencias del parámetro \mathbf{e} :

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{e}^n \tilde{\mathbf{r}}_1^{(n)} = \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} + \mathbf{e} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} + \mathbf{e}^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)} + \dots \quad (4.8)$$

Es posible hacer una aproximación tomando los primeros tres términos de la serie, lo cual corresponde hasta una aproximación parabólica, se procede a la sustitución de esta expansión de \mathbf{r}_1 en la ecuación (4.7):

$$\frac{d^2}{dh^2} (\tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} + \mathbf{e} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} + \mathbf{e}^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)}) + \frac{4}{3} |\mathbf{b}| (\tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} + \mathbf{e} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} + \mathbf{e}^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)}) + 4\mathbf{e} (\tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} + \mathbf{e} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} + \mathbf{e}^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)})^2 = 0. \quad (4.9)$$

Desarrollando la ecuación y acomodando los términos, se obtiene el polinomio que involucra distintas potencias del parámetro \mathbf{e} :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)}}{dh^2} + \mathbf{e} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)}}{dh^2} + \mathbf{e}^2 \frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)}}{dh^2} + \frac{4}{3} |\mathbf{b}| \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} + \frac{4}{3} \mathbf{e} |\mathbf{b}| \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} + \frac{4}{3} \mathbf{e}^2 |\mathbf{b}| \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)} + 4\mathbf{e} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)2} + 8\mathbf{e}^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} + \\ + 4\mathbf{e}^3 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)2} + 8\mathbf{e}^3 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)} + 8\mathbf{e}^4 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)} + 4\mathbf{e}^5 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)2} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se ordena conforme a las distintas potencias de \mathbf{e} , y como una aproximación, omitiendo las \mathbf{e}^n , para las cuales $n > 2$

$$\mathbf{e}^0 \quad \frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)}}{dh^2} + \frac{4}{3} |\mathbf{b}| \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} = 0. \quad (4.11)$$

$$\mathbf{e}) \quad \frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)}}{dh^2} + \frac{4}{3} |\mathbf{b}| \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} + 4\tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)2} = 0. \quad (4.12)$$

$$\mathbf{e}^2) \quad \frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)}}{dh^2} + \frac{4}{3} |\mathbf{b}| \tilde{\mathbf{r}}_1^{(2)} + 8\tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} = 0. \quad (4.13)$$

Los demás términos que involucran a \mathbf{e} con una potencia $n > 2$, pueden ser despreciados por ser $\mathbf{e}^n \ll 1$.

4.4.1 Solución de la amplitud normalizada como primera aproximación

Resolviendo primero la ecuación diferencial (4.11):

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)}}{dh^2} + \mathbf{w}_0^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)} = 0, \quad \text{con} \quad \mathbf{w}_0^2 = \frac{4}{3} |\mathbf{b}|. \quad (4.14)$$

Ésta ecuación tiene como una solución particular la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)}(\mathbf{h}) = c_1 \cos(\mathbf{w}_0 \mathbf{h}), \quad \text{con} \quad \mathbf{w}_0 = 2\sqrt{\frac{|\mathbf{b}|}{3}}. \quad (4.15)$$

Solución en la cual el desplazamiento de fase posee un valor positivo, ya que deseamos encontrar de funciones armónicas alrededor del punto de mínimo local del potencial.

4.4.2 Solución de la amplitud normalizada como segunda aproximación

Se tomará en cuenta sólo hasta la segunda aproximación para hallar la solución requerida.

Sustituyendo este último resultado en la ecuación (4.12), obtenemos:

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)}}{dh^2} + \mathbf{w}_0^2 \tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)} = -4c_1^2 \cos^2(\mathbf{w}_0 \mathbf{h}). \quad (4.16)$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver, considerando soluciones de una ecuación diferencial homogénea y una ecuación diferencial particular. Sin embargo, considerando que en este método perturbativo para oscilaciones en sistemas no lineales, el principio de superposición de soluciones no es aplicable [3], se procede a tomar únicamente la solución particular que posee la forma:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{1p}^{(1)} = C \cos 2\mathbf{w}_0 \mathbf{h} + D. \quad (4.17)$$

Donde las constantes son: $C = \frac{2c_1^2}{3\mathbf{w}_0^2}$ y $D = -\frac{2c_1^2}{\mathbf{w}_0^2}$.

Ahora basta tomar sólo la suma de las dos soluciones $\tilde{\mathbf{r}}_1^{(0)}$ y $\tilde{\mathbf{r}}_1^{(1)}$ con sus términos perturbadores para llegar a:

$$\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{h}) = c_1 \cos(\mathbf{w}_0 \mathbf{h}) + \mathbf{e} \left[\frac{2c_1^2}{3\mathbf{w}_0^2} \cos(2\mathbf{w}_0 \mathbf{h}) - \frac{2c_1^2}{\mathbf{w}_0^2} \right]. \quad (4.18)$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales siguientes:

$$\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{h} = 0) = 1, \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1(\mathbf{h} = 0) = 0. \quad (4.19)$$

Se obtiene el valor de la constante:

$$c_1 = \frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{e}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mathbf{e}}{|\mathbf{b}|}} \right]. \quad (4.20)$$

Con ayuda del teorema del binomio (A33), se puede aproximar el radical de esta última expresión, llevándonos a un valor significativo únicamente cuando se toma el signo negativo en la ecuación (4.20). Así, la constante $c_1 \approx 1$, y al ser sustituida en la ecuación (4.18) da como resultado:

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \cos \mathbf{w}_0 \mathbf{h} + \frac{2\mathbf{e}}{3\mathbf{w}_0^2} \cos 2\mathbf{w}_0 \mathbf{h} - \frac{2\mathbf{e}}{\mathbf{w}_0^2}. \quad (4.21)$$

Esta expresión muestra la existencia de un frecuencia simple y una del doble.

Sustituyendo los valores de \mathbf{w}_0 y \mathbf{e} , esta última ecuación se puede escribir como:

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \cos 2\sqrt{\frac{|\mathbf{b}|}{3}} \mathbf{h} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\mathbf{r}_{\max}}{|\mathbf{b}|} \cos 4\sqrt{\frac{|\mathbf{b}|}{3}} \mathbf{h} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{\mathbf{r}_{\max}}{|\mathbf{b}|}. \quad (4.22)$$

Cuando el parámetro $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene, a partir de la ecuación (4.21):

$$\tilde{r}_1 = \cos w_0 h = \cos 2\sqrt{\frac{|b|}{3}} h. \quad (4.23)$$

Resultado que muestra la situación de una típica onda armónica de forma cosenoidal.

Una vez encontradas estas soluciones es necesario volver a expresarlas en términos de la amplitud $r_1(h)$, a fin de poder diferenciar los distintos casos para desplazamientos de fase.

Tenemos haciendo uso de la relación $\tilde{r}_1 = [r_1(h) - r_0]/r_{\max}$ las siguiente relaciones:

Para desplazamiento de fase positivo ($b > 0$):

$$r_1(h) = r_{\max} \cos 2\sqrt{\frac{|b|}{3}} h + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{r_{\max}^2}{|b|} \cos 4\sqrt{\frac{|b|}{3}} h - \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{r_{\max}^2}{|b|}. \quad (4.24)$$

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene:

$$r_1(h) = r_{\max} \cos 2\sqrt{\frac{|b|}{3}} h. \quad (4.25)$$

Para desplazamiento de fase negativo:

$$r_1(h) = r_{\max} \cos 2\sqrt{\frac{|b|}{3}} h + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{r_{\max}^2}{|b|} \cos 4\sqrt{\frac{|b|}{3}} h - \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{r_{\max}^2}{|b|} + \frac{\sqrt{2}}{3} |b|. \quad (4.26)$$

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$:

$$r_1(h) = r_{\max} \cos 2\sqrt{\frac{|b|}{3}} h + \frac{\sqrt{2}}{3} |b|. \quad (4.27)$$

Como se observa, para ambos casos del parámetro b , las funciones poseen una periodicidad equivalente, difiriendo solamente en un desplazamiento en el eje de la amplitud.

4.5 Conclusiones

Con este método de perturbaciones, no se buscaban soluciones de solitones, sino de ondas armónicas, de las cuales se encontró solución. Para desplazamientos de fase tanto positivos como negativos se encuentra una solución oscilatoria en términos de cosenos. Para $\mathbf{b} > 0$ la función coseno se encuentra oscilando alrededor de una función de amplitud $\mathbf{r}(\mathbf{h}) = 0$; esto trae por consecuencia un contraste unitario entre las intensidad de luz. En el caso de $\mathbf{b} < 0$, la función coseno se encuentra desplazada, oscilando alrededor de $\mathbf{r}(\mathbf{h}) = \sqrt{2}|\mathbf{b}|/3$, lo que implica que habrá puntos de mayor intensidad que en el caso anterior en algunas regiones de la coordenada transversal normalizada, sin embargo habrá menor contraste entre las intensidades luminosas. A partir de la ecuación (4.21) se puede observar que la amplitud depende, no sólo de una frecuencia $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 = 2\sqrt{\mathbf{b}/3}$, sino también de una frecuencia $\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{w}_0 = 4\sqrt{\mathbf{b}/3}$. Resultados en los que se hace patente la presencia del doblado de frecuencia, debido a que estamos tratando con un caso que involucra la formación de segundo armónico. En el siguiente capítulo se buscan soluciones que tengan como característica, la de integrar tanto soluciones de tipo solitón, dadas comúnmente por funciones como secante hiperbólica como aquellas para ondas armónicas, expresadas mediante funciones trigonométricas de tipo senoidal o cosenoidal.