

CAPITULO 3

MÉTODO DE RESOLUCIÓN MEDIANTE INTEGRALES

3.1 Resumen

En este capítulo se encuentra solución analítica mediante el método de separación de variables a una ecuación que resulta de las ecuaciones diferenciales acopladas descritas en el capítulo 1 como consecuencia de la relación de proporcionalidad entre los armónicos fundamental y secundario. Se encuentran los valores de las amplitudes y de una cantidad física conservativa, en términos de la coordenada transversal normalizada \mathbf{h} , poniendo atención al signo de desplazamiento de fase \mathbf{b} . Finalmente se describe la formación de solitones ópticos espaciales.

3.2 Objetivo

Se desean encontrar los valores de cantidades físicas conservativas, las cuales por analogía con el oscilador armónico se les llamará energías potencial y cinética, así como las expresiones para las funciones de distribución de las amplitudes $\mathbf{r}_1(\mathbf{h})$ y $\mathbf{r}_2(\mathbf{h})$, las cuales se hayan relacionadas por $\mathbf{r}_2(\mathbf{h}) = \mathbf{a}\mathbf{r}_1(\mathbf{h})$. A partir de esta sustitución en las ecuaciones (2.39) y (2.40) descritas en el capítulo anterior, se obtiene:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{d\mathbf{h}^2} - 2b_1 \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{a}\mathbf{r}_1^2 = 0. \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{d\mathbf{h}^2} - 4(\mathbf{b} + 2b_1)\mathbf{r}_1 + \frac{4}{\mathbf{a}}\mathbf{r}_1^2 = 0. \quad (3.2)$$

Igualando los valores de los coeficientes:

$$4\mathbf{b} + 8b_1 = 2b_1 \quad \rightarrow \quad b_1 = -\frac{2}{3}\mathbf{b}. \quad (3.3)$$

$$2\mathbf{a} = \frac{4}{\mathbf{a}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = \sqrt{2}. \quad (3.4)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.1), obtenemos:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{d\mathbf{h}^2} + \frac{4}{3} \mathbf{b} \mathbf{r}_1 + 2\sqrt{2} \mathbf{r}_1^2 = 0. \quad (3.5)$$

Es esta ecuación diferencial en términos de \mathbf{r}_1 y con condiciones de periodicidad:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{h}) = \mathbf{r}_1(\mathbf{h} + H), \quad (3.6)$$

la que se procede a solucionar, una vez encontrado el valor del parámetro \mathbf{a} . A fin de obtener soluciones de solitones, se debe tener el valor del período espacial $H \rightarrow \infty$.

3.3 Ecuaciones del potencial a partir de la resolución mediante el método de integrales y energías

A fin de obtener una solución explícita de la amplitud, la cual se trata en la sección 2.4 de este capítulo, es importante reducir el orden de la ecuación (3.5), lo cual permite encontrar otras magnitudes físicas de interés de estudio.

Antes de otra cosa, rescribamos nuevamente la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{4}{3} \mathbf{b} \mathbf{r}_1 + 2\sqrt{2} \mathbf{r}_1^2 = 0. \quad (3.7)$$

Donde abreviamos las derivadas: $\dot{\mathbf{r}}_1 \equiv d\mathbf{r}_1/d\mathbf{h}$ y $\ddot{\mathbf{r}}_1 \equiv d\dot{\mathbf{r}}_1/d\mathbf{h} \equiv d^2 \mathbf{r}_1/d\mathbf{h}^2$.

Multiplicando la ecuación por $\dot{\mathbf{r}}_1$ se convierte en:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{4}{3} \mathbf{b} \mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + 2\sqrt{2} \mathbf{r}_1^2 \dot{\mathbf{r}}_1 = 0. \quad (3.8)$$

Que puede ser expresada en términos de la derivada de una ecuación como:

$$\frac{d}{d\mathbf{h}} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{2}{3} \mathbf{b} \mathbf{r}_1^2 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \mathbf{r}_1^3 \right] = 0. \quad (3.9)$$

Esto último implica que:

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{2}{3} \mathbf{b} \mathbf{r}_1^2 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \mathbf{r}_1^3 = cte . \quad (3.10)$$

Esta última ecuación da cuenta de que existe una cantidad física conservativa. En analogía con el oscilador armónico, sirve de conveniencia llamar a éstas magnitudes como energías; hecho que permite un mejor análisis del comportamiento del fenómeno.

Las siguientes condiciones son aplicables a la ecuación (3.10):

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{h} = 0) = \mathbf{r}_{\max} , \quad \dot{\mathbf{r}}_1(\mathbf{h} = 0) = 0 . \quad (3.11)$$

Llevando a una contribución que no involucra el término de la derivada de la amplitud:

$$\frac{2}{3} \mathbf{b} \mathbf{r}_{\max}^2 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \mathbf{r}_{\max}^3 = cte . \quad (3.12)$$

Con estas consideraciones, se puede identificar la forma de la ecuación de la conservación de la energía: $E = K + V$ con:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 \quad \text{y} \quad V = \frac{2}{3} \mathbf{b} \mathbf{r}_1^2 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \mathbf{r}_1^3 . \quad (3.13)$$

En donde la constante tiene el análogo con la energía total E , K con la energía cinética y V con la energía potencial.

En lo sucesivo, se hará referencia a estas magnitudes físicas con los nombres de las energías, sabiendo que de manera estricta estas cantidades no son una energía cinética y una energía potencial.

3.3.1 Energía Potencial según el desplazamiento de fase

Procede ahora analizar cada una de las contribuciones de la energía potencial. Las ecuaciones que describen el potencial, según el signo del parámetro de desplazamiento de fase, son:

$$V(r_1) = \frac{2}{3} b r_1^2 + \frac{2}{3} \sqrt{2} r_1^3, \quad \text{para } b > 0. \quad (3.14)$$

$$V(r_1) = \frac{2}{3} \sqrt{2} r_1^3, \quad \text{para } b = 0. \quad (3.15)$$

$$V(r_1) = -\frac{2}{3} |b| r_1^2 + \frac{2}{3} \sqrt{2} r_1^3, \quad \text{para } b < 0. \quad (3.16)$$

Y posee los siguientes comportamientos sujetos a los valores de b :

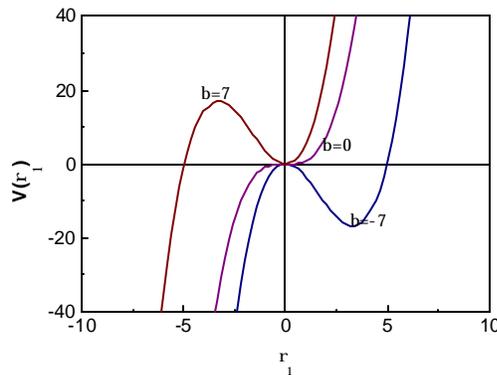


Figura 3.1: Potenciales según el signo de b

La figura 3.1 muestra un potencial correspondiente a un polinomio de tercer grado, cuyos mínimos corresponden a puntos de equilibrio y cuyos valores mayores de energía sólo pueden ser aquellos correspondientes a los máximos locales del potencial.

Las curvas muestran una cierta asimetría, pudiendo presentar soluciones periódicas alrededor de los puntos de mínimos locales, situación que presentamos en el capítulo 4, así como soluciones de solitones para los niveles del potencial correspondientes a los máximos locales.

3.3.2 Análisis del potencial según parámetro de desplazamiento de fase

A partir de la ecuación que describe el potencial en términos de la amplitud del armónico fundamental (3.11), se procede a aplicar el método de máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada, obteniendo:

Para desplazamiento de fase positivo ($\mathbf{b} > 0$):

$$\text{Mínimo en } \mathbf{r}_1 = 0, \quad \text{con: } V(\mathbf{r}_1 = 0) = 0. \quad (3.17)$$

$$\text{Máximo en } \mathbf{r}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{b}, \quad \text{con: } V\left(\mathbf{r}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{b}\right) = \frac{4}{81}\mathbf{b}^3. \quad (3.18)$$

Es de notar que los valores de la energía total que puede tomar el sistema para el potencial descrito por (3.14) van desde un valor mínimo $E_{\min} = 0$, hasta un valor máximo:

$$E_{\max} = \frac{4}{3}\left(\frac{\mathbf{b}}{3}\right)^3. \quad (3.19)$$

Ahora, obtengamos el valor de la otra abscisa para el cual el valor del potencial V tiene un valor igual al máximo.

$$V(\mathbf{r}_1) = \frac{2}{3}\mathbf{b}\mathbf{r}_1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\mathbf{r}_1^3 = \frac{4}{81}\mathbf{b}^3. \quad (3.20)$$

Ésta, es una ecuación de tercer grado, de la cual extraemos las siguientes raíces:

$$\mathbf{r}_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{6}\mathbf{b}. \quad (3.21)$$

Siendo la primera de ellas \mathbf{r}_{\min} , una doble raíz. Dichos valores numéricos se señalan en la siguiente página(ver figura 3.2).

El potencial, toma la siguiente forma:

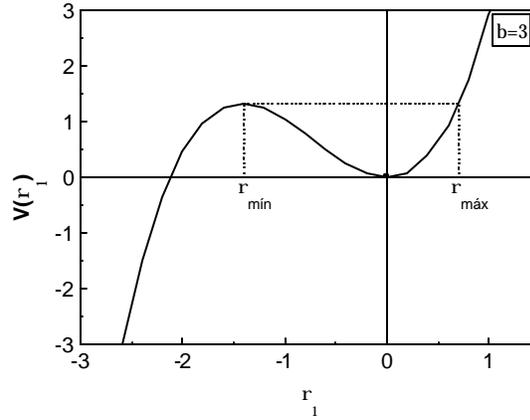


Figura 3.2: Potencial para desplazamiento de fase positivo

La curva anterior muestra un potencial cuyo máximo local corresponde al nivel para el cual se buscan soluciones de solitones, así como el punto más bajo que es el origen, y que corresponde al mínimo local.

En ausencia de desplazamiento de fase ($\mathbf{b} = 0$), la función no presenta un pozo de potencial, pues presenta una pendiente horizontal en el origen. Este tipo de comportamiento, carente de máximos y mínimos trae como consecuencia la inexistencia de soluciones periódicas.

Para un desplazamiento de fase negativo ($\mathbf{b} < 0$), se tiene:

$$\text{Mínimo en } r_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} |\mathbf{b}|, \quad \text{con: } V\left(r_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} |\mathbf{b}|\right) = -\frac{4}{81} \mathbf{b}^3. \quad (3.22)$$

$$\text{Máximo en } r_1 = 0, \quad \text{con: } V(r_1 = 0) = 0. \quad (3.23)$$

De manera análoga que el caso de desplazamiento de fase positivo, encontramos el otro punto para el cual el potencial alcanza su máximo valor, el cual corresponde a la otra intersección de la curva con el eje V , para lo cual se debe obtener la ordenada al origen.

Los puntos son así:

$$r_{\min} = 0, \quad r_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} |b|. \quad (3.24)$$

Este último valor de la amplitud es precisamente r_{\max} y la abscisa del origen es r_{\min} como se aprecia abajo en la figura 3.3.

La gráfica para el potencial $b < 0$ se muestra a continuación:

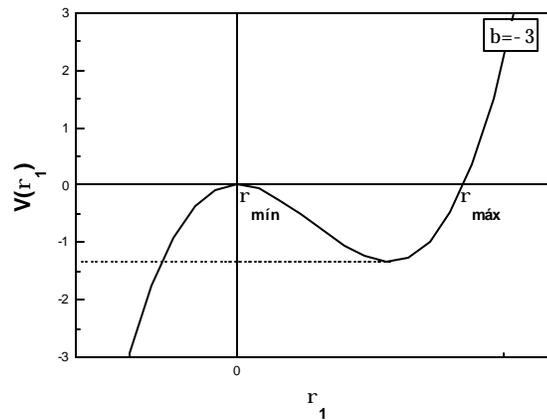


Figura 3.3: Potencial para desplazamiento de fase negativo.

La anterior curva también presenta un máximo y un mínimo, siendo ahora cero el valor correspondiente al máximo local, en contraste con la contribución del potencial para un desplazamiento de fase positivo. Se buscan soluciones de solitones también para este valor del máximo local del potencial.

En la tabla 3.1, la cual se muestra en la página siguiente, se puede observar el intervalo entre las cuales varía la amplitud dentro del pozo según el signo que tome el desplazamiento de fase.

Tabla 3.1: Potencial y amplitud r_1 para valores extremos de $V(r_1)$ según el signo de b .

	$V(r_1)$	$V_{\max-1}(r_1)$	$V_{\min}(r_1)$	$V_{\max-2}(r_1)$
$b > 0$	$V(r_1) = \frac{2}{3}br_1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}r_1^3$	$r_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{3}b$	$r_1 = 0$	$r_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{6}b$
$b = 0$	$V(r_1) = \frac{2}{3}\sqrt{2}r_1^3$	$r_1 = 0$	$r_1 = 0$	$r_1 = 0$
$b < 0$	$V(r_1) = -\frac{2}{3} b r_1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}r_1^3$	$r_{\min} = 0$	$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} b $	$r_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} b $

Resumen de los valores más significativos encontrados que relacionan a V con r_1 .

Dicho rango va desde r_{\min} hasta r_{\max} con sus máximos correspondientes, pasando por un punto r_1 en la cual corresponde un mínimo. En el caso $b = 0$ se indica $r_1 = 0$ y es de notar que no hay ni máximos ni mínimos, lo que implica que no existen soluciones periódicas como se ha apuntado con anterioridad.

3.4 Ecuaciones de las funciones de amplitud para las energías mediante el método de separación de variables

Ahora, se desea buscar una solución de $r(h)$, para valores de energía E en el intervalo:

$$E_{\min} \leq E \leq E_{\max}, \text{ para desplazamientos de fase positivos y negativos.}$$

Procedamos a despejar el valor de \dot{r}_1 de la ecuación de la energía (3.10), con E como constante.

Tenemos así:

$$\dot{r}_1 = \sqrt{2E - \frac{4}{3}\sqrt{2}r_1^3 - \frac{4}{3}br_1^2}. \quad (3.25)$$

Despejando y tomando integrales en ambos lados de la ecuación, llegamos a:

$$\int_{r_{\max}}^{r_1} \frac{dr_1}{\sqrt{E - 2\sqrt{2}r_1^3/3 - 2br_1^2/3}} = \sqrt{2} \int_0^h dh. \quad (3.26)$$

Estas integrales se resolverán para dos casos particulares: Primero para el caso de energía máxima, que corresponde al nivel más alto de los potenciales; señalado con línea discontinua para el caso de $b > 0$ (ver Figura 3.2) y segundo para el valor de $E = 0$, valor máximo del potencial para el caso de un desplazamiento de fase negativo y correspondiente a la línea horizontal del eje r_1 ($V(r_1) = 0$), mostrado en Figura 3.3.

3.4.1 Solución de la ecuación diferencial de la energía para energía máxima

Como esta integral se procederá a resolver para el nivel máximo de energía (ver Fig 3.2), se toma en cuenta el valor máximo de la energía E de la ecuación (3.19). Así, podemos simplificar el polinomio dentro de la raíz a fin de hacer más sencilla la integral. Esta expresión de tercer grado es posible factorizarla como:

$$\frac{4}{3}\sqrt{2}r_1^3 + \frac{4}{3}br_1^2 - 2E = \frac{4}{3}\sqrt{2} \left(r_1 - \frac{\sqrt{2}b}{3} \right) \left(r_1 + \frac{\sqrt{2}b}{3} \right)^2. \quad (3.27)$$

Volviendo a la solución de la ecuación diferencial mediante separación de variables, la integral toma entonces la forma de:

$$\frac{2^{5/4}}{\sqrt{3}} h = \int_{\sqrt{2b}/6}^{r_1} \frac{dr_1}{(r_1 + \sqrt{2b}/3)\sqrt{(-r_1 + \sqrt{2b}/6)}}. \quad (3.28)$$

De esta manera encontramos que la solución a la integral es (A2):

$$\int_{\sqrt{2b/6}}^{r_1} \frac{dr_1}{(r_1 + \sqrt{2b}/3)\sqrt{(-r_1 + \sqrt{2b}/6)}} = \frac{2^{5/4}}{\sqrt{-b}} \text{Arctan} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{b} r_1 - \frac{1}{3}}. \quad (3.29)$$

Igualando el resultado de esta integral, a la anterior integral en términos de h :

$$h = -i \sqrt{\frac{3}{b}} \text{Arctan} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{b} r_1 - \frac{1}{3}}. \quad (3.30)$$

De la cual se puede despejar r_1 en términos de h , con la ayuda de identidades funcionales (A16) y (A10) se llega al resultado siguiente:

$$r_1(h) = \frac{\sqrt{2}}{2} b \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{b}{3} h - \frac{\sqrt{2}}{3} b}. \quad (3.31)$$

Con algunas relaciones funcionales como (A19), la ecuación anterior se convierte en una secante cuadrada en lugar de secante hiperbólica cuadrada, en el caso de diferencia de fase negativa y una equivalencia a cero para una b con valor nulo. La función presenta la típica forma acampanada de una secante hiperbólica cuadrada para la función de amplitud del primer armónico, la cual se haya corrida en el eje r_1 como se mostrará más adelante en la Fig 3.4.

3.4.1.1 Comportamiento de la amplitud de la onda fundamental en los casos límite.

Veamos ahora los distintos valores de la amplitud del armónico fundamental:

Tabla 3.2: Amplitudes según el signo de b , para extremos de h y de r_1 .

E_{\max}	$r_1(h)$	$r_1(h \rightarrow 0)$	$r_1(h \rightarrow \pm\infty)$	$h(r_1 = 0)$
$b > 0$	$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} b \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{b}{3}} h - \frac{\sqrt{2}}{3} b$	$r_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{6} b$	$r_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{3} b$	$h = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{b}} \ln(2 + \sqrt{3})$
$b = 0$	$r_1 = 0$	$r_1 = 0$	$r_1 = 0$	$r_1 = 0$

Resumen de los cálculos para los casos límite de h y de r_1 .

En el caso límite en que la coordenada transversal normalizada h tiende a infinito con cualquiera de sus signos, se obtiene una solución significativa para b positivo, lo que nos conduce a una asíntota horizontal (mostradas en la Figura 3.4 con líneas discontinuas, para cada valor de b). El caso en que $b = 0$, resulta en un comportamiento trivial de poco interés, ya que carecería de cambios en la amplitud, implicando con esto un total ausencia de intensidad luminosa.

Por último se muestran las ordenadas al origen, lo que nos da las intersecciones con el eje h , que poseen la forma:

$$h(r_1 = 0) = \pm \sqrt{\frac{3}{b}} \operatorname{Arctanh} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{b}} \ln(2 + \sqrt{3}), \quad (3.32)$$

y que las representamos como una dependencia de logaritmo natural, haciendo uso de una relación funcional.

Las gráficas de la funciones de la amplitud e intensidad del armónico fundamental son:

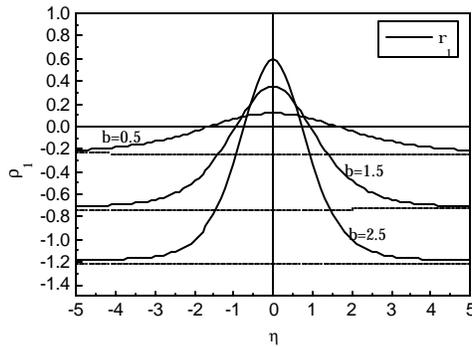


Figura 3.4: Amplitud en función de la coordenada transversal

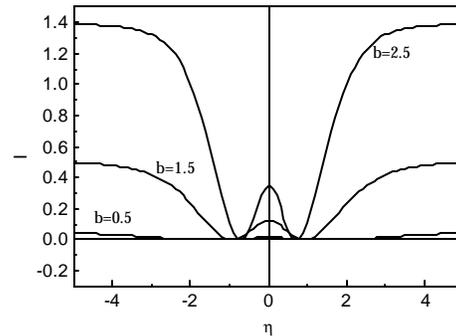


Figura 3.5: Intensidad de luz en función de la coordenada transversal

En la figura 3.4 se nota el comportamiento de secante hiperbólica cuadrada, mostrando las asintotas con líneas discontinuas para distintos valores del desplazamiento de fase. La gráfica de la intensidad luminosa (Fig 3.5), al tener una proporción con el cuadrado de la amplitud, muestra una curva que posee picos de mayor intensidad en el centro, que disminuyen y vuelven nuevamente a incrementarse hasta superar el pico de intensidad central.

3.4.1.2 Comportamiento de la amplitud del segundo armónico para los casos límite.

La amplitud del segundo armónico sólo se diferencia en un múltiplo de $\sqrt{2}$ como se ha venido mostrando y las gráficas de $r_2(h)$ para $b > 0$ y $b \leq 0$, debido a este mismo hecho, poseen un comportamiento similar, cruzándose exactamente en los mismos puntos del eje h .

3.4.2 Solución de la ecuación diferencial de la energía para energía $E=0$

Ahora procedamos obtener una expresión de $r_1(h)$ para el caso en que la energía tiene un valor nulo, el cual corresponde al valor máximo de energía para un desplazamiento de fase negativo como se puede apreciar en la Fig 3.3.

Tomemos la ecuación (3.10) y hagamos nula la constante:

$$\frac{1}{2}\dot{r}_1^2 + \frac{2}{3}br_1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}r_1^3 = 0. \quad (3.33)$$

Despejando el valor de $\dot{r}_1 = dr_1/dh$:

$$\dot{r}_1 = 2ir_1\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}r_1 + \frac{b}{3}}. \quad (3.34)$$

Separado variables e integrando, con $\sqrt{-1} = i$ se tiene:

$$\int_{-\sqrt{2}b/2}^{r_1} \frac{dr_1}{r_1\sqrt{\sqrt{2}r_1 + b}} = 2\sqrt{3}i \int_0^h dh. \quad (3.35)$$

La primera integral posee como solución (A1):

$$\int_{-\sqrt{2}b/2}^{r_1} \frac{dr_1}{r_1\sqrt{\sqrt{2}r_1 + b}} = -2i\sqrt{\frac{3}{b}} \text{Arctan} \sqrt{-\left(\frac{\sqrt{2}}{b}r_1 + 1\right)}. \quad (3.36)$$

Igualando al resultado de la segunda integral cuyo valor es $2\sqrt{3}ih$:

$$-\sqrt{\frac{b}{3}}h = \text{Arctan} \sqrt{-\left(\frac{\sqrt{2}}{b}r_1 + 1\right)}. \quad (3.37)$$

Haciendo uso de algunas relaciones funcionales (A15) y (A3) y tomando en cuenta un desplazamiento de fase negativo, se despeja r_1 :

$$r_1(h) = \frac{\sqrt{2}}{2}|b|\text{sech}^2\sqrt{\frac{|b|}{3}}h. \quad (3.38)$$

Esta es una solución de tipo solitón de manera semejante a la anterior. La función de amplitud presenta otra vez una forma acampanada, típica de secante hiperbólica cuadrada, como se muestra en la figura 3.6 de la siguiente página. En este caso, la función no se encuentra corrida en el eje r_1 .

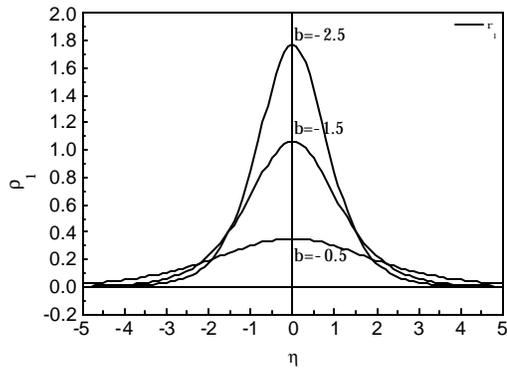


Figura 3.6:Amplitud en función de la coordenada transversal

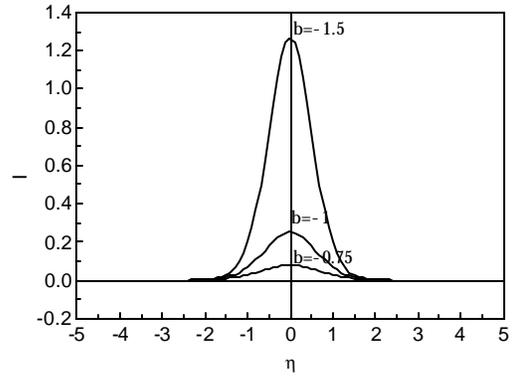


Figura 3.7:Intensidad de luz en función de la coordenada transversal

En la figura 3.6 se observan amplitudes positivas para cualquier desigualdad de fase negativa, notándose las funciones de tipo secante hiperbólica, mientras que la figura 3.7, muestra los picos de intensidad lumínicos para distintas desigualdades de fase, los cuales son más intensos en el centro y disminuyen a medida que la coordenada transversal normalizada se aleja del origen.

3.4.2.1 Casos límite de la función de la amplitud del armónico principal

Como en el caso de energía máxima, se obtiene una tabla para los casos extremos:

Tabla 3.3: Amplitudes según el signo de b , para extremos de h y de r_1 .

$E = 0$	$r_1(h)$	$r_1(h = 0)$	$r_1(h \rightarrow \pm\infty)$	$h(r_1 = 0)$
$b = 0$	$r_1 = 0$	$r_1 = 0$	$r_1 = 0$	$r_1 = 0$
$b < 0$	$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} b \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{ b }{3}} h$	$r_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} b $	$r_{\min} = 0$	$h = \pm\infty$

Resumen de los cálculos para los casos límite de h y de r_1 .

De forma parecida al caso de energía máxima, cuando $h = 0$ se obtienen el valor máximo de r_1 , pero esta vez para un desplazamiento de fase negativo.

En el caso límite en que la coordenada transversal normalizada h tiende a infinito con cualquiera de sus signos, se obtiene una solución significativa para un desplazamiento de fase negativo, lo que nos conduce a la asíntota horizontal que es el eje $h (r_1 = 0)$. Con $b = 0$ es un caso trivial fuera de interés, debido a que no habría cambios en la amplitud, trayendo como consecuencia una total ausencia de intensidad lumínica. Sintetizamos los datos en la tabla 3.3.

3.4.2.2 Comportamiento de la amplitud del segundo armónico para los casos límite

Debido a que a amplitud del segundo armónico sólo cambia en una relación proporcional las gráficas de $r_2(h)$ para cualquier valor de diferencia de fase, poseen un comportamiento similar, cortan el eje h en los mismos puntos.

3.5 Conclusiones

Se pudo encontrar una solución analítica para la ecuación diferencial (3.5), la cual involucra las ecuaciones de los dos armónicos, dando por resultado más general para la función de la amplitud, una secante hiperbólica cuadrada con la coordenada transversal normalizada h como variable independiente. Se halla una cantidad conservativa que se compone de una cantidad física que se eligió llamarla potencial y que posee la forma de un polinomio de tercer grado. Se resumen los valores para los puntos de inflexión de cada una de las contribuciones de los potenciales en la tabla 3.1.

De las tablas que son un resumen de los resultados de las funciones de las amplitudes de los armónicos en términos de la coordenada transversal normalizada (tablas 3.2. y 3.3), se concluye que se tienen soluciones de tipo solitón para valores positivos de

desplazamiento de fase en el caso de energía máxima y para valores negativos de desplazamiento de fase para el caso de energía cero, pues se encuentran soluciones localizadas y acotadas, tales que la función de amplitud tiende a una constante ($r_1(\mathbf{h}) \rightarrow cte$) cuando la coordenada transversal normalizada tiende a sus valores infinitos ($\mathbf{h} \rightarrow \pm\infty$) [1], teniéndose el valor mínimo de amplitud cuando $\mathbf{h} \rightarrow \pm\infty$ y el máximo de amplitud cuando $\mathbf{h} \rightarrow 0$ para los dos casos: $E_{\max} = 4\mathbf{b}^3/81$ y $E=0$, los cuales corresponden a los valores máximos del potencial para $\mathbf{b} > 0$ y $\mathbf{b} < 0$ respectivamente. Se encuentra una solución trivial para el caso de ausencia de desplazamiento de fase ($\mathbf{b} = 0$), la cual no corresponde a una de tipo solitón presentando valores nulos de la amplitud que conducen a la ausencia de intensidad luminosa. Estas conclusiones debido a la proporcionalidad de los armónicos son válidas tanto para las funciones de las amplitudes del armónico fundamental como para la del segundo armónico.

Se concluye que existen solitones de tipo brillantes para el caso de desplazamiento de fase negativa ($E=0$), debido a que poseen mayor intensidad luminosa en el centro y ésta, disminuye conforme se aleja del centro (ver figura 3.7). En el caso de desplazamiento de fase positiva ($E = 4\mathbf{b}^3/81$), se nota la presencia de solitones oscuros, los cuales muestran mayor intensidad luminosa en los extremos que en el centro. Sin embargo, presentan en el centro un pico que posee mayor intensidad que las regiones centrales de la coordenada transversal normalizada (ver figura 3.5). En las conclusiones se mostrará el caso de amplitudes pequeñas, las cuales dan soluciones de ondas periódicas en un rango $E_{\min} < E < E_{\max}$ alrededor de los puntos de mínimo local del potencial (ver figuras 3.2 y 3.3).