CAPÍTULO 2

ECUACIONES PARA ONDAS ÓPTICAS ESPACIALES EN MEDIOS CON NOLINEALIDAD CUADRÁTICA Y OBJETIVO ESPECÍFICO DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 Resumen

En esta parte se tratan de establecer las condiciones del modelo fisicomatemático de estudio, las suposiciones y simplificaciones que se tienen que asumir y sus características, así como mostrar los desarrollos de las ecuaciones que han sido establecidos y que conducen a las dos ecuaciones diferenciales acopladas en términos de las amplitudes de los dos modos fundamental y secundario. Por último y por mucho lo más importante, se establecen: La pregunta de investigación como fundamento, el objetivo de forma más específica que se persigue en esta tesis y cómo se procederá para conseguir dicho fin.

2.2 Características y bases experimentales del modelo

Se trata de estudiar ondas ópticas espaciales periódicas estacionarias unidimensionales en medios con no linealidad cuadrática, las cuales pueden ser: Solitones u ondas armónicas. En el caso de solitones, se les designa: $(1+1)D$, lo que significa que poseen una coordenada longitudinal y sólo una coordenada transversal. El primer número uno en el paréntesis quiere decir que un haz se puede difractar en una dimensión a medida que se propaga en un medio unidimensional [1].

Para el caso a tratar, se consideran haces de luz de ondas continuas que viajan en un medio no lineal cuadrático con carencia de efectos de resonancia y en el cual ocurren efectos de formación de segundo armónico de coincidencia de fase unidimensional. Se trata de establecer las condiciones de coincidencia de fase de tipo I para la propagación de las envolventes, es decir, una situación en la cual ambas ondas de armónicos fundamentales poseen la misma polarización, mientras que la onda del segundo armónico tiene una polarización ortogonal [5], lo que tiende a denominarse como formación de segundo armónico de tipo I. Como caso más simple, se trata de evitar el caso de vectores direccionales de onda con distinta dirección. De esta manera se desea saber el comportamiento a raíz de la interacción entre la onda fundamental y su segundo armónico como consecuencia de la interacción entre señales continuas de ondas ópticas y un medio con no linealidad cuadrática.

2.3 Desarrollo de las ecuaciones diferenciales acopladas de perfiles de onda para el primer y segundo armónicos de ondas ópticas espaciales en medios cuadráticos

Antes de proceder al desarrollo que conduce a las ecuaciones de interés con las que se trabajará posteriormente en los capítulos subsecuentes, es necesario tomar en cuenta las siguientes condiciones y suposiciones:

- Los desarrollos que se hacen de las ecuaciones estarán escritos en el sistema cgs y no se intenta hacer procedimientos tan detallados, para lo que se puede consultar otras fuentes citadas en las referencias bibliográficas.
- Las ondas del armónico fundamental y del segundo armónico se propagan a lo largo del eje z y por hallarse confinados en la dirección transversal x, no se tomará en cuenta esta última coordenada en el desarrollo.
- La escala de longitud es larga comparada con las dimensiones transversales.

- Se tomará la variación transversal de los campos eléctricos únicamente en la dirección y.

2.3.1 Aproximación de envolvente con variación lenta

Se asume lo siguiente:

- Los anchos del espectro de las ondas de los 2 armónicos (fundamental y segundo) son pequeños comparados con los anchos de los espectros sobre los que $k_1(w)$ y $k_2(w)$ varían significativamente, por lo que es válido hacer una expansión de Taylor incompleta para $k_1(w)$ y $k_2(w)$.
- La magnitud y fase de la amplitud de la onda varía lentamente en el espacio sobre una longitud de onda [2]. Estas expresiones se escriben:

$$\left|\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right| << \left|k_1 \frac{\partial A_1}{\partial z}\right| << \left|k_1^2 A_1\right| \quad \text{y} \quad \left|\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right| << \left|k_2 \frac{\partial A_2}{\partial z}\right| << \left|k_2^2 A_2\right|. \tag{2.1}$$

Lo que equivale a considerar que cada una de las envolventes de las ondas, cambian lentamente en la dirección de propagación del haz.

2.3.2 Desarrollo de ecuaciones acopladas de ondas ópticas espaciales

Cuando un campo eléctrico interactúa con un material dieléctrico, en este caso como consecuencia del campo óptico de un haz de LASER, se induce una separación de las cargas de signo contrario que se hayan ligadas, lo que conduce a varios momentos dipolares inducidos que oscilarán rápidamente según sea el campo. La polarización eléctrica se define como:

$$\vec{P} = N\left\langle \vec{m} \right\rangle. \tag{2.2}$$

Que se refiere a un promedio neto de momentos dipolares por unidad de volumen. Donde N es el número de dipolos microscópicos por unidad de volumen y los paréntesis angulares indican el conjunto promedio sobre todos los dipolos en el medio.

La respuesta de la polarización para frecuencias que no produzcan efectos de resonancia, posee la forma [2]:

$$\vec{P}_L = \mathbf{?}^{(1)}\vec{E}\,. \tag{2.3}$$

Donde el factor $c^{(1)}$, también escrito como c constituye una función de respuesta del material ante un campo electromagnético externo impuesto.

Sin embargo, cuando existe un campo de gran magnitud como aquellos producidos por un LASER, aparece otra polarización que se designa por subíndice NL debido a que es una función no lineal del campo aplicado. La cual puede ser representada como:

$$\vec{P} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL}\,. \tag{2.4}$$

En donde el primer término es la polarización lineal y el tensor corresponde a la respuesta dieléctrica lineal. Se asume que no hay magnetización macroscópica del medio dieléctrico y tratando con un medio dieléctrico, consideramos que no hay densidad de corriente.

Teniendo esto en mente, la ecuación que describe la propagación del vector de onda del campo eléctrico tiene la forma [3]:

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{2.5}$$

Que también puede ser escrita como:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}\,. \tag{2.6}$$

En donde se ha utilizado la aproximación para medios homogéneos: $\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$

Con el *Laplaciano* bidimensional con coordenadas y y z.

Consideración que puede ser usada al trabajar con fuentes de ondas continuas.

Con la velocidad de la luz en el vacío representada como c y $\vec{D}$ el vector de desplazamiento eléctrico definido como:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \tag{2.7}$$

Se sustituye (2.7) en (2.5) con (2.4), obteniendo:

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \tag{2.8}$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor dieléctrico lineal [2] con:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}^{(1)}, \qquad \text{con: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}. \tag{2.9}$$

En un medio anisotrópico, es común que el vector del campo eléctrico no es perpendicular al vector de onda, el cual tiene la dirección de propagación. Sin embargo el vector de desplazamiento eléctrico es ortogonal al vector de onda $\vec{k}$ y se define como:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_L + 4\pi\vec{P}_{NL}. \tag{2.10}$$

Si se asume que el vector de desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ tiene contribuciones que son lineales y no lineales cuadráticas, que la contribución no lineal no es tan extrema y que los campos eléctricos son suficientemente débiles en comparación con los campos atómicos internos, se puede hacer una expansión en series de Volterra [4] para describir la relación entre la polarización y el campo eléctrico. Tomando una expansión que tome en cuenta sólo hasta la respuesta no lineal cuadrática, la ecuación (2.10) se puede escribir como:

$$\vec{D} = \vec{E}(z,t) + 4\pi\int_{-\infty}^{t} dt'\boldsymbol{\chi}^{(1)}(t-t')\cdot\vec{E}(z,t') + 4\pi\int_{-\infty}^{t} dt'\int_{-\infty}^{t} dt''\boldsymbol{\chi}^{(2)}(t-t', t-t'')\cdot\vec{E}(z,t')\vec{E}(z,t'') \tag{2.11}$$

Donde $\mathbf{X}^{(j)}$ es el tensor de susceptibilidad de j-ésimo orden y rango $j+1$. Se nota que en la ecuación anterior que el tensor de susceptibilidad es independiente del espacio. Esto último es consecuencia de asumir que la respuesta del material es local en el espacio [5].

El campo óptico, bajo la consideración de que las ondas que interactúan son cuasi-monocromáticas con divergencia angular pequeña, puede ser escrito como:

$$\vec{E}(y,z,t)=\sum_{j=1}^{2}\hat{e}_j E_j(\vec{r},t)+c.c. \;. \qquad j=1,2 \qquad (2.12)$$

Donde los vectores unitarios $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ son los vectores que apuntan en la dirección del campo eléctrico. Cada una de las componentes del campo óptico tiene la forma:

$$E_j(\vec{r},t)=A_j(\vec{r},t)e^{i\vec{k}_j\cdot\vec{r}}e^{-iw_jt} \;. \qquad j=1,2 \qquad (2.13)$$

Donde $\vec{r}$ es el vector de propagación espacial descrito por la expresión:

$$\vec{r}=r(y,z)=y\hat{y}+z\hat{z}\,, \qquad (2.14)$$

$\vec{k}$, el vector de onda que apunta en la dirección de la propagación ésta y cuya longitud de la misma tiene la equivalencia: $l_j = 2p/k_j$. Éste vector está dado por:

$$\vec{k}_j=\vec{k}(y,z)=k_y\hat{y}+k_j\hat{z}\,, \qquad j=1,2 \qquad (2.15)$$

$A_j(\vec{r},t)$ es la amplitud compleja del campo que varía lentamente en el espacio y el tiempo [2], la cual podemos escribir como:

$$A_j(\vec{r},t)=A_j(y-f_jz,z)\,. \qquad j=1,2 \qquad (2.16)$$

Se ha escogido el eje z como la dirección del vector k_j y el eje y estando en el plano definido por los vectores del eje z y el vector de dirección del ángulo de alejamiento f_j, para ángulos positivos $f_j << 1$.

Con esto, se asegura de tomar en consideración que las ondas se pueden propagar en una dirección distinta que los ejes principales del cristal no lineal. Esto último implica que la dirección de la propagación de la energía es distinta que la dirección de la propagación de fase y distintas una de otra.

De manera análoga se puede escribir el vector de desplazamiento eléctrico como:

$$\vec{D}(y,z,t)=\sum_{j=1}^{2}\hat{e}_j D_j(y,z,t)+c.c.\ . \qquad j=1,2 \qquad (2.17)$$

Con:

$$D_j(\vec{r},t)=U_j(\vec{r},t)e^{i\vec{k}_j\cdot\vec{r}}e^{-iw_j t}\ . \qquad j=1,2 \qquad (2.18)$$

Y donde los vectores $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ son los vectores unitarios de polarización como se definió anteriormente, que fueron sustituidos en lugar de vectores unitarios $\hat{d}_1$ y $\hat{d}_2$ debido a la aproximación: $\hat{e}_j \approx \hat{d}_j$ que asume la existencia de una anisotropía débil del medio, considerado que además se han incluido los ángulos de alejamiento f_j [5].

Los números de onda para ambas frecuencias están fijados por las relaciones de dispersión:

$$k_1^2=\frac{w_0^2}{c^2}\tilde{e}_1, \qquad k_2^2=\frac{4w_0^2}{c^2}\tilde{e}_2, \qquad (2.19)$$

Con: $$\tilde{e}_1=1+4p\tilde{c}_1^{(1)} \qquad \text{y} \qquad \tilde{e}_2=1+4p\tilde{c}_2^{(1)}. \qquad (2.20)$$

En donde se ha definido:

$$\tilde{c}_j^{(1)}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\left[\hat{e}_j^{*}\cdot\mathbf{X}^{(1)}\cdot\hat{e}_j\right]e^{iwt}\ . \qquad j=1,2 \qquad (2.21)$$

Que hace uso del hecho de que $\mathbf{X}^{(1)}=0$ para $t<0$ al hacer la integral en el intervalo $(-\infty,\infty)$ [6].

De manera similar se pueden definir también:

$$\tilde{c}_1^{(2)}(2w,-w)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}dt'\left[\hat{e}_1^*\cdot\mathbf{X}^{(2)}(t,t')\cdot\hat{e}_1^*\hat{e}_2\right]e^{2iwt'-iwt}. \qquad (2.22)$$

$$\tilde{c}_2^{(2)}(w,w)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}dt'\left[\hat{e}_2^*\cdot\mathbf{X}^{(2)}(t,t')\cdot\hat{e}_1\hat{e}_1\right]e^{iwt'-iwt}. \qquad (2.23)$$

Donde análogamente: $\mathbf{X}^{(2)}(t,t')=0$ si $t<0$ ó $t'<0$.

De la ecuación (2.11) y las expresiones para campo óptico y vector de desplazamiento, obtenemos:

$$U_1=A_1+4p\tilde{c}_1^{(1)}A_1+8p\tilde{c}_1^{(2)}A_1^*A_2e^{-i\Delta kz}, \qquad U_2=A_2+4p\tilde{c}_2^{(1)}A_2+8p\tilde{c}_2^{(2)}A_1^2e^{i\Delta kz}. \qquad (2.24)$$

En donde:

$$\Delta k=2k_1-k_2. \qquad (2.25)$$

Que pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$U_1=\tilde{e}_1A_1+2\tilde{e}_1^{(2)}A_1^*A_2e^{-i\Delta kz}, \qquad U_2=\tilde{e}_2A_2+2\tilde{e}_2^{(2)}A_1^2e^{i\Delta kz}. \qquad (2.26)$$

Con:

$$\tilde{e}_1^{(2)}=4p\tilde{c}_1^{(2)}(2w_0,-w_0) \quad \text{y} \quad \tilde{e}_2^{(2)}=4p\tilde{c}_2^{(2)}(w_0,w_0). \qquad (2.27)$$

Ahora se toma (2.12) con (2.13) sustituida con el fin de tener la expresión completa del campo y las ecuaciones (2.26) con el fin de ser sustituidas en la ecuación de Maxwell (2.6), dando por resultados:

$$2ik_1\frac{\partial A_1}{\partial z}-2ik_1f_1\frac{\partial A_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}+\frac{2w_0^2}{c^2}\tilde{e}_1^{(2)}A_1^*A_2e^{-i\Delta kz}=0, \qquad (2.28)$$

para la contribución de E_1 y D_1. Y la ecuación:

$$2ik_2\frac{\partial A_2}{\partial z}-2ik_2f_2\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+\frac{8w_0^2}{c^2}\tilde{e}_2^{(2)}A_1^2e^{i\Delta kz}=0, \qquad (2.29)$$

para la contribución de E_2 y D_2 [5].

Para lo que se ha usado la aproximación de envolvente con variación lenta y las relaciones de dispersión descritas anteriormente.

Haciendo $k_1' = f_1$ y $k_1'' = -1/k_1$, se puede escribir la ecuación (2.28) como:

$$i\frac{\partial A_1}{\partial z} - ik_1'\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + K_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta kz} = 0, \qquad \text{con: } K_1 = \frac{w_0^2}{k_1 c^2}\tilde{e}_1^{(2)}. \quad (2.30)$$

Usando: $k_2' = f_2$ y $k_2'' = -1/k_2$ por analogía, escribimos (2.29) de la manera:

$$i\frac{\partial A_2}{\partial z} - ik_2'\frac{\partial A_2}{\partial y} - \frac{1}{2}k_2''\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + K_2 A_1^2 e^{i\Delta kz} = 0, \qquad \text{con: } K_2 = \frac{4w_0^2}{k_2 c^2}\tilde{e}_2^{(2)}. \quad (2.31)$$

Notando que $k_1'' < 0$ y $k_2'' < 0$, podemos normalizar de la siguiente manera [7]:

$$x = \frac{|k_1''|}{g^2}z, \qquad s = \frac{y}{g} + \frac{k_1'}{g}z, \qquad d = -\frac{(k_1' - k_2')g}{|k_1''|}, \qquad a = \frac{k_2''}{|k_1''|}, \qquad (2.32)$$

$$b = \frac{\Delta k g^2}{|k_1''|}, \qquad a_1 = \frac{|K_1 K_2|^{1/2} g^2}{|k_1''|}A_1, \qquad a_2 = \frac{K_1 g^2}{|k_1''|}A_2, \qquad r = -1. \qquad (2.33)$$

Donde g es un parámetro espacial arbitrario que puede ser escogido convenientemente para ser del orden de la amplitud de la variación de la onda solitaria en la dimensión y. Así, la coordenada transversal está dada en unidades de g, parámetro que tiene equivalencia con el ancho característico del haz LASER.

De esta manera, llegamos al siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$i\frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{r}{2}\frac{\partial^2 a_1}{\partial s^2} + a_1^* a_2 e^{-ibx} = 0, \qquad i\frac{\partial a_2}{\partial x} - id\frac{\partial a_2}{\partial s^2} - \frac{a}{2}\frac{\partial^2 a_2}{\partial s^2} + a_1^2 e^{ibx} = 0. \quad (2.34)$$

En la segunda ecuación aparece el parámetro d, el cual caracteriza la magnitud del vector apuntador de alejamiento debido al hecho de que la energía y el frente de onda generalmente se propagan en diferentes direcciones en un medio birrefringente.

2.3.3 Deducción de las ecuaciones a resolver en la tesis a partir de las ecuaciones normalizadas y descripción de las variables y parámetros involucrados

Debido a que se desea trabajar con ecuaciones para las cuales no haya ángulo de alejamiento del vector de apuntamiento ($d = 0$), las ecuaciones se simplifican como:

$$i\frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{r}{2}\frac{\partial^2 a_1}{\partial s^2} - a_1^* a_2 e^{-ibx}, \qquad i\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{a}{2}\frac{\partial^2 a_2}{\partial s^2} - a_1^2 e^{ibx}. \tag{2.35}$$

Ecuaciones en las cuales $r = -1$ y $a = -k_1/k_2 = -1/2$ en una situación real. Y cuya forma más simple de solución para solitones estacionarios poseen la forma:

$$a_1 = r_1(h)e^{ib_1 x} \quad \text{y} \quad a_2 = r_2(h)e^{ib_2 x}. \tag{2.36}$$

Expliquemos el significado las distintas variables y parámetros de las ecuaciones anteriormente deducidas [8]:

- a_1 y a_2: Son las envolventes normalizadas de la frecuencia fundamental y del segundo armónico.
- $r_1(h)$ y $r_2(h)$: Son funciones reales que corresponden a las distribuciones de las amplitudes de la onda del armónico fundamental y de su segundo armónico respectivamente con h correspondiendo a la coordenada transversal normalizada.
- g: Es el ancho característico del haz emisor, el cual, una vez considerando ausencia de desviación del vector apuntador, tiene la equivalencia: $s = y/g$.
- b_1 y b_2: Son constantes reales de propagación para las ondas fundamental y segundo armónico respectivamente, que corresponden a los cambios de los vectores de número de onda inducidos por la interacción no lineal, las cuales pueden parametrizar la familia de soluciones.

- b : Corresponde al parámetro efectivo de desplazamiento de fase de onda, el cual se define como: $b = k_1 g^2 \Delta k$, el cual si es medido por la eficiencia de generación del segundo armónico, depende de las propiedades de difracción del haz.
- x : Es la coordenada de propagación, y está normalizada de tal manera que $x = z/2l_d$, en donde l_d es la longitud de difracción definida como: $l_d \approx r/q_d$ siendo r el radio del haz emisor y q_d el ángulo de difracción con respecto al eje direccional del haz.

Finalmente tomando las derivadas de las amplitudes complejas normalizadas descritas como ecuaciones (2.36) se llega:

$$\frac{d^2 r_1}{dh^2} - 2b_1 r_1 + 2 r_1 r_2 = 0 . \qquad (2.37)$$

$$\frac{d^2 r_2}{dh^2} - 4b_2 r_2 + 4 r_1^2 = 0 . \qquad (2.38)$$

Ecuaciones acopladas que cuentan con una gran cantidad de soluciones y que pueden ser resueltas tanto analítica como numéricamente.

2.4 Pregunta de investigación

Se menciona con frecuencia la importancia de la hipótesis en todo trabajo científico, sin embargo, se da con frecuencia en ciencias, el hecho de que la pregunta de investigación posee una importancia más fundamental que la hipótesis [9], debido al hecho de que plantear un enunciado falseable en este caso seria difícil y presuntuoso para una tesis en la cual la proposición que se desearía poder hacer corresponde precisamente al desarrollo del trabajo.

De esta manera, trabajar con una pregunta de investigación nos trae más ventajas, quedando como cuestión de interés en esta tesis el hecho de saber: ¿Qué tipo de solución presentan estas ecuaciones acopladas del perfil de ondas explicadas anteriormente en el objetivo? ¿En qué caso y bajo qué condiciones se forman soluciones de tipo solitón y en qué casos se presentan únicamente soluciones oscilatorias de tipo senoidal correspondientes a ondas armónicas? ¿Son brillantes u oscuros los solitones que se forman? ¿Bajo qué condiciones de desplazamiento de fase de onda se observan solitones?, así como extraer conclusiones una vez logrados estos objetivos.

2.5 Objetivo

Encontrar solución a las ecuaciones diferenciales acopladas siguientes:

$$\frac{d^2 r_1}{dh^2} - 2b_1 r_1 + 2 r_1 r_2 = 0 \,. \tag{2.39}$$

$$\frac{d^2 r_2}{dh^2} - 4(2b_1 + b) r_2 + 4r_1^2 = 0 \,. \tag{2.40}$$

las cuales pueden describir el comportamiento de solitones ópticos espaciales u ondas ópticas armónicas en un medio no lineal cuadrático. Estas ecuaciones toman en cuenta la interacción entre las ondas fundamental y de segundo armónico que bajo generación paramétrica óptica interactúan entre sí formando ondas periódicas que poseen los campos ópticos de ambas frecuencias.

Que para poder asegurar soluciones estacionarias, deben cumplir con la condición [8]:

$$b_2 = 2b_1 + b \,. \tag{2.41}$$

Estas expresiones se encuentran sujetas a las condiciones de periodicidad para las funciones r_1 y r_2, que se representan matemáticamente en la siguiente página.

$$r_1(h) = r_1(h+H), \qquad r_2(h) = r_2(h+H). \tag{2.42}$$

En las cuales H representa el periodo de la función.

Y sus amplitudes se hayan relacionadas de la siguiente manera:

$$r_2(h) = a r_1(h). \tag{2.43}$$

Siendo a en esta ocasión, un parámetro de proporcionalidad entre los armónicos, el cual puede verse como un término de acoplamiento.

Para el caso especial de formación de solitones cuadráticos espaciales existen dos parámetros básicos que son: La intensidad del haz LASER y el desplazamiento de fase entre las ondas de distinta frecuencia. Tomando en cuenta que para un desplazamiento de fase específica existe una familia completa de solitones siempre que la intensidad luminosa esté arriba del umbral mínimo para el medio cuadrático en consideración, se busca ver cuáles son los valores del parámetro b bajo los cuales ocurre formación de solitones y aquellos bajo los cuales existe formación de ondas armónicas estacionarias. Además de especificar las condiciones bajo las cuales se forman estos tipos de ondas y sus características [10].

2.6 Forma de abordar el problema

A fin de llevar a cabo el objetivo planteado en esta tesis, se desea hacer uso de tres métodos: Un método que busque encontrar solución analítica mediante integrales haciendo uso de la proporcionalidad de los armónicos, el cual se aborda en el capítulo 3. En este método se hará evidente el comportamiento de una magnitud análoga al potencial energético con que normalmente se trabaja en los problemas de mecánica. Un segundo método, en este caso de perturbaciones, que consiste en encontrar una solución alrededor de ciertos puntos de inflexión para el caso de amplitudes pequeñas, éste se describe en el cuarto capitulo y finalmente un tercer método, que corresponde al capítulo 5, que matemáticamente lo hace más general y que involucra funciones elípticas de Jacobi para hacer frente a la solución de las ecuaciones acopladas de las amplitudes de onda de los armónicos. Por último se pretende hacer comparaciones entre los métodos antes brevemente explicados a fin de encontrar la consistencia entre ellos y poder extraer algunas otras posibles conclusiones.