

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ACTUARÍA, FÍSICA Y MATEMÁTICAS

UDLAP®

**OPTIMIZACIÓN Y SIMETRÍA: LA RELACIÓN ENTRE
ELLAS**

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE
HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE

EMILIO PADRÓN MOLINA

157093

DIRECTORA

DRA. MILAGROS ZEBALLOS REBAZA

CO-DIRECTOR

DR. GUILLERMO ROMERO MELÉNDEZ

SAN ANDRÉS CHOLULA, PUEBLA.

PRIMAVERA, 2020

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE
HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE EMILIO PADRÓN MOLINA,
157093

DIRECTORA DE TESIS

Dra. Milagros Zeballos Rebaza

PRESIDENTE DE TESIS

Dra. Luz María García Ávila

SECRETARIO DE TESIS

Dr. Gerardo Arizmendi Echegaray

Agradecimientos

En mi vida a habido muchas personas que han sido de gran influencia, me han motivado, y me han hecho descubrir mis dones, mis talentos, mis áreas de oportunidad y me han abierto los ojos a un mundo nuevo. Ha habido varias personalidades que me han inspirado, como Michio Kaku y Évariste Galois a través de sus trabajos, libros, e investigaciones, a emprender este camino que tanto me apasiona. Pero hay dos personas en especial a las que quiero agradecer por acompañarme, inspirarme, y retarme para hacer lo que empezó como un proyecto y se convirtió finalmente en esta tesis.

En primer lugar, toda mi gratitud al Dr. Guillermo Romero Meléndez quien desde inicio me motivó con su apoyo y entusiasmo en cada una de nuestras reuniones. A pesar de los cambios que surgieron en el camino, siempre estuvo al pendiente, dispuesto a colaborar y compartir su conocimiento sin importar las barreras geográficas. Sin duda alguna, él fue elemento clave y pilar de este trabajo.

Otra persona valiosa y fundamental en esta investigación fue la Dra. Milagros Zeballos Rebaza, quien a pesar de que el tema se encontrara fuera de su área de especialidad, se comprometió e investigó para colaborar en el proyecto y dar puntos de vista de gran valor. Agradezco el impulso que recibí de su parte para enriquecer mi trabajo desde otra perspectiva.

Agradezco el interés de estos dos grandes profesores, cuyo tiempo dedicado al proyecto y su confianza en mí dieron como resultado una publicación y dos ponencias en congresos. Estoy seguro que este resultado no hubiera sido posible sin esta extraordinaria colaboración.

Índice

1. Introducción	5
2. Optimización Geométrica y Simetrías	11
2.1. Grupo de Simetría	11
2.2. Problema del Triángulo Inscrito en una Circunferencia	12
2.3. Discusión	15
3. Optimización y Simetría en Compactación de Imágenes Fractales	17
3.1. Fractales y el Método de Barnsley	17
3.2. Modelación de la Galaxia Espiral M-51	19
3.3. Discusión	21
4. Optimización y Simetría en Teoría de Juegos	24
4.1. Equilibrios de Nash en Juegos No-Cooperativos	24
4.2. Método Geométrico en el Caso General	25
4.3. Método Geométrico en el Caso Simétrico	30
4.4. Discusión	33
5. Conclusiones	36
Apéndice	38
Referencias	39

Resumen

En esta tesis se exploran tres problemas cuyas soluciones se obtienen a partir de métodos de optimización y simetría. En el primer problema se busca determinar las condiciones del triángulo con mayor área dentro de una circunferencia a través de métodos de cálculo diferencial; el resultado es un triángulo equilátero, el cual es el más simétrico de todos. En el segundo problema, se implementa el método de Barnsley para modelar la galaxia M-51. Para esto, las funciones del sistema iterativo de transformaciones afines (IFS) se obtienen de dos maneras: mediante algoritmos matemáticos, y a través de *IFSLab*; por consiguiente, se realiza una simulación con cada método, las cuales se comparan con los datos de la verdadera galaxia de manera física, así como a través de sus dimensiones fractales. El atractor obtenido tiene propiedades de optimización y simetría de una función que utiliza las transformaciones afines en su definición. Finalmente, en el tercer problema, se propone un método para encontrar equilibrios de Nash en juegos de dos jugadores con dos opciones, a través de geometría elemental. Además, utilizando dicho método se demuestra que siempre existe un equilibrio de Nash para estos juegos, y que si el juego es simétrico al cambio de jugadores, existe al menos un equilibrio que también lo será.

Palabras clave: optimización, simetría, método de Barnsley, equilibrio de Nash, teoría de juegos.

1. Introducción

En términos generales la “optimización” se refiere al acto, proceso, o metodología de hacer algo lo más funcional o efectivo posible. Sin embargo, más específico para las matemáticas, esto es la colección de principios y métodos utilizados para resolver problemas cuantitativos, relacionados con maximizar o minimizar funciones, en múltiples disciplinas como física, biología, ingeniería y economía (Wright, 2016). Existen tres principales tipos de optimización: la matemática, la combinatoria, y la multi-objetivo; las cuales se analizarán con mayor detalle a continuación.

De manera general, el objetivo de la “optimización matemática” es dar respuesta a un tipo de problema donde se desea elegir el “mejor” elemento en un conjunto. Esto equivale a resolver una ecuación como la siguiente:

$$\max(\min) f(x) : x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

donde x representa el conjunto de variables de decisión y $f(x)$ (llamada función objetivo) mide la calidad de las decisiones (Dantzig, 2014). Adicionalmente, Ω es el conjunto de restricciones del problema, y puede ser expresado como el sistema de desigualdades:

$$g(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad \text{y} \quad h(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Esto quiere decir que la optimización busca tomar una decisión ya sea para maximizar o minimizar un criterio determinado. El conjunto de restricciones sirve para que no cualquier decisión sea posible (Dantzig, 2014). Sin embargo, dada la generalidad de este tipo de optimización, existen distintas subcategorías como: la clásica, la no-clásica, la estocástica, y la de información no-perfecta.

La “optimización clásica” se utiliza cuando la restricción no existe, o se trata de una restricción de igualdad con menor o igual número de variables que la función objetivo (Creative-Commons, 2010). Para optimizar este tipo de problemas, se utiliza el cálculo diferencial para que de este modo se encuentren los valores extremos de una función.

La “optimización no-clásica” se aplica cuando la restricción contiene mayor cantidad de variables que la función objetivo, o también si la restricción contiene desigualdades. Si tanto, las restricciones como la función objetivo son lineales, entonces esto significa que existe al menos un máximo/mínimo por lo que el problema puede ser resuelto mediante la aplicación de dos algoritmos de álgebra lineal: el método simplex, y el método dual. Por otro lado, si estas condiciones no se cumplen, se pueden utilizar las condiciones de Khun-Tucker (Creative-Commons, 2010), las cuales en ciertos casos pueden ayudar a encontrar puntos críticos, y por lo tanto máximos y mínimos. Sin embargo, cabe mencionar que esta área de las matemáticas se encuentra en desarrollo y por lo tanto en muchas ocasiones no se logran encontrar los extremos buscados.

La “optimización estocástica” se aplica cuando las variables del problema (función objetivo y/o restricciones) dependen del azar. En estos casos, se busca encontrar una solución para varios escenarios que se pueden establecer bajo una condición probabilística.

Para lograr esto, se debe considerar una serie de restricciones para limitar las decisiones (variables), y una función objetivo a optimizar. Como este tipo de optimización se basa en la probabilidad, el problema puede ser afrontado por medio de la reducción del riesgo de la decisión, utilizando el peor escenario (Ramos y Cerisola, 2016). Hoy en día, la optimización estocástica es normalmente calculada con ayuda computacional.

En el caso de la “optimización con información no perfecta”, la cantidad de variables, o incluso la función objetivo puede ser desconocida o variable. Para enfrentar esto, la matemática borrosa (la cual se basa en lo relativo de lo que se puede observar entre ciertos valores) puede ser utilizada (Creative-Commons, 2010); sin embargo, como esta área se encuentra en desarrollo, no siempre se puede resolver el problema de optimización.

Por otro lado, la “optimización combinatoria” está relacionada con la investigación de operaciones, la teoría de algoritmos y la teoría de la complejidad. Es por eso, que esta rama se vincula con las matemáticas aplicadas y con la ciencia computacional. Un problema de optimización combinatoria puede ser expresado como una tupla (secuencia de valores agrupados): $(X, P, Y, f, extr)$ donde X es el espacio de soluciones en donde f y P están definidos, P es la factibilidad predicado (este concepto se puede definir como una función que regresa un valor booleano; sea p miembro del espacio, la función es igual a verdadero si y solo si p es una solución del problema, de no ser así, la función es igual a falso (Daras, 2014)), Y es el conjunto de soluciones factibles, f es la función objetivo, y $extr$ es el extremo (max/min). Para resolver este tipo de problemas, se utilizan métodos de búsqueda heurísticos diferentes dependiendo del caso: la búsqueda local; Tabu search (la cual consiste en prohibir la búsqueda en puntos ya explorados de un espacio, para después aplicar otras técnicas de búsqueda y encontrar nuevas soluciones (Pintér, 2019)); la optimización basada en colonias de hormigas, entre otros (Creative-Commons, 2010).

A diferencia de los otros tipos de optimización ya mencionados, la “optimización multiobjetivo” se basa en optimizar dos o más objetivos simultáneamente. Para una función de la forma $f : S \rightarrow T$ tal que $S \subset \mathbb{R}^n$ y $T \subset \mathbb{R}^k$, normalmente no existe un elemento de S que genere un óptimo de forma simultánea para cada k objetivo que compone a f (Creative-Commons, 2010) debido a la existencia de conflictos entre objetivos. Para evitar esto se necesita determinar cuál es la mejor solución (o soluciones) del problema. En otras palabras, encontrar un vector $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ que satisfaga las m restricciones: $g_i(x) \geq 0 : i = 1, 2, \dots, m$; las p restricciones: $h_i(x) = 0 : i = 1, 2, \dots, p$; y optimice la función vectorial:

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]^T$$

en donde $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es el vector de variables de decisión. Para tratar este tipo de problemas se han utilizado diferentes métodos; entre ellos se encuentra el método de suma ponderada, el cual consiste en optimizar el valor obtenido mediante la suma de los valores correspondientes a los distintos objetivos, multiplicados cada uno por un cierto coeficiente de peso (los cuales representan la importancia relativa de cada objetivo) (Creative-Commons, 2010). De esta manera, el problema se transforma en uno de

optimización escalar. Para el caso de los mínimos, el problema se describe mediante la expresión:

$$\sum_{i=1}^k w_i f_i(x)$$

en donde $w_i \geq 0$ es el coeficiente de peso que corresponde al objetivo i .

Una variación de este modelo es conocida como el método de la programación por metas, el cual establece una meta para cada objetivo y se aplica la sumatoria de la distancia de cada objetivo a su meta, la cual se multiplica por el coeficiente de peso correspondiente (Creative-Commons, 2010). Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - M_i|$$

en donde M_i representa la meta del i -ésimo objetivo.

Se considera ahora el tema de la simetría. Comúnmente se denomina “simetría” a la correspondencia exacta de tamaño, forma y posición de las partes de un todo con respecto a un centro, eje o plano (Pérez-Porto y Merino, 2013). No obstante, esta definición no se encuentra del todo completa ya que en la actualidad se define como “la inmunidad a un posible cambio”(Livio, 2017). Al igual que la optimización, la simetría es una propiedad relacionada con las matemáticas y la física; no obstante, esta tiene múltiples aplicaciones en otras áreas como el arte y la psicología, ya que puede ser encontrada en forma de coeficientes dentro de ecuaciones, o en el establecimiento del orden y diversas configuraciones de objetos (Weisstein, 2002b).

Notablemente, la simetría es estudiada a través de un área de las matemáticas denominada “teoría de grupos”, la cual se encarga de describir su esencia y analizar sus propiedades. En este ámbito “grupo” se refiere a un conjunto de objetos, llamados elementos de G , que pueden ser combinados por una operación binaria representada por \bullet , la cual esta sujeta a las siguientes condiciones:

1. Cerradura: para cualquier $a, b \in G$, el producto $a \bullet b$ también es elemento de G .
2. Asociatividad: para $a, b, c \in G$, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
3. Elemento idéntico: existe un elemento, e , tal que $e \bullet a = a \bullet e = a$ para todo elemento $a \in G$.
4. Elemento inverso: para cada elemento $a \in G$, existe un elemento inverso, representado por a^{-1} , de manera que $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$.

Además, si este grupo cuenta con la condición $a \bullet b = b \bullet a$ para cualesquiera dos elementos a, b , entonces se le denomina “grupo abeliano” (Arfken, Weber, y Harris, 2013).

Los elementos de un grupo G pueden formar “subgrupos”, los cuales son subconjuntos de G , y grupos a su vez, con las mismas operaciones del grupo G , y con los mismos elementos inversos e idéntico. De estos últimos, solo unos cumplen con la propiedad que

para cualquier miembro del subgrupo, al ser multiplicados por la izquierda por cualquier elemento a del grupo G y desde la derecha por el inverso de a , resulta en un elemento de este subgrupo. Es decir, si a, b son elementos de G en donde $b = a^{-1}$, y h_1 es elemento de $H \subset G$, entonces:

$$a \bullet h_1 \bullet b = h_2$$

en donde h_2 también es elemento de H . Los subgrupos que cumplen con esta propiedad, son llamados “subgrupos normales”. Adicionalmente, es necesario definir el concepto de “factor de composición” como el cociente del orden del grupo (el cual es su número de elementos) y el orden del subgrupo (Livio, 2017) ya que este será útil a continuación.

Notablemente, las permutaciones desarrollan un papel significativo en el concepto de la simetría. Un ejemplo de esto yace en las ecuaciones polinomiales, ya que a través del análisis del grupo de permutaciones de las soluciones de dichas ecuaciones (también conocido como “grupo de Galois”), se puede determinar si estas se pueden encontrar mediante una fórmula o no (Livio, 2017). Esto se debe a que el grupo de soluciones de una ecuación es “isomorfo” al grupo de permutaciones; es decir, tienen la misma estructura.

El grupo de permutaciones de n objetos, el cual se designa por S_n , tiene un orden igual a $n!$ (número de elementos de este grupo). Dentro de este grupo, debe de haber subgrupos normales de los cuales uno será el máximo o de mayor orden, y este puede tener subgrupos normales en los cuales debe de haber otro máximo. Para determinar si una ecuación es resoluble, es necesario tomar los ordenes de grupo de estos subgrupos normales máximos y generar un árbol genealógico con los factores de composición. Con lo anterior, a un grupo se le denomina soluble si todos los factores de composición generados por sus máximos subgrupos normales descendientes son iguales a un número primo (Livio, 2017). Por lo tanto, para que una ecuación de grado n se pueda resolver mediante una fórmula, S_n tiene que ser soluble.

Por otro lado, la teoría de grupos y por lo tanto la simetría también pueden tener un impacto más directo en áreas de la física. Un ejemplo de esto es la teoría de la relatividad especial de Einstein, en donde se demuestra que el espacio y el tiempo están inseparablemente unidos por la simetría. De manera similar a la relación entre las permutaciones y las soluciones de las ecuaciones, Minkowski mostró que se puede hacer rotar al espacio y al tiempo como entidad cuatridimensional, del mismo modo que una esfera puede hacerse rotar en un espacio tridimensional; esto conlleva a que existen simetrías entre las ecuaciones de la relatividad especial según rotaciones espacio-tiempo (covarianza de Lorentz). Como consecuencia a lo anterior, Einstein notó que si las leyes de la naturaleza permanecen inalteradas para los observadores en movimiento, no sólo las ecuaciones obedecen la covarianza de Lorentz, sino que las propias leyes pueden en realidad ser deducidas a partir de los requisitos de la simetría (Livio, 2017). Esto ha sido estudiado a partir de las transformaciones de Lorentz, que son un conjunto de relaciones que explican cómo se relacionan las medidas de una magnitud física obtenidas por dos observadores diferentes de acuerdo a la relatividad especial. El conjunto de todas estas transformaciones forman el grupo de Lorentz, el cual es isomorfo (se puede gene-

rar un mapeo reversible con otra estructura) al grupo de transformaciones lineales que deja invariante la métrica del espacio de Minkowski (también conocido como el grupo de isometría del espacio de Minkowski) (Naber, 1992). Más aun, el grupo de Lorentz es un subgrupo del grupo de Poincaré, que a su vez es formado por el conjunto de transformaciones de isometrías (aplicaciones que conservan las distancias entre puntos) del espacio-tiempo de Minkowski.

Otro resultado importante de la optimización y simetría en la física es el teorema de Noether, el cual dicta que cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, corresponde a una ley de conservación. En la mecánica clásica, este teorema da tres resultados principales: la invarianza de un sistema respecto a rotaciones da la ley de conservación del momento angular; la invarianza de un sistema respecto a una traslación espacial resulta en la ley de conservación del momento lineal; y finalmente, la invarianza con respecto a la traslación en el tiempo conlleva a la ley de conservación de la energía (Tavel, 1971).

En esta tesis, se estudiarán los conceptos de optimización y simetría en modelos de distintas áreas. El objetivo de esta investigación es determinar la relación entre los modelos más óptimos y los más simétricos en las ramas de matemáticas y economía. Lo anterior se hace con el propósito de obtener información adicional de los modelos que se estudian, ya sea para generar algoritmos para la resolución de problemas que muestran ciertos perfiles de simetría, o para demostrar teoremas desde otro punto de vista.

Esta investigación es pertinente porque el número de publicaciones que analizan modelos con ambos enfoques es limitado. Por lo que este trabajo, a parte de ser novedoso, puede resultar de gran utilidad para el estudio tanto de modelos previamente establecidos, como de modelos que se encuentran en desarrollo. Además, cabe mencionar que el aporte no está limitado a las matemáticas, la física, y la economía, ya que existen otras áreas, como la biología o la psicología, en donde existen modelos matemáticos que pueden arrojar resultados interesantes al analizar sus perfiles de optimización y simetría. No obstante, dado el impacto que esto tiene en distintas áreas, obtener resultados generalizados puede ser complicado; por lo que esta obra se basará en modelos específicos de los campos ya mencionados.

En lo personal, considero interesante este tema debido a que conduce a distintas áreas de las tengo mucho espacio para aprender. Estos nuevos conceptos ayudan a mi desarrollo como estudiante de licenciatura, lo cual se podrá ver reflejado al ejercer en el ámbito profesional. Asimismo, considero que ciertas secciones de este trabajo las podré retomar en mis posgrados en donde tendré la oportunidad de abordar estos modelos de manera más general.

Como ya fue mencionado, este trabajo se aplica en distintas áreas de matemáticas, física, y economía. En el capítulo 2, se aborda un problema de optimización geométrica en donde se busca determinar el triángulo de mayor área dentro de una circunferencia, y se analiza su perfil de simetría para desarrollar herramientas que permitan resolver problemas similares. Posteriormente, en el capítulo 3, se aplican sistemas dinámicos

utilizando el método de Barnsley para determinar las transformaciones que permiten modelar la galaxia M-51 y analizar su simetría. Finalmente, en el capítulo 4, se estudia, en la rama de teoría de juegos, específicamente el modelo de un juego de dos jugadores con dos opciones. Para este modelo, se propone un método basado en geometría para determinar los equilibrios de Nash, y además, se estudia el caso en donde el juego es simétrico con el propósito de obtener información adicional.

2. Optimización Geométrica y Simetrías

2.1. Grupo de Simetría

Según el matemático alemán Felix Klein, la geometría se caracteriza y se define no por los objetos, sino más bien por el grupo de transformaciones que la dejan inalterada (Livio, 2017). En cuanto al conjunto de transformaciones que deja inalterado a un polígono regular, este se representa por D_n en donde n es el número de lados que tiene la figura, y se le denomina como “grupo de simetría del polígono” (o grupo diedral). Entre las propiedades más notables de este grupo es que es no-abeliano y su orden es de $2n$ (Weisstein, 2002a).

En el caso específico del triángulo equilátero, el grupo D_3 está compuesto por 6 transformaciones (Arfken y cols., 2013): la transformación de identidad, I ; dos rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ (en sentido contrario a las manecillas del reloj), respectivamente: r y r^2 ; y tres transformaciones obtenidas al aplicar la reflexión A , a los elementos anteriores: A , Ar , y Ar^2 . Esto se puede visualizar con la siguiente imagen:

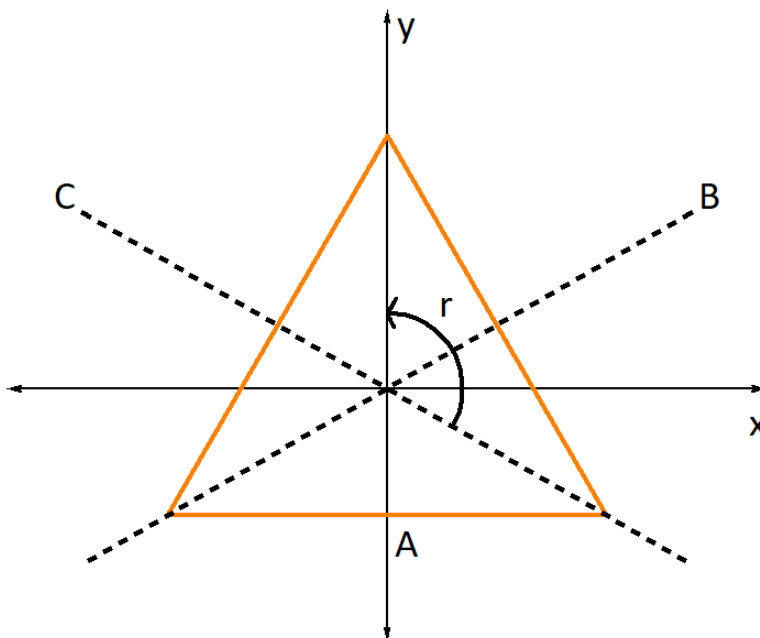


Figura 1: Transformaciones que dejan invariante a un triángulo equilátero.

Desde un punto de vista matemático, estas invariantes pueden ser representadas mediante las siguientes matrices:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad r^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Ar = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad Ar^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Adicionalmente, la tabla de multiplicar de estas matrices está representada en la siguiente figura:

	l	r	r ²	A	Ar	Ar ²
l	l	r	r ²	A	Ar	Ar ²
r	r	r ²	l	Ar ²	A	Ar
r ²	r ²	l	r	Ar	Ar ²	A
A	A	Ar	Ar ²	l	r	r ²
Ar	Ar	Ar ²	A	r ²	l	r
Ar ²	Ar ²	A	Ar	r	r ²	l

Figura 2: Tabla de multiplicar del grupo D_3 .

Considerando lo anterior de manera más general, vale la pena analizar brevemente los otros dos tipos de triángulos. En el caso del triángulo isósceles, el grupo de transformaciones que lo dejan inalterado contiene dos elementos: la identidad y una reflexión respecto al eje que perpendicular al lado de distinta magnitud, y que lo divide a la mitad. Por otro lado, en el caso del triángulo escaleno, el grupo de transformaciones que lo dejan inalterado contiene únicamente la transformación identidad. Lo anterior demuestra que el triángulo equilátero es el más simétrico de todos.

En esta sección se aborda un problema de optimización geométrica del artículo *Historias de Matemáticas: Algunos problemas de optimización matemática* (Ruiz López, 2015) relacionado con triángulos. Específicamente, si se tiene un triángulo inscrito dentro de una circunferencia fija, se busca encontrar las condiciones del triángulo de mayor área. Cabe mencionar que aunque se conoce la solución del problema, este también se puede abordar de otra manera la cual será presentada a continuación.

2.2. Problema del Triángulo Inscrito en una Circunferencia

Como ya fue mencionado, en el artículo titulado *Historias de Matemáticas: Algunos problemas de optimización geométrica* por Federico Ruiz López (2015) se presenta un problema cuyo propósito es encontrar el triángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r . Para empezar con la solución de este problema, se considera fija la base del triángulo, y se elige un sistema coordenado de manera que la base tenga puntos extremos $P(-a, b)$ y $Q(a, b)$ (ver Fig. 3). Con estas condiciones, el área máxima se obtiene con una altura máxima. Esta altura se modela como una función de x , por lo que es evidente que ésta se alcanza cuando el punto (x, y) y la base se encuentran en lados opuestos del eje x . Adicionalmente, se supone que la base se encuentra por debajo del eje x , lo cual simplifica la demostración (si la base se encuentra arriba, se procede análogamente).

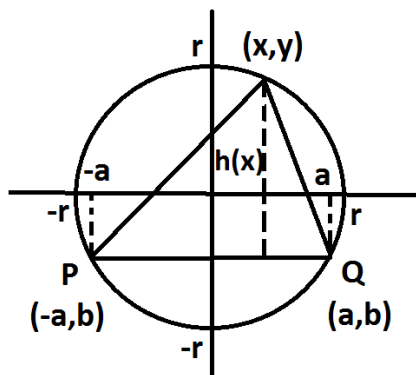


Figura 3: Sistema de coordenadas y ubicación de puntos clave utilizados para resolver la primer parte del problema del triángulo inscrito en una circunferencia.

Si $x \in [a, r]$, entonces $h(x)$ se encontrará entre $|b|$ y $2|b|$, por lo que es evidente que la altura máxima se alcanzara en $2|b|$, lo cual sucede cuando $x = a$. Es notable que el caso $x \in [-r, -a]$ es análogo (con la única diferencia que la altura máxima se alcanza cuando $x = -a$), por lo que se puede deducir que el área máxima se encontrará en el intervalo $x \in [-a, a]$. Además, escribiendo la altura como $h(x) = y(x) + |b|$, con las condiciones anteriores se tiene:

$$h(x) = y(x) - b \quad (1)$$

Dado que b es una constante, la altura máxima se obtiene cuando $y(x)$ es máxima.

Ahora bien, considerando la ecuación del círculo $r^2 = x^2 + y^2$ y la condición que $y \geq 0$, se puede determinar la siguiente ecuación:

$$y(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (2)$$

Para encontrar los puntos máximos de esta función, es necesario obtener su derivada con respecto a x e igualarla a cero:

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \quad (3)$$

Notablemente, esta igualdad se cumple solo para $x = 0$ por lo que es necesario calcular el valor de $y(-a)$, $y(0)$, $y(a)$ para encontrar el máximo global dentro del intervalo $[-a, a]$. Estos valores son:

$$y(-a) = -b \quad y(a) = -b \quad y(0) = r$$

Como (a, b) está en la circunferencia, $-r < -b < r$; esto implica que $y(0) = r$ es el máximo absoluto, por lo que la altura máxima, expresada por $h(0) = y(0) - b$, tiene un valor de $h = r - b$; por lo tanto, el triángulo resultante se trata de un triángulo isósceles.

Una manera de proceder consiste en rotar el triángulo, restablecer el sistema de coordenadas, y replicar la metodología anterior; no obstante, si se quiere conocer más información sobre el triángulo final, se puede proceder de la siguiente manera.

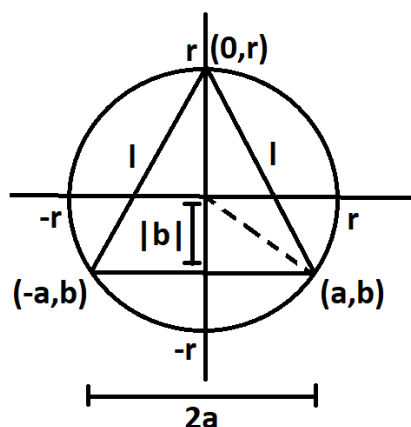


Figura 4: Ubicación de puntos clave utilizados para resolver la segunda parte del problema del triángulo inscrito en una circunferencia.

Como se sabe que la altura máxima se alcanza cuando $x=0$, se fija el vértice superior y se varía la base como se muestra en la Fig. 4. Si el vértice superior del triángulo se considera fijo en $(0, r)$, y que la base de éste se puede desplazar en el eje y (los dos vértices se deberán mantener en la circunferencia), se puede determinar el valor de a (de uno de los vértices inferiores) en función de b . Cabe mencionar que las condiciones mencionadas al inicio de este problema siguen aplicando, por lo que la altura del triángulo dependerá de b , el cual se encontrará en la parte inferior del eje x . Si se considera que a es una función de b , entonces se tiene: $a(b) = \sqrt{r^2 - b^2}$. Con esto, el área del triángulo es la función de b descrita a continuación:

$$A(b) = a(b) h(b) = (r - b)\sqrt{r^2 - b^2}, \quad b \in [-r, 0] \quad (4)$$

De manera similar a la ecuación 3, para encontrar los puntos máximos de la función área, es necesario obtener su derivada con respecto a b e igualarla a cero:

$$\frac{d}{db}A(b) = \left(-\sqrt{r^2 - b^2} - \frac{b(r - b)}{\sqrt{r^2 - b^2}} \right) = 0 \quad (5)$$

Al simplificar la expresión anterior, esta resulta en la ecuación: $2b^2 - rb - r^2 = 0$; cuya solución en el intervalo $[-r, 0]$ es:

$$b = -\frac{1}{2}r$$

Si se comparan los valores: $A\left(-\frac{1}{2}r\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, $A(-r) = 0$, $A(0) = r^2$; se observa que el máximo es $A\left(-\frac{1}{2}r\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$. Por otra parte, cabe resaltar que los valores de la mitad de la base y la altura para $b = -\frac{1}{2}r$ son:

$$a\left(-\frac{1}{2}r\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}r \quad h\left(-\frac{1}{2}r\right) = \frac{3}{2}r$$

Con estos valores se puede obtener la longitud l de este triángulo a partir del teorema de Pitágoras, lo cual resulta en $l = \sqrt{3}r$. Notablemente, el valor de l es el mismo que el de la base ($2a$), por lo que se obtiene que el triángulo con mayor área dentro de una circunferencia establecida es equilátero.

2.3. Discusión

De acuerdo con Ruiz López (2015) este problema ya había sido resuelto desde el tiempo de los griegos. Sin embargo, él propone una solución alterna a partir de métodos de cálculo multivariable. Para esta solución, se define un triángulo inscrito en una circunferencia en el cual se trazan líneas del centro de esta a cada uno de los vértices, dividiendo el triángulo inscrito en tres triángulos isósceles distintos como se puede observar en la Fig. 5.

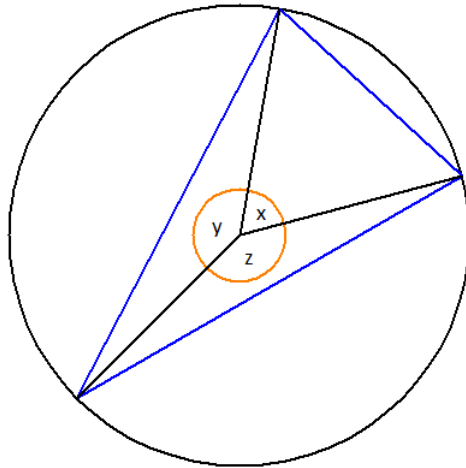


Figura 5: Gráfico que muestra los componentes utilizados en el artículo *Historias de Matemáticas: Algunos problemas de optimización geométrica* (Ruiz López, 2015), para determinar las condiciones del triángulo con mayor área inscrito en una circunferencia.

Es notable que los dos lados iguales de cada uno de los triángulos isósceles tienen una longitud r mientras que la del tercer lado varía de triángulo en triángulo. Adicionalmente, los ángulos que unen a los lados iguales de cada triángulo se definen como x, y, z y su suma es igual a 2π .

Ahora bien, el área de cada triángulo isósceles se calcula por la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}r^2 \sin \theta \quad (6)$$

en donde θ es remplazado por x, y o z dependiendo del triángulo al cual se le quiere encontrar el área. Por lo anterior, el área total se puede calcular a partir de la suma de las áreas. Además, si se considera $z = 2\pi - x - y$, el área total es igual a la expresión:

$$A(x, y) = \frac{1}{2}r^2(\sin x + \sin y - \sin(x + y)) \quad (7)$$

Para encontrar el área máxima, es necesario obtener las derivadas parciales de esta función y buscar los puntos críticos de cada variable igualando las derivadas a cero:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2}r^2(\cos x - \cos(x + y)) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{2}r^2(\cos y - \cos(x + y)) = 0 \quad (9)$$

A partir de las ecuaciones 8 y 9, se obtiene la condición $x = y$ por lo que al sustituirla en alguna de las ecuaciones ya mencionadas se obtienen dos soluciones: $x = y = z = 0$ y $x = y = z = \frac{2\pi}{3}$. Debido a la naturaleza del problema, la primera solución muestra un área igual a cero, por lo que se estudia la segunda solución, la cual resulta en un triángulo equilátero.

Cabe resaltar que ambas formas de resolver el problema del triángulo con mayor área inscrito en una circunferencia son consistentes entre sí. No obstante, mientras que las ecuaciones que se utilizaron para optimizar la altura y el área en el método propuesto en la sección 2.2 son conocidas para la mayoría de la gente, ciertas ecuaciones y propiedades del método de cálculo multivariable propuesto por Ruiz López (2015) no son totalmente intuitivas, por lo que requieren ser calculadas utilizando técnicas de geometría y trigonometría. Un ejemplo de esto es la ecuación 6, en donde es necesario considerar un romboide y encontrar la relación entre sus lados y ángulos para poder definir el área de esta manera. Además, los métodos de optimización en la resolución de Ruiz López requieren un conocimiento más profundo del cálculo que el propuesto en este trabajo. Por estas razones se puede concluir que el método de cálculo con una variable propuesto por nosotros resulta ser más simple.

Es notable que la solución de este problema es interesante de analizar desde el punto de vista de la simetría. Como fue mencionado al inicio de este capítulo, el triángulo equilátero es el más simétrico de todos, por lo que se puede afirmar que la figura de tres lados con mayor área dentro de una circunferencia es la más simétrica. Visto de esta manera, uno puede preguntarse a sí mismo si esto es cierto en un caso más general, i.e. ¿el polígono de n lados inscrito en una circunferencia tiene un área máxima si este es el más simétrico? En efecto, esto es cierto y ha sido demostrado por el matemático griego Zenodoro (Ruiz López, 2015).

3. Optimización y Simetría en Compactación de Imágenes Fractales

3.1. Fractales y el Método de Barnsley

Una “transformación lineal” entre dos espacios vectoriales, V y W es un mapeo $T : V \rightarrow W$ que cumple con:

$$T(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha T(\vec{v}_1) + \beta T(\vec{v}_2)$$

en donde α, β son escalares y \vec{v}_1, \vec{v}_2 son elementos de V (Rowland y Weisstein, 2002). Además, una “transformación afín” es aquella que tiene la forma: $T(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{x}_0$; en donde A es una matriz y \vec{x}_0 es un vector de traslación (Barnsley y Sloan, 1988).

Por otra parte, se puede definir un “fractal” como un objeto geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas (Mandelbrot y Llosa, 2003). La dimensión de la mayoría de estos objetos no es entera, y tiene diferentes formas de determinarse. Para los fractales autosimilares (aquellos cuyo factor de contracción es el mismo en cada dirección), se calcula a partir del cociente entre el logaritmo natural del número de piezas autosimilares, N , y el logaritmo natural del factor de contracción, s (Devaney, 1995). Es decir:

$$D = \frac{\ln N}{\ln s}$$

No obstante, existen fractales que son autoafines pero no-autosimilares (aquellos cuyo factor de reducción es diferente en al menos una dirección), su dimensión fractal se puede determinar a partir de la creación de cajas y la densidad de estas; i.e. el número de puntos ocupados respecto al total de puntos. Esto se hace ajustando a una línea recta al logaritmo natural de la densidad de puntos respecto al logaritmo natural del largo de la caja; la dimensión fractal corresponde a la pendiente de este ajuste (Gaylord y Wellin, 1995). Sin embargo, cabe resaltar que para poder hacer este cálculo la imagen debe estar inmersa en arreglos cuadrados de puntos con coordenadas enteras.

Utilizando los conceptos anteriores, Barnsley (1993) desarrolló un método para compactar imágenes con naturaleza fractal. El primer paso de este método consiste en dividir la figura en el menor número posible de partes parecidas a ella, en el sentido de que cada una de ellas se obtenga al aplicar una transformación afín a la figura inicial, y de manera que la figura sea la unión de esas partes. Luego, se calculan las transformaciones afines (T_i) que mapean a la figura inicial en cada una de sus partes. Cabe mencionar que este conjunto de transformaciones es conocido como “sistema iterativo de transformaciones afines (IFS)”. Posteriormente, se implementa un programa en el que se inicia con un punto x_0 de la figura, se elige una de las transformaciones T_i al azar, se aplica al punto x_0 obteniendo $x_1 = T_i(x_0)$, se grafica x_1 , y se repite sucesivamente este procedimiento n veces. La probabilidad con la que se escoge la transformación T_i debe ser igual al tamaño relativo de la parte correspondiente de la figura, con respecto a la figura total. Esta probabilidad también se puede calcular como el valor absoluto del determinante de la matriz de T_i entre la suma de los valores absolutos de los determinantes de las

transformaciones. Adicionalmente, al conjunto de coeficientes y probabilidades de las transformaciones de un IFS se le llama “código del IFS” (Barnsley y Sloan, 1988).

Para ilustrar el método de Barnsley de mejor manera, se puede utilizar el triángulo de Sierpinski (Fig. 6) como ejemplo. En este caso, se puede observar que la figura se compone por tres triángulos a escala $1/2$ que la cubren totalmente, por lo que la dimensión de ésta es: $D = \ln 3 / \ln 2 \approx 1.58$. Lo anterior también indica que el IFS de esta figura consiste en tres transformaciones, las cuales se representan por: el triángulo de la izquierda T_1 , el triángulo de la derecha T_2 , y el triángulo de arriba T_3 . Matemáticamente, estas transformaciones se expresan de la siguiente manera:

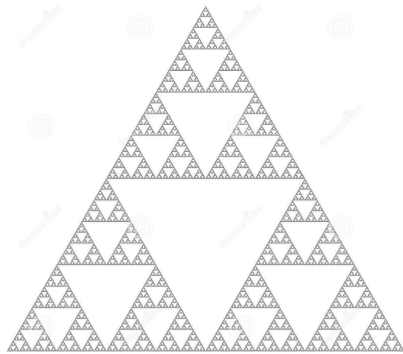


Figura 6: Triángulo de Sierpinski.

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

En este caso, dado que las matrices de las transformaciones son las mismas (lo cual implica que los determinantes son iguales entre sí), la probabilidad para escoger cada una de las transformaciones es de $p = 1/3$.

En esta sección se aplica el método de Barnsley para modelar la galaxia espiral M-51, también conocida como “Messier 51”, o la “Galaxia Remolino” (Fig. 7). M-51 se encuentra en la constelación Canes Venatici, a 31 millones de años luz de la Tierra (Garner, 2017). Debido a que ésta se encuentra relativamente cerca y prácticamente no tiene inclinación, las imágenes que se han tomado de ella presentan una resolución alta y muestran su estructura espiral de manera muy clara. Por ello, se eligió esta galaxia para modelarla. Los resultados obtenidos se reportan en la subsección siguiente.

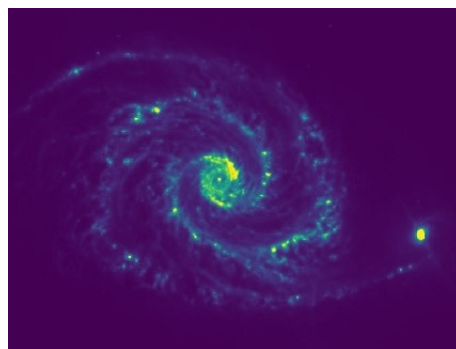


Figura 7: Messier 51.

3.2. Modelación de la Galaxia Espiral M-51

Para modelar la galaxia M-51 primero fue necesario realizar un proceso de filtrado. Para realizar esto, se tomaron los datos de una imagen FITS proveniente de observaciones astronómicas a 8 micras, tomadas con la cámara IRAC en el telescopio espacial Spitzer (Fazio y cols., 2004), y se filtraron los 100 000 puntos más brillantes. Esto se hizo con el fin de remover parte del ruido de fondo y, por lo tanto, poder generar un mejor modelo. Por simplicidad, únicamente se tomaron las posiciones de este conjunto de puntos (ignorando la intensidad de cada uno); lo cual al graficarlo toma la forma siguiente:

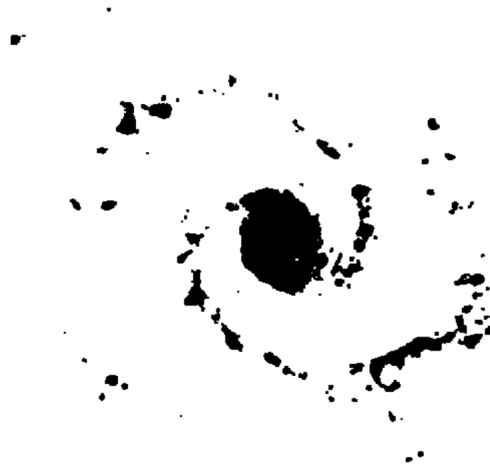


Figura 8: Filtrado de M-51.

Posteriormente, se hizo uso del método de Barnsley implementado en el lenguaje Wolfram Mathematica para modelar M-51. Sin embargo, esto se hizo a través de dos caminos cuya principal diferencia se encuentra en el origen de las transformaciones afines que se utilizaron para mapear la figura inicial en sus partes similares.

En la primera forma de realizar la simulación ("Sim_1"), se comenzó por obtener las coordenadas en píxeles de distintos puntos de la Fig. 8. Específicamente, se tomaron las coordenadas de tres puntos: el centro de la galaxia, la posición del brazo que se encuentra directamente arriba del centro (norte), y la posición del brazo que se encuentra directamente abajo del centro (sur). A continuación, se postularon tres sistemas de ecuaciones con el fin de determinar las tres transformaciones afines que mapean la figura de la galaxia en sus partes hipotéticamente similares. Cabe resaltar que estas transformaciones son: una contracción y rotación para formar la espiral, una contracción y traslación para el brazo norte, y una contracción y traslación para el brazo sur. El código IFS para este camino resultó ser el siguiente:

W	a	b	c	d	e	f	p
1	0.167	0	0.045	0.179	372.38	409.61	0.033
2	0.167	0	0.045	0.179	387.39	295.61	0.033
3	0.865	0.315	-0.315	0.865	-82.61	202.30	0.934

Figura 9: Código IFS de la simulación cuyas transformaciones son obtenidas a través de sistemas de ecuaciones.

En donde la transformación W_i es elegida con una probabilidad p_i y se puede visualizar de la siguiente manera:

$$W_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$$

Ya habiendo obtenido el código IFS, se hizo uso del método de Barnsley con 150 000 iteraciones para obtener un primer resultado, el cual debido a la escala, tiene que ser ampliado para poder compararse con la galaxia real. El resultado final de la simulación de M-51 utilizando el primer camino es:

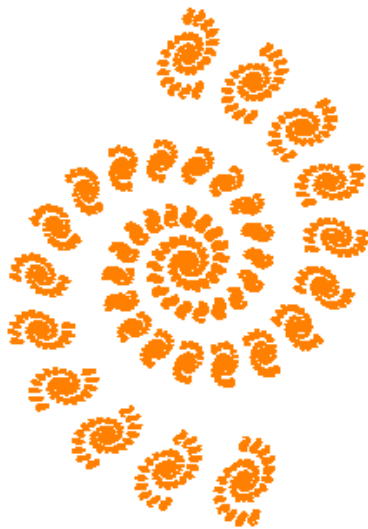


Figura 10: Simulación de M-51 obteniendo las transformaciones mediante sistemas de ecuaciones.

Por otro lado, la segunda forma de generar esta simulación ("Sim.2") consiste en utilizar un programa adicional llamado *IFSLab*. Este software permite dibujar la figura que se desea modelar y regresa las transformaciones afines que permiten generar la figura. En este caso, se utilizaron las mismas tres transformaciones (con valores distintos), las cuales fueron trasladadas a Wolfram Mathematica para aplicar el método de Barnsley con 150 000 iteraciones. El código IFS para este método está dado por:

W	a	b	c	d	e	f	p
1	0.136	0	0	0.136	0.588	0.442	0.01
2	0.136	0	0	0.136	0.306	0.053	0.01
3	0.889	-0.177	0.175	0.886	0.108	-0.069	0.98

Figura 11: Código IFS de la simulación cuyas transformaciones son obtenidas a través de *IFSLab*.

Sin embargo, dado que el dibujo de *IFSLab* se realiza de forma manual, las proporciones de la simulación no son del todo exactas; debido a esto, se prosiguió ajustando el conjunto de puntos resultante de la simulación. El resultado final de la simulación de M-51 utilizando el segundo camino es:

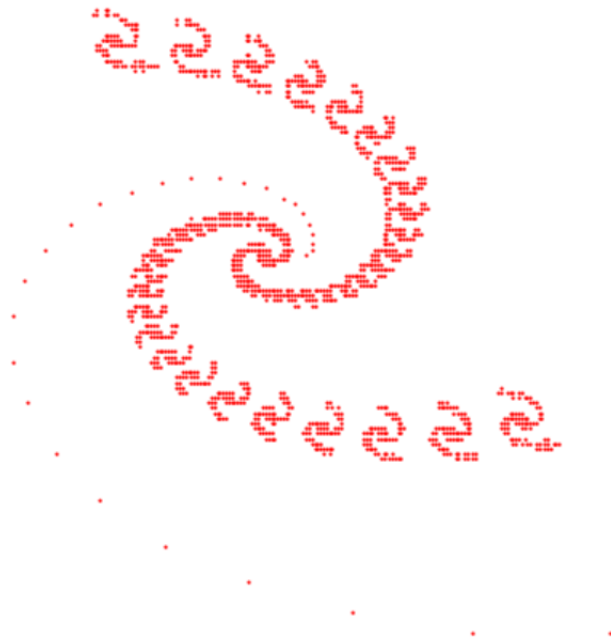


Figura 12: Simulación de M-51 obteniendo las transformaciones a través de *IFSLab*.

3.3. Discusión

Para determinar la efectividad de la simulaciones, uno puede sobreponer las simulaciones con la imagen filtrada de M-51. En el caso de Sim_1, esta comparación resulta:



Figura 13: Comparación física de Sim_1 y el filtrado de M-51.

mientras que para Sim_2, la comparación está dada por:

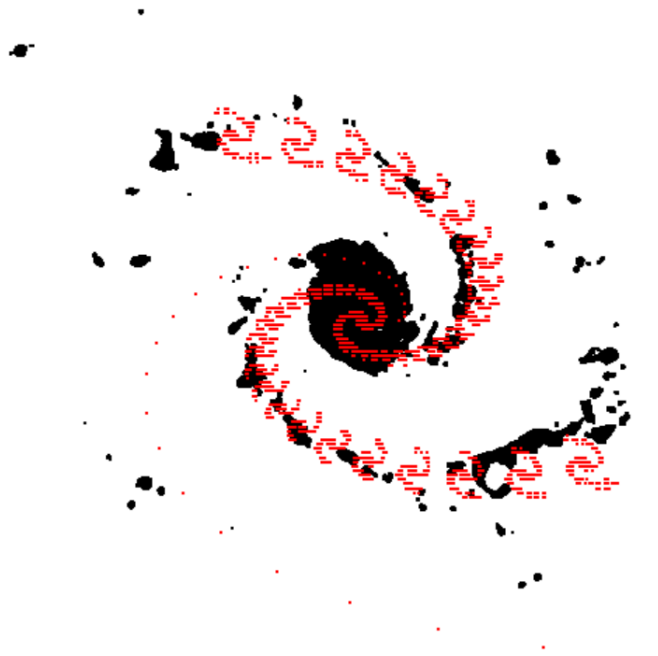


Figura 14: Comparación física de Sim_2 y el filtrado de M-51.

En el caso de la Fig. 13, se puede notar que Sim_1 se ajusta de buena manera a M-51; específicamente, los centros de cada contracción coinciden con las posiciones de los brazos. Por otra parte, en la Fig. 14 es destacable que mientras que las contracciones de Sim_2 se ajustan a M-51, sus centros no siempre lo logran; además, es notable que existe

una zona cercana al centro de la galaxia la cual Sim_2 no llega a modelar. Por esta razón, se puede decir desde un punto de comparación físico, Sim_1 modela mejor a M-51.

Sin embargo, para contar con un criterio adicional de comparación, se calcula la dimensión fractal de las imágenes obtenidas en cada simulación y se compara con la dimensión de la imagen de M-51. En este caso, se utilizó el método de Gaylord y Wellin (1995) debido a la naturaleza autoafín de la galaxia. Este modelo se detalla en el Apéndice. Para la imagen de M-51, se obtuvo una dimensión fractal de 1.40181, mientras que la dimensión de Sim_1 resultó ser de 1.01485, y la de Sim_2 de 1.44007. Esto muestra que la dimensión de Sim_2 se aproxima mejor a la dimensión de la imagen de M-51.

Notablemente, los conjuntos producidos por el método de Barnsley tienen propiedades de optimización y simetría. De acuerdo con Barnsley (1993), si $w_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son transformaciones afines contractivas de un IFS, $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ es el conjunto de subconjuntos compactos no-vacíos de \mathbb{R}^2 , y $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ es la función definida por:

$$W(B) = \cup_{n=1}^N w_n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2),$$

donde N es el número total de transformaciones afines. El atractor A (definido como el conjunto de valores numéricos hacia los cuales un sistema dinámico tiende a evolucionar) del sistema iterativo de transformaciones afines $\{w_n\}_{n=1}^N$, tiene las siguientes propiedades:

1. A es el conjunto fijo de W :

$$A = W(A) = \cup_{n=1}^N w_n(A)$$

y por lo tanto W es una simetría de A .

2. Si d_H es la métrica de Hausdorff, la cual mide la distancia entre dos elementos de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ (Barnsley, 1993). De manera general, sean X y Y dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico, la distancia de Hausdorff se define como (Rockafellar y Wets, 2009):

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \left[\inf_{y \in Y} d(x, y) \right], \sup_{y \in Y} \left[\inf_{x \in X} d(x, y) \right] \right\}$$

En este caso, $d_H(A, W(A)) = 0$ y por lo tanto la función $d_H(X, W(X))$ con dominio $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, y con valores reales, alcanza su mínimo absoluto en $X = A$.

Entonces el atractor A es el conjunto fijo de la transformación W , A tiene como simetría a W , y es el conjunto donde la función $d_H(X, W(X))$ alcanza su mínimo absoluto.

4. Optimización y Simetría en Teoría de Juegos

4.1. Equilibrios de Nash en Juegos No-Cooperativos

En la economía, un “juego” se define como un conjunto de eventos que resulta a partir de las decisiones, o acciones, de dos a más jugadores (McNulty, 2019). La teoría de juegos estudia las estrategias y opciones de los participantes dentro de un juego, por lo que en esta sección se analiza un método basado en la geometría para hallar puntos críticos (equilibrios de Nash) en cualquier tipo de juego que involucre dos jugadores y dos opciones o respuestas, mediante herramientas de optimización. Es notable que este método demuestra que, para cualquier juego de este tipo, existe al menos un equilibrio de Nash. Además, este método no depende de la simetría del juego; sin embargo, el análisis de los juegos simétricos respecto al cambio de jugadores brinda resultados que valen la pena mencionar. No obstante, antes de mostrar estos resultados, es necesario definir algunos conceptos introductorios.

En teoría de juegos, un “equilibrio” se refiere a un conjunto de planes de acción para cada jugador tal que ninguno de ellos quiera cambiar su jugada dadas las estrategias de los otros participantes. Cada jugador puede mezclar sus estrategias por medio de la asignación de pesos probabilísticos de manera que la suma de todos sea igual a 1. Para las estrategias mixtas, un “equilibrio de Nash” es aquel en donde la mezcla probabilística de un cierto jugador es la mejor respuesta a la mezcla probabilística de los otros (Dickhaut y Kaplan, 1993). Otra manera de definir este tipo de equilibrio es mediante los valores de juego de todos los jugadores; para cada involucrado, su valor de juego se define como la utilidad esperada que este tiene dadas las estrategias de todos los participantes.

Como ya fue mencionado con antelación, en esta sección se analizará el caso en particular de un juego con dos jugadores los cuales tienen únicamente dos opciones, y se utilizará la notación del artículo *A Program for Finding Nash Equilibria* (Dickhaut y Kaplan, 1993) para definir todos los conceptos previamente mencionados. De manera gráfica este juego se puede representar de la siguiente manera:

		B	
		b ₁	b ₂
A	a ₁	(x ₁₁ , y ₁₁)	(x ₁₂ , y ₁₂)
	a ₂	(x ₂₁ , y ₂₁)	(x ₂₂ , y ₂₂)

Figura 15: Juego de dos jugadores con dos opciones.

En esta figura, las x representan las utilidades del jugador A y las y las del jugador B dadas las elecciones de ambos jugadores.

Además, se definen los pesos probabilísticos de la siguiente manera para el jugador A:

$$M_A = \{(p_1, p_2) | p_1 + p_2 = 1, p_1, p_2 \geq 0\}$$

mientras que para el jugador B:

$$M_B = \{(q_1, q_2) | q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 \geq 0\}$$

en donde, en ambos casos, el sub-índice representa el número de respuesta.

Utilizando el concepto anterior, se definen los valores de juego de los jugadores A y B, para este caso en particular, de la siguiente manera:

$$V_A((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = p_1q_1x_{11} + p_1q_2x_{12} + p_2q_1x_{21} + p_2q_2x_{22}$$

$$V_B((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = p_1q_1y_{11} + p_1q_2y_{12} + p_2q_1y_{21} + p_2q_2y_{22}$$

Estas funciones se utilizan para definir un equilibrio de Nash. El conjunto de probabilidades $((p_1^*, p_2^*), (q_1^*, q_2^*))$ es un equilibrio de Nash si y solo si se cumplen ambas condiciones:

$$V_A((p_1^*, p_2^*), (q_1^*, q_2^*)) \geq V_A((p_1, p_2), (q_1^*, q_2^*)) \forall (p_1, p_2) \in M_A$$

y

$$V_B((p_1^*, p_2^*), (q_1^*, q_2^*)) \geq V_B((p_1^*, p_2^*), (q_1, q_2)) \forall (q_1, q_2) \in M_B$$

En esta sección se propone un método basado en la geometría para hallar equilibrios de Nash en cualquier tipo de juego que involucre dos jugadores y dos opciones o respuestas, sin importar la simetría que tenga. Este método describe los equilibrios de Nash y prueba que en este tipo de juegos siempre existirá al menos un equilibrio. Adicionalmente, analizando los juegos simétricos por este método, se demuestra que existe al menos un equilibrio de Nash simétrico y determina el conjunto de ellos. Cabe resaltar que los resultados presentados a continuación también se encuentran publicados en el artículo: *Una demostración elemental de la existencia de equilibrios de Nash para juegos de dos personas con dos estrategias* (Padrón Molina, Romero-Meléndez, y Zeballos Rebaza, 2018).

4.2. Método Geométrico en el Caso General

Para determinar el primer componente de los equilibrios de Nash, es necesario considerar el valor del juego del jugador A para cada estrategia probabilística del jugador B. Esto se realiza con el propósito de encontrar aquellas probabilidades del jugador A que hagan cumplir la primer parte de la definición de equilibrio de Nash, es decir, que maximicen su ganancia. Acorde a lo anterior, se tiene que $V_A((p_1, p_2), (q_1^*, q_2^*)) = p_1q_1^*x_{11} + p_1q_2^*x_{12} + p_2q_1^*x_{21} + p_2q_2^*x_{22} = p_1q_1^*x_{11} + p_1(1 - q_1^*)x_{12} + (1 - p_1)q_1^*x_{21} + (1 - p_1)(1 - q_1^*)x_{22}$ dado que $p_2 = 1 - p_1$ y $q_2^* = 1 - q_1^*$. Como consecuencia de que la expresión anterior tiene únicamente dos variables, esta se puede expandir y reescribir como la ecuación de una recta:

$$Y = (q_1^*(x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22}) + x_{12} - x_{22})X + q_1^*(x_{21} - x_{22}) + x_{22}$$

en donde Y y X representan $V_A((p_1, p_2), (q_1^*, q_2^*))$ y p_1 respectivamente. Para analizar esta expresión con mayor facilidad, se remplazan los términos $x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22}$ por Δ_1x , y $x_{12} - x_{22}$ por Δ_2x . La ecuación simplificada se expresa de la siguiente manera:

$$Y = (q_1^* \Delta_1x + \Delta_2x)X + q_1^*(x_{21} - x_{22}) + x_{22} \quad (10)$$

A partir de esta ecuación, se analiza el término Δ_1x en tres casos distintos: cuando es mayor, menor, o igual a cero. Además, para los primeros dos casos se estudia el cociente $-\Delta_2x/\Delta_1x$ (el cual surge al considerar el signo de la pendiente de la recta representada en la ecuación 10) de tres maneras distintas: que este sea menor a cero, mayor a uno, o que se encuentre en el intervalo cerrado $[0,1]$. Por otro lado, en los tres sub-casos del caso $\Delta_1x = 0$ se analiza cuando Δ_2x es menor, mayor, o igual a cero. A continuación se desglosarán los casos y sub-casos previamente señalados.

Caso 1: $\Delta_1x > 0$

a) $-\Delta_2x/\Delta_1x < 0$: En este primer sub-caso, al multiplicar ambos lados de la desigualdad por $-\Delta_1x$ se obtiene que $\Delta_2x > 0$; esto conlleva a que la pendiente de recta expresada en la ecuación 10, $q_1^* \Delta_1x + \Delta_2x$, será positiva lo cual implica que el valor máximo de Y en este caso va a surgir cuando $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

b) $-\Delta_2x/\Delta_1x > 1$: Para este sub-caso, si en la desigualdad se multiplica por Δ_1x en ambos lados se obtiene $-\Delta_2x > \Delta_1x$, lo cual se puede reescribir como $\Delta_1x + \Delta_2x < 0$. Como este término es mayor o igual a $q_1^* \Delta_1x + \Delta_2x$, la pendiente será menor a cero, lo cual señala que Y resultará máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

c) $0 \leq -\Delta_2x/\Delta_1x \leq 1$: Este sub-caso resulta más laborioso de analizar dado que se tiene que considerar el valor de q_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2x/\Delta_1x$; además, es necesario tener en mente que, como consecuencia del intervalo en el que se está trabajando, $\Delta_2x \leq 0$. Habiendo mencionado lo anterior, se tienen que considerar tres posibilidades adicionales:

I) $q_1^* < -\Delta_2x/\Delta_1x$: Esta desigualdad se puede reescribir de la forma $q_1^* \Delta_1x < -\Delta_2x$ lo cual significa que la pendiente de la recta expresada en la ecuación 10 resultará negativa por lo que, de manera similar al sub-caso b), Y resultará máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, -\Delta_2x/\Delta_1x]$

II) $q_1^* > -\Delta_2x/\Delta_1x$: Al reescribir la desigualdad como $q_1^* \Delta_1x > -\Delta_2x$ se puede notar que la pendiente de la recta expresada por la ecuación 10 resultará positiva por lo que Y resultará máximo en $X = p_1 = 1$, como en el sub-caso a), $\forall q_1^* \in (-\Delta_2x/\Delta_1x, 1]$

III) $q_1^* = -\Delta_2x/\Delta_1x$: Aquí, la pendiente, $q_1^* \Delta_1x + \Delta_2x$, es igual a 0, lo cual implica que Y será un máximo $\forall X = p_1 \in [0, 1]$ y tendrá el valor de $((x_{22} - x_{12})(x_{21} - x_{22})/(x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22})) + x_{22}$.

Caso 2: $\Delta_1x < 0$

d) $-\Delta_2x/\Delta_1x < 0$: En este sub-caso, al multiplicar la desigualdad por $-\Delta_1x$ en ambos lados, se obtiene que $\Delta_2x < 0$; esto conlleva a que la pendiente de la recta expresada en la ecuación 10, $q_1^*\Delta_1x + \Delta_2x$, sea negativa, lo cual lleva a que se alcance un Y máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

e) $-\Delta_2x/\Delta_1x > 1$: Como q_1^* está en el intervalo $[0, 1]$, se cumple que $-\Delta_2x/\Delta_1x > q_1^*$, y esto implica que la pendiente $q_1^*\Delta_1x + \Delta_2x$ es positiva, por lo cual Y alcanzará un máximo en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

f) $0 \leq -\Delta_2x/\Delta_1x \leq 1$: Al igual que en *c)*, en este sub-caso se tiene que considerar el valor de q_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2x/\Delta_1x$; sin embargo, aquí se tendrá: $\Delta_2x \geq 0$. Se analizarán las siguientes tres posibilidades:

IV) $q_1^* < -\Delta_2x/\Delta_1x$: Esta desigualdad se puede reescribir como $q_1^*\Delta_1x > -\Delta_2x$ lo cual indica que la pendiente de la recta expresada en la ecuación 10 es positiva. Por esta razón, de manera similar al sub-caso *e)*, Y resultará máximo en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, -\Delta_2x/\Delta_1x)$

V) $q_1^* > -\Delta_2x/\Delta_1x$: Reescribiendo esta desigualdad como $q_1^*\Delta_1x < -\Delta_2x$ se puede deducir que la pendiente de la recta expresada en la ecuación 10 es negativa. Por esta razón, de manera similar al sub-caso *a)*, Y será un máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in (-\Delta_2x/\Delta_1x, 1]$.

VI) $q_1^* = -\Delta_2x/\Delta_1x$: Este resultado es análogo a *III*.

Caso 3: $\Delta_1x = 0$

g) $\Delta_2x < 0$: En este sub-caso, la pendiente $q_1^*\Delta_1x + \Delta_2x$ es negativa y por lo tanto Y alcanza un máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

h) $\Delta_2x > 0$: La pendiente de la recta expresada en la ecuación 10 resulta positiva por lo que el máximo valor de Y se encontrará en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

i) $\Delta_2x = 0$: Este caso resulta en $q_1^*\Delta_1x + \Delta_2x = 0$ por lo que Y será un máximo $\forall X = p_1 \in [0, 1], \forall q_1^* \in [0, 1]$. Adicionalmente, al igualar Δ_2x a cero y despejar este resultado en Δ_1x , se puede deducir que este caso sucede cuando $x_{12} = x_{22}$ y $x_{11} = x_{21}$.

Por otro lado, para encontrar el segundo componente de los equilibrios de Nash, se tiene que tomar en cuenta el valor del juego del jugador B para cada estrategia probabilística del jugador A, lo cual hace cumplir la segunda parte de la definición de equilibrio de Nash. De acuerdo con lo anterior, se tiene que $V_B((p_1^*, p_2^*), (q_1, q_2)) = p_1^*q_1y_{11} + p_1^*q_2y_{12} + p_2^*q_1y_{21} + p_2^*q_2y_{22} = p_1^*q_1y_{11} + p_1^*(1 - q_1)y_{12} + (1 - p_1^*)q_1y_{21} + (1 - p_1^*)(1 - q_1)y_{22}$ dado que $p_2^* = 1 - p_1^*$ y $q_2 = 1 - q_1$. Al igual que en la ecuación del valor del juego del jugador A, esta ecuación se puede reescribir como la ecuación de

una recta:

$$Y' = (p_1^*(y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22}) + y_{21} - y_{22})X' + p_1^*(y_{12} - y_{22}) + y_{22}$$

donde Y' y X' representan $V_B((p_1^*, p_2^*), (q_1, q_2))$ y q_1 en ese orden. Para facilitar el análisis de esta ecuación, se remplazan los términos $y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22}$ por $\Delta_1 y$, y $y_{21} - y_{22}$ por $\Delta_2 y$, por lo que la ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$Y' = (p_1^* \Delta_1 y + \Delta_2 y)X' + p_1^*(y_{12} - y_{22}) + y_{22} \quad (11)$$

De manera similar a la ecuación 10, se estudia el término $\Delta_1 y$ en tres casos generales distintos: cuando es mayor, menor, o igual a cero. Además, para los primeros dos casos se analiza el cociente $-\Delta_2 y / \Delta_1 y$ (el cual se deriva a partir de la comparación entre la pendiente y los valores 0 y 1) de tres maneras distintas: que este sea menor a cero, mayor a uno, o que se encuentre en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Por otra parte, en los tres sub-casos del caso en donde $\Delta_1 y = 0$, se analiza lo que ocurre cuando $\Delta_2 y$ es menor, mayor, o igual a cero. A continuación se desglosarán los casos y sub-casos previamente mencionados y se describirán los resultados obtenidos al utilizar argumentos similares a los usados en el análisis de la ecuación 10 (se reiniciará la numeración utilizada con antelación por lo que todas la referencias realizadas a partir de este punto serán en base a los casos de la ecuación 11).

Caso 1: $\Delta_1 y > 0$

a) $-\Delta_2 y / \Delta_1 y < 0$: Y' será máximo para el valor $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

b) $-\Delta_2 y / \Delta_1 y > 1$: Y' alcanzará un máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

c) $0 \leq -\Delta_2 y / \Delta_1 y \leq 1$: En este sub-caso, se tiene que considerar el valor de p_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2 y / \Delta_1 y$; cabe notar que como consecuencia del intervalo en el que se trabaja, $\Delta_2 y \leq 0$. Habiendo señalado lo anterior, se consideraron tres posibilidades adicionales:

I) $p_1^* < -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, -\Delta_2 y / \Delta_1 y)$

II) $p_1^* > -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in (-\Delta_2 y / \Delta_1 y, 1]$

III) $p_1^* = -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo $\forall X' = q_1 \in [0, 1]$ y es igual a $((y_{22} - y_{21})(y_{12} - y_{22}) / (y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22})) + y_{22}$.

Caso 2: $\Delta_1 y < 0$

d) $-\Delta_2 y / \Delta_1 y < 0$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

e) $-\Delta_2 y / \Delta_1 y > 1$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

f) $0 \leq -\Delta_2 y / \Delta_1 y \leq 1$: Al igual que en c), en este sub-caso se tiene que considerar el valor de p_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2 y / \Delta_1 y$; sin embargo, en este sub-caso se tiene que: $\Delta_2 y \geq 0$. Se analizaron las siguientes tres posibilidades:

IV) $p_1^* < -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, -\Delta_2 y / \Delta_1 y)$

V) $p_1^* > -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in (-\Delta_2 y / \Delta_1 y, 1]$

VI) $p_1^* = -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo $\forall X' = q_1 \in [0, 1]$ y es igual a $((y_{22} - y_{21})(y_{12} - y_{22}) / (y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22})) + y_{22}$.

Caso 3: $\Delta_1 y = 0$

g) $\Delta_2 y < 0$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

h) $\Delta_2 y > 0$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

i) $\Delta_2 y = 0$: Y' es máximo $\forall X' = q_1 \in [0, 1], \forall p_1^* \in [0, 1]$. En este sub-caso $y_{21} = y_{22}$ y $y_{11} = y_{12}$.

Ahora bien, para determinar los equilibrios de Nash se tiene que juntar la información de los pesos probabilísticos que maximicen las ganancias o minimicen las pérdidas de los dos jugadores. Por ejemplo, si para los Δx se tiene que $\Delta_1 x > 0$ y $0 \leq -\Delta_2 x / \Delta_1 x \leq 1$ y para los Δy se tiene que $\Delta_1 y > 0$ y $-\Delta_2 y / \Delta_1 y > 1$, se obtienen tres casos en donde se pueden encontrar equilibrios de Nash para p_1 y un caso para q_1 , el cual determina que $q_1 = 0$. Para determinar el componente p_1 del equilibrio, se tiene que estudiar su comportamiento en función de q_1 ; del mismo modo, para encontrar el componente q_1 , se analiza su comportamiento en función de p_1 . En este ejemplo, q_1 resulta sencillo de analizar dado que solo tiene un caso mientras que para determinar el comportamiento de p_1 , se tienen que considerar los casos dependientes del cociente $-\Delta_2 x / \Delta_1 x$. El análisis de estas variables se puede ilustrar mejor en una gráfica p_1 vs. q_1 como se muestra en la figura 16. Lo que se busca con esto es encontrar los puntos en donde ambos p_1 y q_1 coincidan siendo máximos, lo cual, de manera visual, se representa por las intersecciones entre las dos gráficas. El último paso para determinar los equilibrios de Nash es utilizar los puntos encontrados en el paso anterior para encontrar el segundo componente de cada peso probabilístico para de este modo establecer el equilibrio, el cual se presentará de la forma $((p_1, 1-p_1), (q_1, 1-q_1))$; en el caso específico de la figura 16, el equilibrio de Nash es $((0, 1), (0, 1))$.

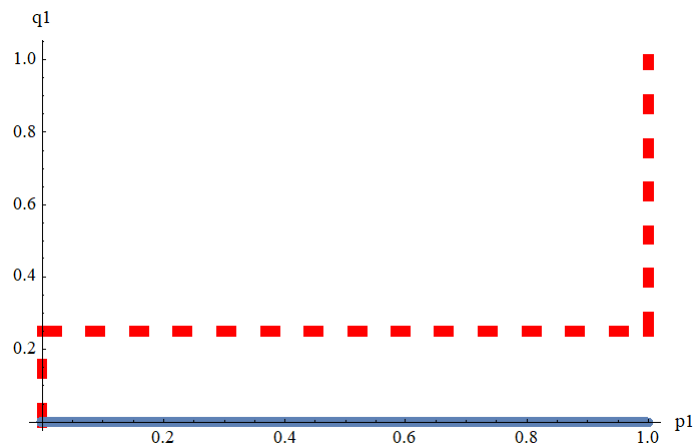


Figura 16: Ejemplo de equilibrio de Nash.

Este método muestra que sin importar el juego, siempre se pueden maximizar los valores del juego de los jugadores A y B al menos de una manera; por lo tanto, se demuestra que para cualquier juego de dos jugadores con dos opciones, existe al menos un equilibrio de Nash. Además, se conoce el conjunto de valores de p_1^* y q_1^* donde se alcanzan los equilibrios de Nash. Ahora bien, al aplicar este método al caso particular de los juegos simétricos surgen resultados interesantes, los cuales se analizarán en la subsección siguiente.

4.3. Método Geométrico en el Caso Simétrico

Un juego simétrico se refiere a aquel en donde si los jugadores cambian de lugar, es decir, si el jugador A se vuelve el B y el jugador B se vuelve el A, se obtienen los mismos valores del juego que de manera original. Por lo anterior, un juego simétrico debe cumplir con las condiciones: $x_{11} = y_{11}, x_{12} = y_{21}, x_{21} = y_{12}, x_{22} = y_{22}$. De manera gráfica esto se representa como:

		B	
		b1	b2
A	a1	(x_{11}, x_{11})	(x_{12}, x_{21})
	a2	(x_{21}, x_{12})	(x_{22}, x_{22})

Figura 17: Juego simétrico de dos jugadores con dos opciones.

Para analizar este tipo de juego se hace uso de la misma metodología propuesta en el caso general, no obstante, su estudio resulta ser más sencillo dado que, al considerar las condiciones mencionadas, se puede deducir que $\Delta_1 x = \Delta_1 y$ y $\Delta_2 x = \Delta_2 y$. Habiendo mencionado lo anterior, se hace uso de las ecuaciones 10 y 11 para estudiar este tipo de juego, por lo que se construyen tres casos para $\Delta_1 x$ y $\Delta_1 y$: que sean mayores, menores, o iguales a cero. Además, para los primeros dos casos se analizan los cocientes $-\Delta_2 x / \Delta_1 x$ y $-\Delta_2 y / \Delta_1 y$ cuando estos sean: menores a cero, mayores a uno, o se

encuentren en el intervalo cerrado $[0,1]$. Por otro lado, para el tercer caso se examina cuando Δ_2x y Δ_2y sean: mayores, menores, o iguales a cero. A continuación se desglosan estos casos.

Caso 1: $\Delta_1x = \Delta_1y > 0$

a) $-\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y < 0$: De acuerdo con el análisis de la ecuación 10, Y resulta máxima en este sub-caso cuando $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$. Del mismo modo, la ecuación 11 muestra que, para este mismo, Y' resulta máxima cuando $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$. Juntando esta información se obtiene que el equilibrio de Nash para este caso es igual a $((1,0),(1,0))$.

b) $-\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y > 1$: De acuerdo con la ecuación 10, para este sub-caso Y alcanza el máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$, mientras que en la ecuación 11, Y' resulta máxima cuando $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$, por lo que en este caso el equilibrio de Nash es igual a $((0,1),(0,1))$.

c) $0 \leq -\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y \leq 1$: En este sub-caso, se tienen que considerar los valores de q_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2x/\Delta_1x$ y de p_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2y/\Delta_1y$. Dado que para cada cociente existen tres posibilidades, estos se tratan por separado.

Para $-\Delta_2x/\Delta_1x$ se obtienen los siguientes resultados:

I) $q_1^* < -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, -\Delta_2x/\Delta_1x)$

II) $q_1^* > -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in (-\Delta_2x/\Delta_1x, 1]$

III) $q_1^* = -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en todo el intervalo $X = p_1 \in [0, 1]$.

Para $-\Delta_2y/\Delta_1y$ se obtienen los siguientes resultados:

I') $p_1^* < -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, -\Delta_2y/\Delta_1y)$

II') $p_1^* > -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in (-\Delta_2y/\Delta_1y, 1]$

III') $p_1^* = -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en todo el intervalo $X' = q_1 \in [0, 1]$.

Al unir estos pedazos de información se pueden encontrar tres equilibrios de Nash: $((0,1),(0,1))$, $((1,0),(1,0))$, $((\frac{-\Delta_2x}{\Delta_1x}, 1 + \frac{\Delta_2x}{\Delta_1x}), (\frac{-\Delta_2x}{\Delta_1x}, 1 + \frac{\Delta_2x}{\Delta_1x}))$ (dado que $\frac{-\Delta_2y}{\Delta_1y} = \frac{-\Delta_2x}{\Delta_1x}$).

Caso 2: $\Delta_1x = \Delta_1y < 0$

d) $-\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y < 0$: A partir del análisis de la ecuación 10, en este sub-caso Y resulta máxima cuando $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$. De la misma manera, la ecuación 11 muestra que, en este sub-caso, Y' alcanza el máximo cuando $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$. Con esta información se obtiene un equilibrio de Nash en $((0,1),(0,1))$.

e) $-\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y > 1$: La ecuación 10 indica que para este sub-caso Y máxima se encontrará en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$. De igual manera, al estudiar la ecuación 11, Y' resulta máxima cuando $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$, por lo que se determina que el equilibrio de Nash para este sub-caso será $((1,0),(1,0))$.

f) $0 \leq -\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y \leq 1$: Al igual que en *c*), para analizar este sub-caso se tienen que considerar los valores de q_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2x/\Delta_1x$ y de p_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2y/\Delta_1y$. A continuación se presentan las tres posibilidades generadas por los cocientes de los deltas:

Para $-\Delta_2x/\Delta_1x$ se obtienen los siguientes resultados:

IV) $q_1^* < -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, -\Delta_2x/\Delta_1x)$

V) $q_1^* > -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in (-\Delta_2x/\Delta_1x, 1]$

VI) $q_1^* = -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en todo el intervalo $X = p_1 \in [0, 1]$.

Para $-\Delta_2y/\Delta_1y$ se obtienen los siguientes resultados:

IV') $p_1^* < -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, -\Delta_2y/\Delta_1y)$

V') $p_1^* > -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in (-\Delta_2y/\Delta_1y, 1]$

VI') $p_1^* = -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en todo el intervalo $X' = q_1 \in [0, 1]$.

Al unir estos pedazos de información se pueden encontrar tres equilibrios de Nash: $((0,1),(0,1)), ((1,0),(1,0)), ((-\frac{\Delta_2x}{\Delta_1x}, 1 + \frac{\Delta_2x}{\Delta_1x}), (-\frac{\Delta_2y}{\Delta_1y}, 1 + \frac{\Delta_2y}{\Delta_1y}))$ (dado que $\frac{-\Delta_2y}{\Delta_1y} = \frac{-\Delta_2x}{\Delta_1x}$).

Caso 3: $\Delta_1x = \Delta_1y = 0$

g) $\Delta_2x = \Delta_2y < 0$: Al estudiar la ecuación 10, en este sub-caso Y resulta máxima cuando $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$. De igual manera, mediante la ecuación 11 se puede determinar que en este sub-caso, Y' alcanza el máximo cuando $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$. Esta información indica que para este sub-caso se obtiene un equilibrio de Nash en $((0,1),(0,1))$.

h) $\Delta_2x = \Delta_2y > 0$: Para este sub-caso, la ecuación 10 indica que Y máxima se encontrará en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$. Similarmente, al estudiar la ecuación 11, Y' resulta máxima cuando $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$, por lo que al juntar la información se determina que el equilibrio de Nash para este sub-caso será $((1,0),(1,0))$.

i) $\Delta_2x = \Delta_2y = 0$: Mediante el estudio de las ecuaciones 10 y 11 en este sub-caso, se determina que Y es un máximo en todo el intervalo $X = p_1 \in [0, 1] \forall q_1^* \in [0, 1]$, mientras que Y' lo será en todo el intervalo $X' = q_1 \in [0, 1] \forall p_1^* \in [0, 1]$. Esto implica que $((p_1, 1 - p_1), (q_1, 1 - q_1))$ será un equilibrio de Nash $\forall p_1, q_1 \in [0, 1]$. Además, realizando el análisis de igualdades se puede determinar que este caso surge cuando se realiza un juego con el siguiente formato:

		B	
		b ₁	b ₂
A	a ₁	(w, w)	(z, w)
	a ₂	(w, z)	(z, z)

Figura 18: Juego simétrico en el que se da el caso i).

Así pues, al considerar los equilibrios de Nash encontrados en este tipo de juego, se puede notar que en todos los casos y sub-casos hay al menos un equilibrio simétrico, es decir que si el jugador A cambia a ser el B, y el jugador B se vuelve el A, se obtiene el mismo equilibrio que si no se intercambian. Por lo tanto, este método demuestra que para todo juego simétrico de dos jugadores y dos opciones existe al menos un equilibrio de Nash simétrico.

4.4. Discusión

Para dar validez al modelo anterior, se resolverá un ejemplo llamado “la Batalla de los Sexos” obtenido del artículo *A Program for Finding Nash Equilibria* (Dickhaut & Kaplan, 1993). En este ejemplo hay dos jugadores, Ed y Jan, quienes están planeando asistir al cine o a un partido de fútbol. Ed prefiere la primera opción mientras que Jan la segunda; sin embargo, ambas personas quieren estar juntas. Expresado de manera gráfica, este juego se representa de la siguiente manera:

		Jan	
		cine	fútbol
Ed	cine	(2, 1)	(0, 0)
	fútbol	(0, 0)	(1, 2)

Figura 19: Juego de “la Batalla de los Sexos”.

Teniendo esta información, se ingresan las utilidades correspondientes de cada jugador en las ecuaciones 10 y 11 para reescribirlas de manera:

$$Y = (3q_1^* - 1)X - q_1^* + 1$$

$$Y' = (3p_1^* - 2)X' - 2p_1^* + 2$$

Al analizar la primera ecuación, se encuentra que $\Delta_1 x = 3$ y $-\frac{\Delta_2 x}{\Delta_1 x} = 1/3$ por lo que es necesario considerar el sub-caso *c*) y sus tres posibilidades para encontrar los máximos de Y :

- I) $q_1^* < 1/3 \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 0$
- II) $q_1^* > 1/3 \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 1$
- III) $q_1^* = 1/3 \Rightarrow Y$ alcanza su máximo $\forall X = p_1 \in [0, 1]$

Del mismo modo, al estudiar la segunda ecuación, se obtiene que $\Delta_1 y = 3$ y $-\frac{\Delta_2 y}{\Delta_1 y} = 2/3$; esto implica que se tendrá que considerar el mismo sub-caso, *c*), pero respecto a la ecuación 11 para maximizar Y' :

- I') $p_1^* < 2/3 \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 0$
- II') $p_1^* > 2/3 \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 1$
- III') $p_1^* = 2/3 \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo $\forall X' = q_1 \in [0, 1]$

Finalmente, para determinar los equilibrios de Nash, es necesario juntar los resultados del análisis de las dos ecuaciones. El inciso *I*) indica que $p_1 = 0$ es máximo para $q_1^* < 1/3$ mientras que del inciso *I'*) muestra que $q_1 = 0$ es máximo para $p_1^* < 2/3$; al considerar $p_1^* = p_1 = 0$ y $q_1^* = q_1 = 0$ y sustituirlos en estos incisos, se puede observar que ambas condiciones se cumplen, por lo que existe un equilibrio de Nash en $((0,1),(0,1))$. De manera similar, al estudiar la información restante, se encuentran dos equilibrios de Nash adicionales en: $((1,0),(1,0))$ y $((2/3,1/3),(1/3,2/3))$. Esto se puede comprobar de manera gráfica al analizar el comportamiento de p_1 en función de q_1 y vice-versa como se muestra en la figura 20.

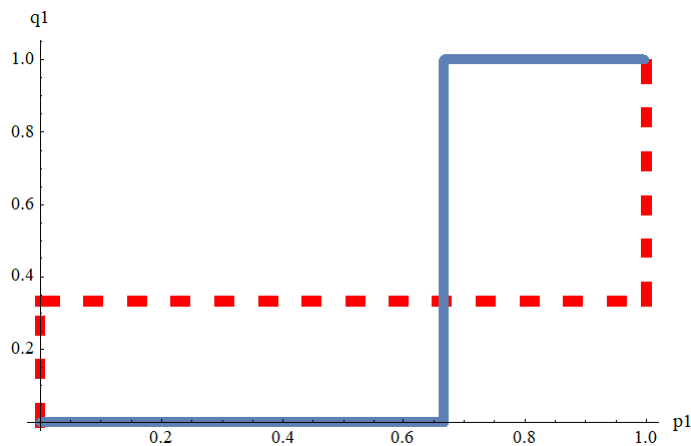


Figura 20: Equilibrios de Nash en el juego de “la Batalla de los Sexos”.

Cabe mencionar que existen diversos métodos que se pueden utilizar para determinar equilibrios de Nash. El primero fue propuesto por John Nash (1950, 1951), quien utilizó el teorema de punto fijo de Brouwer para funciones vectoriales, en su tesis y artículo *Non-Cooperative Games*. Por otra parte, Lemke y Howson (1964) utilizaron el álgebra lineal para demostrar que siempre existe un equilibrio de Nash para juegos bimatriciales (dos jugadores y que la suma no sea igual a cero). Además, en tiempos más recientes, se han desarrollado nuevos algoritmos para determinar los equilibrios como el método semi-suave de Newton (Facchinei, Fischer, y Piccialli, 2009), la programación coevolucionaria-híbrida (Son y Baldick, 2004), o el método estocástico (Vorobeychik y Wellman, 2008).

No se ha encontrado, en la literatura disponible, referencias que traten la demostración de existencia de equilibrios de Nash con un enfoque similar al que se presenta en este trabajo. Si bien el enfoque aquí se basa en el análisis de las pendientes de rectas que son similares a las curvas de mejor respuesta en algunas referencias (por ejemplo, en el libro *Un Primer Curso de Teoría de Juegos* (Gibbons, 1993)), la mayoría de las veces se hace uso de herramientas de optimización avanzada mientras que, en el presente trabajo, el enfoque es totalmente geométrico. En el caso de referencias en las que se prescindió de la optimización, no se encontró el tratamiento de todos los casos posibles para estrategias mixtas como la presentada en esta sección.

5. Conclusiones

En este trabajo se analizaron tres modelos de distintas áreas relacionados con los conceptos de optimización y simetría. El primer problema explorado consistió en determinar las condiciones del triángulo de mayor área inscrito en una circunferencia. La solución encontrada tuvo dos partes, en la primera se dejó fija la base y se optimizó la altura, encontrando como resultado un triángulo isósceles. En la segunda parte, se partió del triángulo isósceles encontrado y se tomó la base como variable para optimizar la función área. Al determinar las condiciones que hacen máxima el área, se obtuvo como resultado un triángulo equilátero, el cual es el más simétrico.

Dado el resultado anterior, uno puede intuir que en general el polígono de n lados inscrito en una circunferencia tiene un área máxima si este es el más simétrico. Dicha hipótesis es correcta y la demostró el matemático griego Zenodoro (Ruiz López, 2015).

El segundo problema tratado consistió en modelar la galaxia M-51 a través del método de compactación de imágenes fractales de Barnsley. Para esto, se utilizó una imagen tomada por el telescopio espacial Spitzer, se filtraron los 100 000 puntos que mostraban mayor flujo, y se calculó su dimensión fractal. Luego se realizaron dos simulaciones (denominadas Sim_1 y Sim_2) para obtener las transformaciones afines que mapeen la figura original. A estas transformaciones se les denomina sistema iterativo de funciones (IFS). La diferencia entre Sim_1 y Sim_2 yace en la manera de obtener el IFS. En ambas simulaciones se hizo uso de tres transformaciones afines: dos de éstas se encargaron de contraer y trasladar la figura inicial a los brazos norte y sur; mientras que la restante se encargó de contraer la imagen total y rotarla. Además, cabe mencionar que para ambas simulaciones se hicieron con 150 000 iteraciones. No obstante, las transformaciones de Sim_1 se obtuvieron a partir de sistemas de ecuaciones cuya lógica se basaba en el posicionamiento de las coordenadas norte, sur y centro; en cambio, las transformaciones de Sim_2 se obtuvieron a partir del programa *IFSLab*.

Se obtuvieron dimensiones fractales de las simulaciones, que son buenas aproximaciones de la dimensión de la imagen de M-51. Cabe resaltar que los conjuntos atractores producidos por este método tienen propiedades de optimización y de simetría.

El tercer y último problema se enmarcó en la teoría de juegos, y se propuso un método basado en la geometría para hallar equilibrios de Nash en cualquier juego de dos jugadores y dos opciones. En este método se analizaron las pendientes de las rectas que representan las funciones de valor de juego con condiciones de equilibrio para encontrar a los mismos. Además, al analizar todas las posibilidades, se demostró que siempre existe al menos un equilibrio de Nash. Mas aún, si se analizan los juegos simétricos al cambio de jugadores de la misma manera, se determina que siempre existe un equilibrio simétrico.

El método utilizado fue puesto a prueba al resolver un juego conocido, el cual se titula “la Batalla de los Sexos”. La solución de este problema utilizando el método geométrico coincide con la encontrada en la literatura. La importancia de este método radica en el

uso de herramientas elementales para encontrar equilibrios y demostrar la existencia de al menos un equilibrio para el tipo de juego estudiado, a diferencia de otros modelos basados en objetos matemáticos más avanzados.

En la solución de los tres problemas anteriores aparecen aspectos de optimización y simetría. El resultado del problema de la sección 2 muestra que, de los triángulos inscritos en una circunferencia, el de mayor área es el más simétrico. En la sección 3, el atractor producido por el método de Barnsley, y que modela la galaxia M-51, tiene propiedades de optimización y simetría relacionadas con una función, cuya definición utiliza las transformaciones de un sistema iterativo de funciones IFS. Por otra parte, los resultados de la sección 4 muestran que en un juego simétrico de dos jugadores con dos opciones, uno de los resultados donde se obtiene la utilidad óptima (en el sentido de Nash) tiene un conjunto de probabilidades simétrico al cambio de jugadores.

Apéndice

El código utilizado en la sección 3 para encontrar la dimensión fractal de M-51, Sim_1, Sim_2 a través del modelo de Gaylord y Wellin (1995) es:

```
FractalDimension[occupiedSites_List] :=
Module[{occSiteDensity, fractalDataList, fractalDim},

  occSiteDensity[t_Integer] := N[Count[occupiedSites,
    {x_?(Abs[#] <= t &), y_?(Abs[#] <= t &)}]]
    /(2 t + 1)^2;

  fractalDataList = Table[{2 s, occSiteDensity[s]},
    {s, Max[Abs[occupiedSites]]}];

  fractalDim = Fit[N[Log[fractalDataList]], {1, x}, x];

  Print["La Dimension Fractal es",
    Abs[Coefficient[fractalDim, x]]]
]
```

Referencias

- Arfken, G. B., Weber, H. J., y Harris, F. E. (2013). *Mathematical methods for physicists* (7.^a ed.). Elsevier.
- Barnsley, M. F. (1993). *Fractals everywhere* (2.^a ed.). Morgan Kaufmann.
- Barnsley, M. F., y Sloan, A. D. (1988). A better way to compress images. *Byte*, 13(1), 215–223.
- Creative-Commons. (2010). Optimización. *Pedia Press*. Descargado de <https://iupsm.files.wordpress.com/2010/04/optimizacion.pdf>
- Dantzig, G. B. (2014). *The nature of mathematical programming*. INFORMS Computer Society. Descargado de <https://web.archive.org/web/20140305080324/http://glossary.computing.society.informs.org/index.php?page=nature.html>
- Daras, N. J. (2014). *Applications of mathematics and informatics in science and engineering* (Vol. 91). Springer.
- Devaney, R. L. (1995). *Fractal dimension*. Boston University. Descargado de <http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node6.html>
- Dickhaut, J., y Kaplan, T. (1993). A program for finding nash equilibria. En *Economic and financial modeling with mathematica®* (pp. 148–166). Springer.
- Facchinei, F., Fischer, A., y Piccialli, V. (2009). Generalized nash equilibrium problems and newton methods. *Mathematical Programming*, 117(1-2), 163–194.
- Fazio, G., Hora, J., Allen, L., Ashby, M., Barmby, P., Deutsch, L., ... others (2004). The infrared array camera (irac) for the spitzer space telescope. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 154(1), 10.
- Garner, R. (2017). *Messier 51 (the whirlpool galaxy)*. NASA. Descargado de <https://www.nasa.gov/feature/goddard/2017/messier-51-the-whirlpool-galaxy>
- Gaylord, R. J., y Wellin, P. R. (1995). *Computer simulations with mathematica: Explorations in complex physical and biological systems* (1.^a ed.). Springer-Verlag.
- Gibbons, R. (1993). *Un primer curso de teoría de juegos*. Antoni Bosch Editor.
- Lemke, C. E., y Howson, J. T., Jr. (1964). Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12(2), 413–423.
- Livio, M. (2017). *La ecuacion jamas resuelta* (1.^a ed.; B. Ribera de Madariaga, Ed.). Ariel.
- Mandelbrot, B. B., y Llosa, J. (2003). *La geometria fractal de la naturaleza*. Tusquets.

- McNulty, D. (2019). *The basics of game theory*. Investopedia. Descargado de <https://www.investopedia.com/articles/financial-theory/08/game-theory-basics.asp>
- Naber, G. L. (1992). The geometry of minkowski spacetime. an introduction to the mathematics of the special theory of relativity. *Applied Mathematical Sciences*, 92.
- Nash, J. (1950). Non-cooperative games, ph.d.thesis.
- Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, 286–295.
- Padrón Molina, E., Romero-Meléndez, G., y Zeballos Rebaza, M. (2018, Dec). Una demostración elemental de la existencia de equilibrios de nash para juegos de dos personas con dos estrategias. *Perpectivas*, 12(2).
- Pintér, J. (2019). *Tabu search*. Descargado de <http://mathworld.wolfram.com/TabuSearch.html>
- Pérez-Porto, J., y Merino, M. (2013). *Definición de simetría*. Wordpress. Descargado de <https://definicion.de/simetria/>
- Ramos, A., y Cerisola, S. (2016). Optimización estocástica. *Comillas*. Descargado de http://www.iit.comillas.edu/aramos/intro_simio.htm
- Rockafellar, R. T., y Wets, R. J.-B. (2009). *Variational analysis* (Vol. 317). Springer Science & Business Media.
- Rowland, T., y Weisstein, E. W. (2002). *Linear transformation*. Descargado de <http://mathworld.wolfram.com/LinearTransformation.html>
- Ruiz López, F. (2015). Algunos problemas de optimización geométrica. *Pensamiento Matemático*, 5(2), 27–53.
- Son, Y. S., y Baldick, R. (2004). Hybrid coevolutionary programming for nash equilibrium search in games with local optima. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 8(4), 305–315.
- Tavel, M. A. (1971). Milestones in mathematical physics noether's theorem. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3), 183–185.
- Vorobeychik, Y., y Wellman, M. P. (2008). Stochastic search methods for nash equilibrium approximation in simulation-based games. En *Proceedings of the 7th international joint conference on autonomous agents and multi-agent systems-volume 2* (pp. 1055–1062).
- Weisstein, E. W. (2002a). *Dihedral group*. Descargado de <http://mathworld.wolfram.com/DihedralGroup.html>
- Weisstein, E. W. (2002b). *Symmetry*. Wolfram Alpha. Descargado de <http://mathworld.wolfram.com/Symmetry.html>
- Wright, S. J. (2016). *Optimization*. Encyclopædia Britannica, Inc. Descargado de <https://www.britannica.com/science/optimization>