Capítulo 5

Resultados y Discusión

Se derivó funcionalmente la acción de la ecuación 3.32 con respecto a la métrica tangente a la superficie de mundo. Se obtuvo una expresión para el tensor de energía momento dada por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2\widetilde{\nabla}^{\alpha} H_{\alpha\beta} \widetilde{\nabla}_{(\mu} H_{\nu)}{}^{\beta} - \widetilde{\nabla}_{\alpha} H_{\beta\mu} \widetilde{\nabla}^{\alpha} H^{\beta}{}_{\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} \widetilde{\nabla}_{\mu} H_{\alpha\beta} \widetilde{\nabla}_{\nu} H^{\alpha\beta} + \widetilde{\nabla}^{\alpha} H_{\alpha\mu} \widetilde{\nabla}^{\beta} H_{\beta\nu} - \frac{1}{2} n_{\mu\nu} L, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde L es la lagrangiana del campo. Para simplificar el estudio se consideró el caso de gravitones sin masa, es decir $R = 0$, y se aplicó la condición de norma de tener un campo sin divergencia $\widetilde{\nabla}_{\mu} H^{\mu\nu} = 0$. Con estas condiciones la expresión del tensor de energía momento se simplifica y queda expresado como

$$T^{\mu\nu} = -\widetilde{\nabla}^{\alpha} H^{\beta\nu} \widetilde{\nabla}_{\alpha} H_{\beta}{}^{\mu} - \frac{1}{2} \widetilde{\nabla}^{\mu} H^{\alpha\beta} \widetilde{\nabla}^{\nu} H_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} n^{\mu\nu} L. \tag{5.2}$$

Se calcula la divergencia del tensor de energía momento considerando las condiciones mencionadas anteriormente y se obtuvo una expresión distinta de cero para la divergencia de $T^{\mu\nu}$, lo cual indica que no es conservado. La expresión para la variación es

$$\widetilde{\nabla}_{\mu} T^{\mu\nu} = -\widetilde{\nabla}^{\mu} \widetilde{\nabla}^{\alpha} H^{\beta\nu} \widetilde{\nabla}_{\alpha} H_{\beta\mu}. \tag{5.3}$$

Esta falta de conservación por parte de $T^{\mu\nu}$ obedece al hecho de que el análisis perturbativo realizado en [2] para obtener la acción del campo spin-2 se realizó solo a primer orden. Si se realizara un estudio a segundo orden de las perturbaciones es muy probable que la ecuación 5.3 sea una condición necesaria para demostrar la conservación del nuevo tensor de energía momento.

La coordenada T^{00} corresponde a la densidad de energía, para poder utilizar esta densidad de energía como un operador hamiltoniano y así construir una ecuación tipo Schrödinger fue necesario encontrar un par de coordenadas canónicas (p, q). Para encontrar este par de coordenadas se consideró al tensor $H_{\alpha\beta}$ como la coordenada q y se derivó funcionalmente la acción de la ecuación 4.8 con respecto del tensor $H_{\alpha\beta}$. De esta derivación funcional se obtuvo un término que integra una derivada total $\widetilde{\nabla}_\sigma \left(\widetilde{\nabla}^\sigma H^{\alpha\beta} \delta H_{\alpha\beta}\right)$, cuyo argumento es de la forma (pdq). De esta expresión, al término que acompaña a $\delta H_{\alpha\beta}$ se le interpretó como la coordenada p y así se difinió $P^{\mu\alpha\beta} \equiv \widetilde{\nabla}^\mu H^{\alpha\beta}$.

Con esta definición y considerando que la condición de la ecuación 4.7 permitió fijar a cero las coordenadas $H_{0\beta}$ se obtuvo una expresión para la densidad de energía indicada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}\left(-P^{0ij}P^{0}{}_{ij} + P^{ijk}P_{ijk}\right). \tag{5.4}$$

Se promovió a la coordenada P^{0ij} a un operador diferencial respecto a su coordenada conjugada mediante $P^{0ij} \rightarrow -\frac{\delta}{\delta H_{ij}}$. Con esta promoción se creó un operador cuántico para el hamiltoniano con la expresión

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}\left(-i\frac{\delta}{\delta H_{ij}} i\frac{\delta}{\delta H^{ij}} + \widetilde{\nabla}^i H^{jk}\widetilde{\nabla}_i H_{jk}\right). \tag{5.5}$$

Con este operador la ecuación tipo Schrödinger es una ecuación diferencial funcional de segundo orden con la expresión,

$$\left(\frac{\delta}{\delta H_{ij}}\frac{\delta}{\delta H^{ij}} + \widetilde{\nabla}^i H^{jk}\widetilde{\nabla}_i H_{jk}\right)\psi = \epsilon\, \psi. \tag{5.6}$$

Utilizando la propiedad de la métrica tangente $n^{\mu\nu}$ de poder expresarse como una forma cuadrática de un objeto antisimétrico como se indica en la ecuación 4.22 y se explica en [3], fue posible factorizar el operador hamiltoniano como un producto de binomios funcionales de tal manera que la ecuación diferencial de segundo orden en 5.6 correspondiente al estado base, es decir cuando $\epsilon = 0$, se pudiera expresar como dos pares ecuaciones diferenciales de primer orden. El primer par obtenido corresponde a una hoja de mundo temporaloide mientras que el segundo par corresponde a una superficie de mundo espacialoide. De estos dos pares fue posible obtener una solución del estado base para cada tipo de hoja de mundo. Estas soluciones corresponden a las ecuaciones obtenidas con el hamiltoniano de 4.25 y 4.26. Por otro lado, para las ecuaciones cuyo hamiltoniano está expresado en 4.23 y 4.24 no fue posible encontrar una funcional solución.

En su expresión covariente las funcionales de onda solución al estado base son

$$\psi_{\mathrm{t}} = \exp\left(\mp \int \mathscr{E}^{\mu\lambda} \left(\widetilde{\nabla}^{\alpha} H_{\mu}{}^{\beta}\right) H_{\alpha\beta} d\Sigma_{\lambda}\right), \tag{5.7}$$

$$\psi_{\mathrm{e}} = \exp\left(\mp i \int \mathscr{E}^{\mu\lambda} \left(\widetilde{\nabla}^{\alpha} H_{\mu}{}^{\beta}\right) H_{\alpha\beta} d\Sigma_{\lambda}\right). \tag{5.8}$$

El factor i en la funcional del estado base para la hoja de mundo espacialoide indica que la solución es una fase, mientras que para el caso temporaloide la funcional de onda exponencial real.

Se analizó la transformación del estado base bajo el difeomorfismo generado por una campo vectorial arbitrario V^{ν} cuyas transformaciones se expresan en la ecuación 3.33. Se pudo demostrar que las dos funcionales obtenidas para el estado base son invariantes bajo la transformación a segundo orden de la derivada del campo V^{ν} y módulo derivadas totales.

También se estudió la transformación correspondiente a la conjugación de carga, paridad e inversión temporal de algunos tensores utilizados en el trabajo presente. En el caso de un espacio ambiente 4-dimensional y euclidiano la métrica de éste espacio $g_{\mu\nu}$ resultó invariante bajo $\mathcal{CPT}$. La métrica tangente a la superficie de mundo $n_{\mu\nu}$ también resultó invariante bajo $\mathcal{CPT}$ y por lo tanto el tensor sin traza $H_{\mu\nu}$ al ser proporcional a las variaciones de la métrica tangente también es invariante bajo la transformación $\mathcal{CPT}$. Por su parte la conexión métrica usual aplicada al tensor métrico tangente $\nabla_\mu n_{\alpha\beta}$ presenta un cambio de signo. A causa de este cambio, el segundo tensor fundamental $K_{\lambda\mu}{}^{\nu}$ y la derivada covariante ajustada $\widetilde{\widetilde{\nabla}}_\mu H_{\alpha\beta}$ presentan un cambio de signo bajo la transformación $\mathcal{CPT}$. Utilizando estas transformaciones fue posible mostrar que la funcional el estado base también es invariante bajo $\mathcal{CPT}$.