Apéndice A

Álgebra Geométrica de Clifford

El álgebra geométrica es un sistema cuyos elementos son llamados *multivectores* y está caracterizada por un *producto geométrico*. Esta álgebra, su teoría y propiedades, está construida de una manera intuitiva y geométrica, lo cual permite que sus aplicaciones en la física obtengan un significado geométrico que va más allá de una reformulación y simplificación del análisis tensorial.

Según la descripción hecha en [11], un multivector de grado r se denota por una letra mayúscula y es igual a la suma

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \cdots = \sum_r \langle A \rangle_r \,, \tag{A.1}$$

donde el objeto $\langle A \rangle_r$ es la parte r-vector de A. Los términos *escalar, vector, bivector, trivector,...* son comúnmente usados para referirse a un 0-*vector,* 1-*vector,* 2-*vector,* 3-*vector* ... respectivamente.

En el caso de dos vectores de dimensión n, denotados por letras minúsculas, el producto geométrico está definido como

$$ab \equiv a \cdot b + a \wedge b. \tag{A.2}$$

Donde $a \cdot b$ es el producto interno o producto punto convencional y es un escalar. Mientras que $a \wedge b$ se conoce como el producto externo o producto *wedge* y no es un escalar o un vector, es un bivector. El producto interno de dos vectores es simétrico, mientras que el producto externo de los mismos es antisimétrico, de tal forma que

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba), \tag{A.3}$$

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba). \tag{A.4}$$

Así como un vector es un segmento de línea con dirección y se puede expandir en una base cartesiana $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, un bivector representa un segmento de plano con orientación que es posible escribir como una combinación lineal de $n(n-1)/2$ [1]. Por ejemplo en tres dimensiones los bivectores unitarios son $\{e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1\}$.

Generalizando los productos interno, externo y geométrico entre un vector a y un r-vector A_r se tiene que

$$a \cdot A_r = \langle aA_r \rangle_{r-1} = \frac{1}{2}\left(aA_r + (-1)^{r+1} A_r a\right), \tag{A.5}$$

$$a \wedge A_r = \langle aA_r \rangle_{r+1} = \frac{1}{2}\left(aA_r - (-1)^{r+1} A_r a\right), \tag{A.6}$$

$$aA_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r. \tag{A.7}$$

A.1. Álgebra de Espacio-tiempo

En esta sección se presentan algunos de los conceptos desarrollados en [10] para exponer las bases del *álgebra espacio-tiempo*, la cual utiliza el concepto del producto geométrico y reconstruye la física de espacio-tiempo de Minkowski con las ventajas de una gramática más simple y directa, la presencia del sentido geométrico de la multiplicación y la relación inmediata entre la geometría y la física del mundo real.

El espacio-tiempo se puede modelar con un espacio vectorial real de 4 dimensiones llamado *espacio vectorial de Minkowski* y denotado por $\mathcal{M}^4$. Para desarrollar el álgebra espacio-tiempo al *producto geométrico* definido previamente se le agrega la propiedad

$$v^2 = \epsilon_v |v|^2, \tag{A.8}$$

donde ϵ_v es la signatura de v y la magnitud $|v|$ es un escalar positivo real. Como es usual, el vector v es temporaloide si tiene signatura negativa ($\epsilon_v = -1$) y es espacialoide cuando su signatura es positiva ($\epsilon_v = 1$).

Como se hizo anteriormente, mediante el producto de vectores del espacio-tiempo, se pueden definir k-vectores. Con estos multivectores espacio-tiempo se define un álgebra $\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}(\mathcal{M}^4)$ y se conoce como álgebra espacio-tiempo. Para generar una base de $\mathcal{G}_4$ se utiliza el conjunto vectores ortonormales $\{\gamma_\mu\}$ donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ y γ_0 es el vector temporaloide. Estos vectores definen en el espacio una métrica

$$g_{\mu\nu} = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{A.9}$$

Con los vectores ortonormales también es posible definir un pseudoescalar

$$i = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3. \tag{A.10}$$

Debido a la antisimetría del producto wedge, se puede mostrar directamente que

$$i^2 = -1, \tag{A.11}$$

$$\gamma_\mu i = -i\gamma_\mu. \tag{A.12}$$

Dado que los distintos k-vectores son productos de vectores, los multivecores (que son una suma de k-vectores) del álgebra $\mathcal{G}_4$ tienen como base al conjunto $\{1, \{\gamma_\mu\}, \{\gamma\mu \wedge \gamma_\nu\}, \{\gamma_\mu i\}, i\}$. Es conveniente tomar en cuenta el conjunto de vectores recíprocos $\{\gamma^\mu\}$ definidos por las ecuaciones

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \tag{A.13}$$

$$\gamma_\mu \cdot \gamma^\nu = \delta_\mu^\nu. \tag{A.14}$$

Estos vectores forman a su vez una base recíproca en el espacio-tiempo $\mathcal{M}^4$.

Así cualquier multivector se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de la base de $\mathcal{G}_4$. Por ejemplo un bivector F tiene la representación

$$F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu, \tag{A.15}$$

Donde las componentes $F^{\mu\nu}$ son escalares dados por

$$F^{\mu\nu} = \gamma^\mu \cdot F \cdot \gamma^\nu = \gamma^\mu \cdot (\gamma^\nu \cdot F) = (\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu) \cdot F. \tag{A.16}$$

Finalmente el conjunto de vectores ortogonales $\{\gamma_\mu\}$ permite definir un conjunto de coordenadas rectangulares $\{x^\mu\}$ para cada punto x en el espacio-tiempo de tal forma que

$$x^\mu = \gamma^\mu \cdot x, \tag{A.17}$$

$$x = x^\mu \gamma_\mu. \tag{A.18}$$

Ahora con estas coordenadas es posible definir un operador ∇ como la derivada respecto al punto x en el espacio-tiempo $\mathcal{M}^4$. Este operador está definido como

$$\nabla = \gamma^\mu \partial_\mu, \tag{A.19}$$

donde las coordenadas ∂_μ están dadas por

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma_\mu \cdot \nabla. \tag{A.20}$$

Por último el operador dÁlambertiano corresponde, de manera usual, al cuadrado del operador ∇, es decir

$$\nabla^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \tag{A.21}$$

A.2. Electromagnetismo

En esta tercera sección del apéndice se muestra una aplicación en la física del álgebra espacio-tiempo, específicamente en electromagnetismo. Estos conceptos se presentan a detalle en [9]. Se pretende presentar al campo electromagnético como un bivector F y expresar las ecuaciones de Maxwell en la forma de una ecuación sencilla. Aplicando una separación de espacio-tiempo se muestra que se recuperan las 4 ecuaciones de Maxwell en su forma convencional. Finalmente se expresa el tensor de energía momento como un producto geométrico del bivector campo F con un vector.

Teniendo un 4-potencial A , el campo electromagnético se puede expresar en términos del potencial como

$$F = \nabla \wedge A = \nabla A - \nabla \cdot A. \tag{A.22}$$

Dado que tanto el operador ∇ como el potencial A son vectores, se ve directamente que el campo F es un bivector.

Teniendo este campo, las ecuaciones de Maxwell se escriben, sorprendentemente, con la expresión

$$\nabla F = J. \tag{A.23}$$

Donde J es la 4-corriente. Es importante notar que la sencillez de la ecuación A.23 no es solo una notación conveniente. La importancia del producto geométrico radica en la posibilidad de encontrar el inverso multiplicativo de cada vector. Es decir, el álgebra de Clifford, por medio de la asociatividad de su producto, nos asegura existe un operador ∇^{-1} tal que

$$F = \nabla^{-1} J. \tag{A.24}$$

Aplicando una separación de espacio-tiempo, como se explica en [6] y en la sección III de [10], en la ecuación A.23 se obtiene la ecuación

$$(\partial_t + \nabla)(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \rho - \mathbf{J}. \tag{A.25}$$

Donde los símbolos en negritas son vectores tridimensionales con base $\{\sigma_k = \gamma_k \gamma_0\}$, ∂_t y ρ son escalares y el pseudoescalar i es el mismo que se definió en A.10.

Los vectores del espacio con base $\{\sigma_k\}$ definen a su vez una subálgebra $\mathcal{G}_3$ con k-vectores que cuyo grado va del 0 al 3. En este tipo de álgebra el pseudoescalar i relaciona al producto wedge con el producto vectorial convencional mediante

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \tag{A.26}$$

La ecuación A.25 tiene multivectores de cada lado de la igualdad los cuales abarcan los 4 grados de $\mathcal{G}_3$ que son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho && \text{(escalar)}, \\ \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} &= -\mathbf{J} && \text{(vector)}, \\ i(\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E}) &= 0 && \text{(bivector)}, \\ i\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(trivector)}. \end{aligned} \tag{A.27}$$

Por último, utilizando el formalismo del álgebra espacio-tiempo, el tensor de energía $T(a)$ momento se puede expresar como una función vectorial lineal con un vector como argumento. Para campos clásicos, la función $T(a)$ regresa el 4-flujo de momento a través de la superficie perpendicular a a. En el caso electromagnético la función se expresa como

$$T(a) = -\frac{1}{2} F a F. \tag{A.28}$$

Usando la expresión para el bivector electromagnético $F = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$, se puede mostrar que la densidad de energía se obtiene con la fórmula

$$\gamma_0 \cdot T(\gamma_0) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right). \tag{A.29}$$

También se puede mostrar que el tensor de energía momento es conservado, es decir

$$\nabla \cdot T(a) = 0. \tag{A.30}$$