

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ACTUARIA, FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**UDLAP**®

# Geometría, Relatividad y el Espacio de Twistor

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE  
HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE

MARIO ARMANDO MORENO SAN LUIS

163765

LICENCIATURA EN FÍSICA

DR. GERARDO ARIZMENDI ECHEGARAY

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE  
HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE MARIO ARMANDO MORENO SAN  
LUIS 163765

DIRECTOR DE TESIS

---

Dr. Gerardo Arizmendi Echegaray

PRESIDENTE DE TESIS

---

Dr. Marco Antonio Pérez de la Rosa

SECRETARIO DE TESIS

---

Dr. Wanderson Maia Pimenta

# Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Gerardo Arizmendi Echegaray por haberme llevado en el largo y arduo camino que fue la realización de esta tesis. También le agradezco por haber creído en mí, por haberme levantado cuando yo no podía, por haberme enseñado tanto y por haberme retado tanto.

De igual manera quiero agradecerle al Dr. Wanderson Maia Pimenta y al Dr. Miguel Ángel Ocaña Bribiesca por todo el tiempo, las enseñanzas, las charlas y el apoyo que siempre me han brindado tanto fuera como dentro del aula. En este mismo tema, el estudiar física no fue una decisión fácil por hacer pero definitivamente fue una que tomé por la influencia que tuvieron mis queridos profesores Chus, Germán y Yeyo.

A mi familia le agradezco por siempre estar ahí. A mi papá, Armando, quiero agradecerle por su apoyo y amor incondicional, por alentarme a siempre buscar mayores retos y por siempre intentar brindarme lo mejor que pueda. A mi hermana, Valeria, le agradezco por el cariño y el apoyo que me brinda.

A mis amigos, Ángel, Bruno, Gugu, Alex y Sebas les agradezco por su apoyo siempre presente y por tantas risas que hemos tenido. A mis amigos y compañeros Pablo, Lucy y Freddy les agradezco el tiempo que pasamos tanto fuera como dentro del aula. A Andrea, le agradezco por ser tan comprensiva, por brindarme su calidez y por ver luz donde yo lo único que veía es oscuridad.

A mi mejor amiga, Moni, ¡lo logré!. Sé que estarías orgullosa de lo que logré como siempre lo estuviste y que estarías feliz de verme y leerme una vez más. Gracias por siempre haber estado ahí y que sepas, siempre te llevaré conmigo.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Álgebra Lineal . . . . .	3
1.1.1. Espacios Vectoriales Reales . . . . .	3
1.1.2. Independencia Lineal, Bases y Espacio Generado . . . . .	4
1.1.3. Aplicaciones Lineales y el Espacio Dual . . . . .	5
1.1.4. Álgebra Exterior . . . . .	6
1.2. Variedades Diferenciables . . . . .	7
1.2.1. Variedades Topológicas . . . . .	7
1.2.2. Variedades Diferenciables y el Espacio Tangente . . . . .	9
1.3. Formas Diferenciales . . . . .	12
1.3.1. Derivada Exterior y el Pullback . . . . .	13
1.3.2. Integración en Formas . . . . .	14
1.4. Tensores . . . . .	17
<b>2. Geometría Riemanniana</b>	<b>21</b>
2.1. Motivación: Curvas . . . . .	21
2.1.1. Curvas Parametrizadas . . . . .	21
2.1.2. Curvas Regulares: Longitud de Arco . . . . .	22
2.1.3. Teoría Local de Curvas . . . . .	23
2.2. Métrica Riemanniana . . . . .	24
2.3. Isometrías . . . . .	25
2.3.1. Ejemplos . . . . .	25
2.4. Conexión Riemanniana . . . . .	27
2.5. Geodésicas . . . . .	29
2.5.1. Motivación Física . . . . .	29
2.5.2. Definición . . . . .	30
2.6. Curvatura . . . . .	33
2.6.1. Tensor de Ricci y la Curvatura Escalar . . . . .	33
2.6.2. Intuición Geométrica . . . . .	34
2.7. Variedades de Einstein . . . . .	35

<b>3. Relatividad General</b>	<b>39</b>
3.1. Espacio de Minkowski . . . . .	39
3.2. Grupo de Poincare . . . . .	41
3.3. Las Ecuaciones de Campo de Einstein . . . . .	43
3.4. La Métrica de Schwarzschild . . . . .	44
<b>4. Estructuras Complejas y Casi-Complejas</b>	<b>49</b>
4.1. Preliminares Algebraicos . . . . .	49
4.2. Variedades Casi complejas y Complejas . . . . .	51
4.2.1. Ejemplos . . . . .	52
4.3. El Espacio de Twistor . . . . .	53
4.3.1. Construcción del Twistor . . . . .	53
<b>Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>Referencias</b>	<b>60</b>

# Introducción

En esta tesis buscamos introducirnos a teoría de twistores y a relatividad general con el enfoque de geometría diferencial y riemanniana como se haría en el primer año de posgrado. Más detalladamente, buscaremos comprender las nociones y herramientas indispensables para poder comprender relatividad especial y las ecuaciones de Einstein para después llegar a introducirnos a teoría de twistores.

Según [6], relatividad general es la teoría física más bella jamás inventada puesto que esta describe una de las características más particulares del mundo en el que vivimos. Describe la gravedad en términos de la elegante área de la geometría diferencial que a su vez describe la geometría de ciertas estructuras matemáticas, las variedades. El considerar que el espacio tiempo es una variedad es uno de los puntos claves de relatividad general y esto finalmente desemboca en la famosa frase de John Wheeler diciendo que el espacio tiempo le dice cómo moverse a la materia y la materia le dice al espacio tiempo cómo curvarse.

De igual manera, el ganador de medio premio nobel de física en 2020, Roger Penrose, en el primer párrafo de su artículo «The Geometry of the Universe» [17] publicado en 1978 dice:

One of the most fruitful sources of mathematical intuition is physical space. For not only does physical space provide us with the basic concepts of Euclidean geometry, but it also gives us a pictorial framework for visualizing the very much more general types of space that occur continually throughout mathematics. Moreover, it was the picture of physical space that led to those key ideas of mathematical analysis: continuity and smoothness. Indeed, even the very basic mathematical notion of real number originated from measurement of spatial separation—and of time intervals too, these being, as Albert Einstein’s relativity has told us, geometrical quantities again, whose measurement is essentially bound up with that of space. So it comes as a shock when we also learn from relativity that our now cherished notion of Euclidean geometry does not, after all, describe physical space in the most accurate way. Yet, from these Euclidean beginnings, a more subtle and flexible geometry, known as differential geometry, has grown to maturity. It is in terms of this geometry that Einstein’s theory finds expression. And now, more than sixty years after general relativity was first put forward as a daring original view of the world, the theory stands in excellent agreement with observation. So if we wish to understand how the world is shaped, we must come to terms with this theory.

En este párrafo se remarca lo importante que ha sido la visualización del espacio que a su vez intentamos entender a través del desarrollo y uso de herramientas matemáticas.

Vemos que una medición geométrica debe también asociarse con el espacio en el que se midió siendo esta la idea clave detrás de la métrica. Dándole una vez más una suma importancia al entendimiento de la geometría diferencial. Este mismo artículo o aún más, los trabajos de Penrose son una gran motivación para esta tesis puesto que también buscamos introducirnos a la teoría de twistores. Una teoría propuesta por Roger Penrose en 1967 como un posible camino a gravedad cuántica.

El artículo, «The Geometry of the Universe», de Penrose aunque sea un poco viejo para nada ha perdido relevancia puesto que estamos justo en la época en la que relatividad general ha tomado mucha fuerza con las observaciones hechas en los últimos años. Díganse dichas observaciones siendo la detección de ondas gravitacionales en 2016, la foto de la sombra del hoyo negro de M87 en 2019 al igual que la foto del hoyo negro en el centro de nuestra galaxia en el año en curso en el que se escribe esta tesis, 2022. De igual manera, según [6] relatividad general aunque normalmente no es estudiado a nivel licenciatura, es muy importante estudiarlo para especializaciones como astrofísica, cosmología, teoría de cuerdas e incluso, física de partículas. El estudio de geometría diferencial y sus preliminares matemáticos está hecho en los primeros dos capítulos. En el Capítulo 1. [Preliminares](#) primero vemos lo que son las nociones básicas del álgebra lineal y la formulación del álgebra exterior. Después hablamos de estructuras particulares de topología: variedades topológicas, diferenciables y el espacio tangente. Para este punto, aunque no tenga ese nombre, empieza el estudio de la geometría diferencial a través de las formas diferenciales y tensores.

En el Capítulo 2. [Geometría Riemanniana](#) tenemos lo que es el punto central para el entendimiento de la distancia en cualquier variedad con una métrica riemanniana  $g$ . Con el estudio de esta métrica se explora lo que son las isometrías. Se generaliza el concepto de derivada direccional como la derivada covariante para entender lo que son las geodésicas y más aún, para definir diferentes tensores que nos dan las nociones de curvatura de la variedad junto con una condición particular para decir que una variedad sea considerada de Einstein.

En el Capítulo 3. [Relatividad General](#) primero estudiamos un poco lo que es el Espacio de Minkowski que corresponde al espacio tiempo de relatividad especial. Exploramos lo que es el conjunto de transformaciones que dejan el espacio de Minkowski invariante, conocido como el grupo de Poincaré. Finalizamos con el entendimiento de lo que son las ecuaciones de campo de Einstein como el punto clave de la formulación de relatividad general y comprendemos la primera solución encontrada para dichas ecuaciones, la métrica de Schwarzschild.

En el Capítulo 4. [Estructuras Complejas y Casi-Complejas](#) estudiamos los conceptos de variedad compleja, casi compleja y el espacio de twistor, vemos su relación a través de la estructura casi compleja definida naturalmente en el espacio de twistor. Además de esto, se dan algunos resultados de integrabilidad del espacio de twistor y sobre la condición de Einstein para este espacio.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo desarrollamos los conceptos preliminares que se utilizarán en el resto de la tesis. Los temas desarrollados son los que se necesitan para empezar entender los objetos que estudian la geometría diferencial, riemanniana y pseudo-riemanniana. El enfoque que tratamos aquí es llevar los conceptos de álgebra lineal a variedades diferenciales, a través de secciones, así la mayoría de conceptos se deben entender con secciones de un haz vectorial o fibrado.

El capítulo está organizado en cuatro secciones de la siguiente manera. La Sección 1.1. [Algebra Lineal](#) se enfoca en temas de álgebra lineal. Los temas de la Sección 1.2. [Variedades Diferenciables](#) se refiere a variedades diferenciables dando el concepto importante de espacio tangente. En la Sección 1.3. [Formas Diferenciales](#) definimos las formas diferenciales y explicamos cómo integrar formas diferenciales a través del pullback. Finalmente en la Sección 1.4. [Tensores](#) se generalizan los conceptos de forma diferencial y campo vectorial a tensores.

En general todos los temas de este capítulo se encuentran en [14] siendo esta una referencia principal para este capítulo. Este libro en particular presenta los temas en un orden un poco distinto al nuestro pero en general es buen libro para un primer acercamiento a geometría riemanniana. Particularmente para la primer sección usamos [10, 12]. Partes de la segunda sección están presentes tanto en [14] como en [18]. La tercera sección está muy basada en [20] y en general también se encuentra en [18, 19]. Finalmente la cuarta sección se encuentra en [14, 18, 19].

### 1.1. Álgebra lineal

#### 1.1.1. Espacios Vectoriales Reales

**Definición 1.1. Espacio Vectorial Real.** Un espacio vectorial real  $V$  es un conjunto equipado con dos operaciones:

$$\begin{aligned} &\text{Adición} \\ + : V \times V &\rightarrow V \\ (v, w) &\mapsto v + w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Multiplicación por escalar} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda v \end{aligned}$$

donde dichas operaciones para cualesquiera  $u, v, w \in V$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  cumplen:

- 1)  $v + w \in V$ .
- 2)  $(u + v) + w = u + (v + w)$ .
- 3)  $v + w = w + v$ .
- 4) Existe *elemento neutro* denotado  $0$  con la propiedad:  $0 + v = v$ .
- 5) Existe un *inverso aditivo* denotado  $-v$  con la propiedad:  $(-v) + v = 0$ .
- 6)  $\lambda v \in V$ .
- 7)  $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ .
- 8)  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ .
- 9)  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ .
- 10)  $1v = v$ .

Si alguna vez el lector ha sido introducido a teoría grupos podría notar que (V1-V5) son justo lo que debe cumplir un *grupo abeliano* o un *grupo conmutativo*. De espacios vectoriales reales, considere los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 1.2. Espacio Euclidiano de dimensión  $n$ .** Para cualquier entero positivo  $n$ ,  $\mathbb{R}^n$  con las operaciones usuales de adición de vectores y multiplicación por escalar,  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial.

**Ejemplo 1.3. Matrices de orden  $m \times n$  con coeficientes reales.** Considere dos enteros positivos  $m, n$  y denote por  $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  al conjunto de todas las matrices de orden  $m \times n$  con coeficientes reales. Con las operaciones usuales de suma de matrices y de multiplicación por escalar,  $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  es un espacio vectorial.

### 1.1.2. Independencia Lineal, Bases y Espacio Generado

**Definición 1.4.** Sea  $V$  un espacio vectorial real. Se dice que los vectores  $v_1, \dots, v_n$  son *linealmente independientes* si la igualdad:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad \text{con: } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

solo se cumple para  $\lambda_i = 0$ . De manera contraria, si se cumple para algunos  $\lambda_i \neq 0$  entonces se dice que los vectores  $v_1, \dots, v_n$  son *linealmente dependientes*.

Ahora consideramos lo que es una combinación lineal.

**Definición 1.5.** Se dice que los vectores  $v_1, \dots, v_n \in V$  son una combinación de  $w \in V$  si existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  para los que se cumpla:

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

En el sentido de la definición anterior, de considerar todas las posibles combinaciones de  $\lambda_i$  surge el espacio generado.

**Definición 1.6.** Se dice que  $V$  es generado por los vectores  $v_1, \dots, v_n$  si para todo  $w \in V$  existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  para los que se cumpla:

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Es decir, del conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  consideramos todas las combinaciones lineales posibles y esto nos da todo  $W$ . Esto es usualmente denotado por  $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = V$ .

Con motivaciones de darle un mayor sentido al conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  se tiene la siguiente definición:

**Definición 1.7.** Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  un conjunto que cumple que:

$$\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = V.$$

Si además  $B$  es linealmente independiente entonces  $B$  es una base de  $V$ .

**Definición 1.8.** Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base para  $V$ . La dimensión de  $V$  es definida por la cantidad de elementos en  $B$ , es decir:

$$\dim V = n.$$

### 1.1.3. Aplicaciones Lineales y el Espacio Dual

**Definición 1.9. Aplicación lineal.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales reales, es decir, ambos bajo el campo  $\mathbb{R}$ . Se dice que  $T : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal si se cumple para cualesquiera dos vectores  $x, y \in V$  y cualquier escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  las siguientes condiciones se cumplen:

- 1)  $T(x + y) = T(x) + T(y)$ .
- 2)  $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ .

**Definición 1.10. Espacio dual.** Dado un espacio vectorial  $V$ , el conjunto de aplicaciones lineales de  $V$  a  $\mathbb{R}$  tiene una estructura de espacio vectorial. Denotamos a este espacio por  $V^*$ , es decir:

$$V^* = \{\alpha : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es lineal.}\}.$$

Las operaciones de suma y producto por escalar están definidas por

- 1)  $(\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v)$ .
- 2)  $(k\alpha)(v) = k(\alpha(v))$ .

*Nota.* Los elementos de  $V^*$  son llamados *vectores duales*, *1-formas*, *covectores* o *funcionales lineales*.

**Definición 1.11. Base dual.** Sea  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base para  $V$ . La base  $B^* = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $V^*$  donde  $\alpha_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  son transformaciones lineales definidas por:

$$\alpha_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

es llamada la base de  $V^*$  que es dual a  $B$ .

### 1.1.4. Álgebra Exterior

Para empezar a hablar del álgebra exterior necesitamos un par de definiciones y nociones previas, primero considere las siguientes definiciones:

**Definición 1.12.  $k$ -forma.** Una  $k$ -forma  $\alpha$  definida en un espacio vectorial  $V$  es una función de la forma:

$$\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Es decir, es una función real que admite  $k$  vectores y que es lineal en todas sus entradas. Al número  $k$  se le conoce como el *grado* de la forma.

**Definición 1.13.  $k$ -forma alternante.** Sea  $V$  un espacio vectorial. Una  $k$  forma alternante en  $V$  con  $k \geq 2$  es una forma que satisface:

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_k)$$

para cada  $i = 1, \dots, k-1$ . Las 0 y 1-formas son considerados como alternantes. Al conjunto de todas las  $k$ -formas alternantes en  $V$  se le denotará por  $\Lambda^k V$ .

**Teorema 1.14.** Sea  $\alpha$  una  $k$ -forma alternante ( $k \geq 2$ ) definida en  $V$ . Si un conjunto de vectores  $\{v_1, \dots, v_k\}$  es linealmente dependiente, entonces  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ .

**Ejemplo 1.15. El determinante.** Si en  $\mathbb{R}^n$  tenemos un conjunto de vectores  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y definimos:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) := \det\{v_1, \dots, v_n\},$$

donde por  $\det\{v_1, \dots, v_n\}$  entendemos que el determinante se toma acomodando los vectores en vertical, es decir:

$$\det\{(a, b), (c, d)\} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

En general se puede ver:

$$\det : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

y que conocemos las propiedades del determinante;  $\omega$  es una  $n$ -forma alternante.

**Teorema 1.16.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Para  $k = 0, \dots, n$  el conjunto  $\Lambda^k V$  equipado con las operaciones usuales de suma y multiplicación de funciones es un espacio vectorial.

**Teorema 1.17.** Sea  $V$  un espacio vectorial  $n$  dimensional. Entonces:

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Definición 1.18. Álgebra exterior.** Sea  $V$  un espacio vectorial con dimensión finita. Si  $\alpha \in \Lambda^k V$  y  $\omega \in \Lambda^l V$  definimos el producto cuña como la función que:

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^k V \times \Lambda^l V &\rightarrow \Lambda^{k+l} V \\ (\alpha, \omega) &\mapsto \alpha \wedge \omega \end{aligned}$$

El producto cuña para  $\alpha \in \Lambda^k V$ ,  $\omega \in \Lambda^l V$  y  $\gamma \in \Lambda^m V$  con  $a, b$  constantes cumple:

- 1)  $\alpha \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \alpha$ .
- 2)  $\alpha \wedge (\omega \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \omega) \wedge \gamma$ .
- 3)  $\alpha \wedge (a\omega) = (a\alpha) \wedge \omega = a\alpha \wedge \omega$ .
- 4)  $\alpha \wedge (a\omega + b\gamma) = a\alpha \wedge \omega + b\alpha \wedge \gamma$ .
- 5)  $\alpha \wedge \alpha = 0$ .

**Teorema 1.19.** Bajo el espacio vectorial  $n$  dimensional  $V$ , el conjunto

$$\{\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k\}$$

siendo  $\beta_i$  el  $i$ ésimo elemento de la base dual de  $V^*$ , es una base para  $\Lambda^k V$ .

## 1.2. Variedades Diferenciables

### 1.2.1. Variedades Topológicas

**Definición 1.20.** Una topología  $\mathcal{T} \subset 2^X$  sobre  $X$  es un conjunto tal que:

- 1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
- 2)  $U, V \in \mathcal{T}, U \cap V \in \mathcal{T}$ .
- 3)  $\{U_i\}_{i \in A} \subset \mathcal{T}, \cup_{i \in A} U_i \in \mathcal{T}$ .

*Nota.* A los elementos de  $\mathcal{T}$  les llamamos abiertos.

- 1)  $X, \emptyset$  son abiertos.
- 2) Si  $U, V$  son abiertos entonces  $U \cap V$  es abierto.
- 3) Unión arbitraria de abiertos es abierto.

**Ejemplo 1.21.** Considere a  $X = \mathbb{R}^n$ . Una topología particular es:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \left\{ \bigcup_{i \in I} B_{\epsilon_i}(p_i) \mid \epsilon_i \in \mathbb{R}^+, p_i \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \{U \mid \forall x \in U, \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset U\}. \end{aligned}$$

Con  $\mathbb{R}^+$  siendo los reales positivos.

**Definición 1.22.** Un espacio topológico es el par  $(X, \mathcal{T})$  donde  $X$  es un conjunto y  $\mathcal{T}$  es una topología para  $X$ .

**Definición 1.23.** Sean  $(X, \mathcal{T}_1)$  y  $(Y, \mathcal{T}_2)$  dos espacios topológicos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es continua si la preimagen de abiertos es abierta. Es decir:

$$\forall U \in \mathcal{T}_2, f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1.$$

**Ejemplo 1.24.** Considere el siguiente conjunto  $X$  y dos topologías para este conjunto:

$$\begin{aligned} X &= \{a, b, c\}, \\ \mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}. \\ \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}. \end{aligned}$$

Las siguientes dos funciones son ejemplos de funciones continuas mientras que la última, no lo es.

1)

$$\begin{aligned} Id_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} Id_X : (X, \mathcal{T}_1) &\rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \\ Id_X^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{T}_1 \\ Id_X^{-1}(\{a\}) &= \{a\} \in \mathcal{T}_1 \\ Id_X^{-1}(\{a, b, c\}) &= \{a, b, c\} \in \mathcal{T}_1 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} Id_X : (X, \mathcal{T}_2) &\rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \\ Id_X^{-1}(\{a, b\}) &= \{a, b\} \notin \mathcal{T}_2 \end{aligned}$$

**Definición 1.25.** Decimos que  $\mathcal{T}_1$  es más fina que  $\mathcal{T}_2$  si  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ .

**Definición 1.26.** Decimos que  $\mathcal{T}_2$  es más gruesa que  $\mathcal{T}_1$  si  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ .

**Ejemplo 1.27.** Sobre un conjunto  $X$  tenemos tres topologías,  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$  y  $\mathcal{T}_2 = 2^X$ . Sin importar quien sea  $\mathcal{T}$  se cumple que  $\mathcal{T}_1$  es más gruesa que  $\mathcal{T}$  mientras que  $\mathcal{T}_2$  es más fina que  $\mathcal{T}$ . Es decir

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_2.$$

Decimos que  $f : X \rightarrow Y$  es homeomorfismo si  $f$  es continua con inversa continua y en este caso escribimos  $X \cong Y$

**Definición 1.28.** Una variedad topológica  $M$  es un espacio topológico en el que cada  $p \in M$  tiene una vecindad  $U$  homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n$  fijo. Es decir:

$$\mathbb{R}^n \cong U.$$

### 1.2.2. Variedades Diferenciables y el Espacio Tangente

**Definición 1.29.**  $M^n$  es una variedad diferenciable si es variedad topológica y además tengo una cubierta abierta de  $M$ , digamos  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ( $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M^n$ ). Tenemos homeomorfismos del tipo  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  y cuando se cumple que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  entonces:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

es diferenciable.

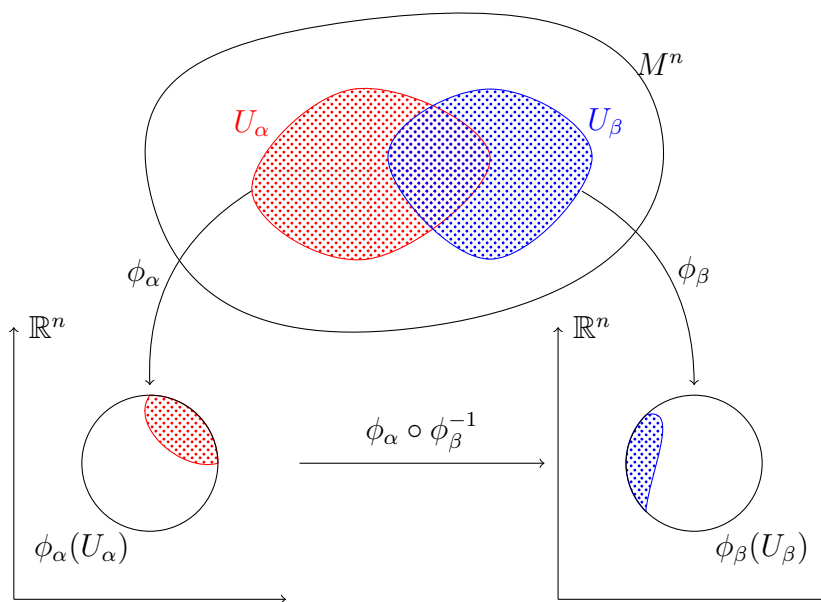


Figura 1.1: Variedad  $M^n$  con cartas coordenadas  $\phi_\alpha$  y  $\phi_\beta$ .

En la [Figura 1.1](#) tenemos una representación de lo que en una variedad  $M^n$  es tener a las cartas coordenadas  $\phi_\alpha, \phi_\beta$  correspondientes para dos abiertos  $U_\alpha, U_\beta$ . En este sentido es en el que se debe entender la definición de variedad diferenciable.

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene a un punto  $p \in U$ . Sea  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva suave parametrizada de manera que  $c(0) = p$  y  $c'(0) = v_p$ .

Por la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0} &= Df(c(0)) c'(0) \\ &= \nabla f(p) \cdot v_p \end{aligned}$$

Nos interesa pensar en el vector tangente  $v_p$  como un operador cuyo dominio son funciones reales y suaves definidas cerca de  $p$  (denotadas por  $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ ) y cuyo rango consiste de números reales (por el producto interno). Es decir:

$$v_p : f \mapsto \nabla f(p) \cdot v_p \in \mathbb{R}.$$

**Definición 1.30.** Sea  $p \in \mathbb{R}^n$ . Un *vector tangente en  $p$*  es un operador:

$$v_p : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las propiedades para ser lineal y cumple la regla de Leibniz (o regla del producto), es decir, cumple:

1) Para toda  $f, g \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $c \in \mathbb{R}$  se cumple:

$$v_p[f + cg] = v_p[f] + cv_p[g].$$

2) Para toda  $f, g \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  se cumple que:

$$v_p[f \cdot g] = v_p[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot v_p[g].$$

*Nota.* A un operador que cumple con la definición anterior se le conoce como una *derivación lineal* o solamente una *derivación*. La intuición aquí es que generaliza las propiedades que conocemos de derivadas.

**Ejemplo 1.31.** Sea  $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ , si para  $i = 1, \dots, n$  consideramos un operador  $(\partial_i)_p : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$(\partial_i)_p[f] = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p$$

Entonces  $(\partial_i)_p$  es una derivación.

Con todas estas ideas en mente, ya podemos definir lo que es el espacio tangente para un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.32.** Partiendo de todas las derivaciones en  $p \in \mathbb{R}^n$ , podemos definir un espacio vectorial real con todas las operaciones de adición y multiplicación escalar de funciones. Este espacio es llamado el *espacio tangente en  $p$*  y será denotado como  $T_p(\mathbb{R}^n)$ .



*Observación.* Esencialmente la definición del espacio tangente le asocia un espacio vectorial a cada punto  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ .

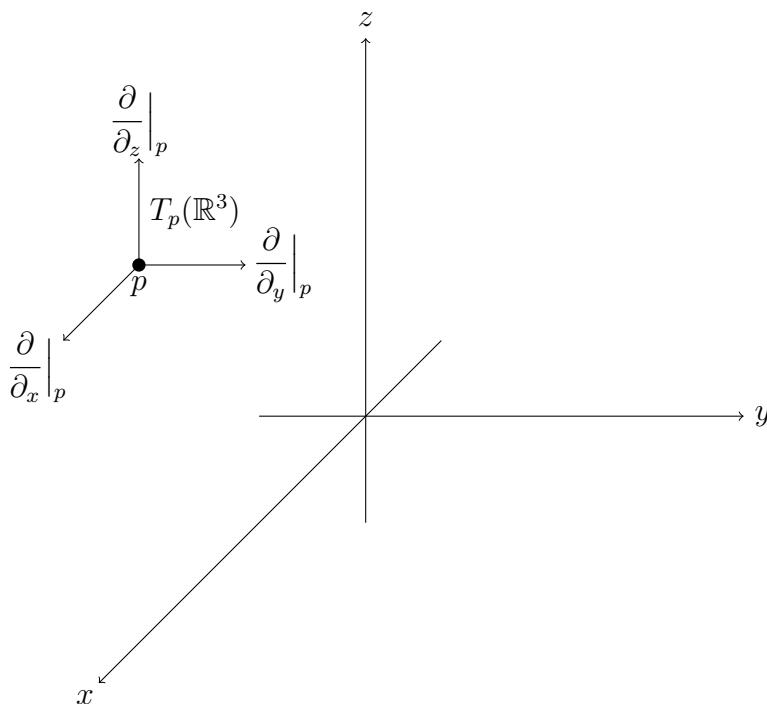


Figura 1.2:  $\mathbb{R}^3$  con la base canónica del espacio tangente  $T_p(\mathbb{R}^3)$ .

Dado que dijimos que el espacio tangente  $T_p(\mathbb{R}^n)$  forma un espacio vectorial real, podemos preguntarnos qué forma tiene su base. Sobre dicha base, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 1.33.** El conjunto  $B_0 = \{(\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p\}$  de operadores de derivadas parciales es una base para  $T_p(\mathbb{R}^n)$ , esta base generalmente es llamada la *base canónica* de  $T_p(\mathbb{R}^n)$ .

En la [Figura 1.2](#) tenemos una representación de la base canónica del espacio tangente para  $n = 3$ . Más aún, como consecuencia directa del anterior teorema se tiene el siguiente corolario:

**Corolario 1.34.** Para cualquier entero positivo  $n$  se tiene que  $\dim(T_p(\mathbb{R}^n)) = n$ .

Recordemos que definimos el espacio tangente en base a las derivaciones en un punto  $p$ , si ahora consideramos un vector tangente  $v_p$  y la base canónica para  $T_p(\mathbb{R}^n)$ , debería ser claro que:

$$v_p[f] = \sum c_i (\partial_i)_p[f] = \sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p$$

que si analizamos detenidamente veremos que si el vector  $v = (c_1, \dots, c_n)$  es unitario entonces  $v_p$  es exactamente la derivada direccional de  $f$  en dirección de  $v$ .

Más aún, con la base estándar para  $T_p(\mathbb{R}^n)$  podemos escribir un campo vectorial de  $\mathbb{R}^n$  como:

$$V = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = v_i \partial_i$$

donde  $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones reales y diferenciables. Es importante notar que en la última igualdad usamos la convención de la suma de Einstein en la que hay una suma implícita sobre los índices repetidos.

**Definición 1.35. Difeomorfismo.** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un difeomorfismo si cumple:

- 1)  $f$  es biyectiva y por lo tanto, existe la inversa  $f^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- 2)  $f$  es suave en  $\mathbb{R}^n$ .
- 3)  $f^{-1}$  es suave en  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición 1.36.** Una  $k$ -distribución  $\mathcal{V}$  en  $M$  es un mapa que asigna a cada punto  $p \in M$  un subespacio vectorial  $k$ -dimensional  $\mathcal{V}_p$  de  $T_p M$ .

**Definición 1.37.** Sea  $A$  un subconjunto de  $B$ , a la función  $\iota$  que manda a todo elemento  $x$  de  $A$  a  $x$  como elemento de  $B$  se le conoce como la *función inclusión*, es decir:

$$\iota : A \rightarrow B, \quad \iota(x) = x.$$

**Definición 1.38.** Suponga que  $\mathcal{V}$  es una distribución  $k$ -dimensional en  $M$ . Una subvariedad inmersa  $N \subset M$  es llamada una *variedad integral* de  $\mathcal{V}$  si por cada  $p \in N$ , la imagen de  $d\iota_N : T_p N \rightarrow T_p M$  es  $\mathcal{V}_p$ . Decimos que la distribución  $\mathcal{V}$  es integrable si para cada punto de  $M$  existe una variedad integral de  $\mathcal{V}$ .

### 1.3. Formas Diferenciales

**Definición 1.39.** Para  $i = 1, \dots, n$  de los elementos de la base canónica de  $T_p(\mathbb{R}^n)$ , es decir  $(\partial_i)_p$ , defina  $(dx_i)_p \in (T_p(\mathbb{R}^n))^*$  de manera que:

$$(dx_i)_p((\partial_j)_p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

En otras palabras los  $(dx_i)_p$  son elementos de la base canónica de  $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$ .  $(dx_i)_p$  es una 1-forma diferencial.

Con esta definición en mente podemos decir que cualquier 1-forma diferencial,  $\alpha_p$  puede ser escrita como:

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^n f_i(dx_i)_p$$

donde las  $f_i$  son funciones reales de una variable.

**Definición 1.40.** Una  $k$ -forma diferencial  $\alpha$  en  $\mathbb{R}^n$  es una función que para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha(p) = (p, \alpha_p)$ , donde  $\alpha_p \in \Lambda^k(T_p(\mathbb{R}^n))$ . Aún más, al tener la base:

$$\{(dx_1)_p \wedge \cdots \wedge (dx_k)_p\}$$

podemos escribir a  $\alpha$  como:

$$\alpha(p) = \sum_{i=1}^k f_i(p) (dx_1)_p \wedge \cdots \wedge (dx_k)_p.$$

Dado una función suprayectiva  $f : X \rightarrow Y$ , una función  $s : Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ s = Id_Y$  se le llama sección. Cuando  $E(M)$  es un haz vectorial sobre  $M$  al conjunto de secciones lo denotamos por  $\Gamma(E(M))$ . Así, como tenemos una proyección  $\pi : \Lambda^k \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\pi(\omega, p) = p$  una  $k$ -forma diferencial suave no es otra cosa que una sección suave de  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k \mathbb{R}^n$ . Al espacio de secciones suaves se denota por  $\Gamma(\Lambda^k \mathbb{R}^n)$ .

*Observación.* Dado que en  $\mathbb{R}^n$  tenemos coordenadas globales es común que el subíndice  $p$  tanto en la base de  $T_p(\mathbb{R}^n)$  como de  $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$  no sean escritos dado que no hay ambigüedad.

**Definición 1.41.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$   $k$ -formas diferenciales,  $\gamma$  una  $l$ -forma diferencial y  $c$  una constante. Las siguientes operaciones están bien definidas:

- 1)  $(\alpha + \beta)(p) = \alpha(p) + \beta(p)$ .
- 2)  $(c\alpha)(p) = c(\alpha(p))$ .
- 3)  $(\alpha \wedge \gamma)(p) = \alpha(p) \wedge \gamma(p)$ .

Las operaciones mostradas en [Definición 1.18](#) se trasladan naturalmente a formas diferenciales.

### 1.3.1. Derivada Exterior y el Pullback

**Definición 1.42.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. La derivada exterior de  $f$  es la 1-forma denotada por  $df$  y es definida por:

$$df(V) = V[f]$$

para cada campo vectorial suave  $V$  en  $\mathbb{R}^n$ .

*Nota.* La derivada exterior como la hemos presentado cumple con ser una derivación.

**Definición 1.43.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Entonces, usando la base de 1-formas diferenciales, la derivada exterior  $df$ , toma la siguiente expresión:

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p (dx_1)_p + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p (dx_n)_p.$$

**Definición 1.44.** Sea  $\omega$  una  $k$ -forma diferencial de la forma  $\omega = \sum_{i=1}^k f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ . La derivada exterior de  $\omega$  es la  $(k+1)$ -forma  $d\omega$  definida como:

$$d\omega = \sum_{i=1}^k df_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

**Ejemplo 1.45.** Sea  $\alpha = xdx + ydy + zdz$  y  $\beta = xyt^3dy \wedge dz$ . Sus derivadas exteriores son:

$$\begin{aligned} \alpha &= xdx + ydy + zdz & \beta &= xyt^3dy \wedge dz \\ d\alpha &= d(xdx + ydy + zdz) & d\beta &= d(xyt^3dy \wedge dz) \\ &= d(xdx) + d(ydy) + d(zdz) & &= d(xyt^3) \wedge dy \wedge dz \\ &= d(x) \wedge dx + d(y) \wedge dy + d(z) \wedge dz & &= (yt^3dx + xt^3dy + 3xyt^2dt) \wedge dy \wedge dz \\ & & &= yt^3dx \wedge dy \wedge dz + 3xyt^2dt \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

**Teorema 1.46.** Sean  $\alpha, \beta$  en  $\mathbb{R}^n$   $n$ -formas diferenciales,  $\gamma$  una  $l$ -forma diferencial y  $\lambda, \kappa$  constantes. Se tiene:

- 1)  $d(\lambda\alpha + \kappa\beta) = \lambda d\alpha + \kappa d\beta$ .
- 2)  $d(\alpha \wedge \gamma) = (d\alpha) \wedge \gamma + (-1)^k \alpha \wedge (d\gamma)$ .
- 3)  $d\alpha = 0 = d\beta$ .

**Definición 1.47.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función suave y sea  $\alpha$  una  $k$ -forma diferencial en  $\mathbb{R}^m$ . El *pullback* de  $\alpha$  por  $f$  denotado por  $f^*\alpha$  es una  $k$ -forma diferencial en  $\mathbb{R}^n$  definida por:

$$f^*\alpha = \alpha \circ f.$$

**Teorema 1.48.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función suave.

- 1) Para las  $k$ -formas diferenciales en  $\mathbb{R}^m$  y los escalares  $a, b$  se cumple:

$$f^*(a\alpha + b\beta) = af^*\alpha + bf^*\beta.$$

- 2) Para una  $k$ -forma diferencial  $\alpha$  y una 1-forma  $\beta$  en  $\mathbb{R}^m$  se cumple:

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha \wedge f^*\beta).$$

- 3) Para una  $k$ -forma diferencial  $\alpha$  en  $\mathbb{R}^m$ .

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha).$$

### 1.3.2. Integración en Formas

**Definición 1.49.** Sea  $M^n$  una variedad orientada  $n$ -dimensional y  $\alpha$  una  $n$ -forma  $\alpha = f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  definida en  $M^n$ , entonces:

$$\int_{M^n} \alpha = \pm \int_{M^n} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \cdots dx_n \tag{1.1}$$

donde la integral de la derecha es una integral múltiple común de  $\mathbb{R}^n$  y el signo que le corresponde a esta misma depende de la orientación de  $M^n$ .

**Definición 1.50.** Sea  $M^n$  una variedad orientada  $n$ -dimensional,  $\phi$  un diffeomorfismo que preserva orientación y  $\alpha$  una  $n$ -forma  $\alpha = f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  definida en  $M^n$ , entonces:

$$\int_{\phi(M^n)} \alpha = \int_{M^n} \phi^*(\alpha) \quad (1.2)$$

donde  $\phi^*(\alpha)$  es el pullback de  $\alpha$  bajo  $\phi$ .

**Teorema 1.51. Teorema Generalizado de Stokes.** Sea  $M^n$  una variedad  $n$ -dimensional que es suave y compacta siendo  $\partial M^n$  su frontera que a su vez induce orientación. Considere,  $\phi$ , una  $(n - 1)$  forma en  $M^n$ , entonces:

$$\int_{M^n} d\phi = \int_{\partial M^n} \phi.$$

*Observación.* Antes de pasar a un ejemplo es importante decir que el teorema generalizado de Stokes engloba los siguientes 3 teoremas:

**Teorema 1.52. Teorema de Green.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región simple y con orientación positivada dada por su frontera  $\partial D$ . Suponga que  $P : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $Q : D \rightarrow \mathbb{R}$  son ambas de clase  $C^1$ . Entonces:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

**Teorema 1.53. Teorema de Stokes.** Sea  $S$  una superficie orientada definida por una parametrización  $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , donde  $D$  es una región en la que el teorema de Green es válido. Sea  $\partial S$  la frontera con orientación de  $S$  y  $F$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en  $S$ . Entonces:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot dl$$

**Teorema 1.54. Teorema de la divergencia de Gauss.** Sea  $W$  una región simétrica y elemental del espacio ( $\mathbb{R}^3$ ). Si denotamos por  $\partial W$  a la superficie cerrada que encierra a  $W$  y tenemos un  $F$  campo vectorial suave definido en  $W$ , entonces:

$$\iiint_W (\nabla \cdot F) dV = \iint_{\partial W} F \cdot dS.$$

**Ejemplo 1.55.** En la [Figura 1.3](#) tenemos representada la región que denotaremos por  $\Omega$ , la cual queremos obtener el área superficial.

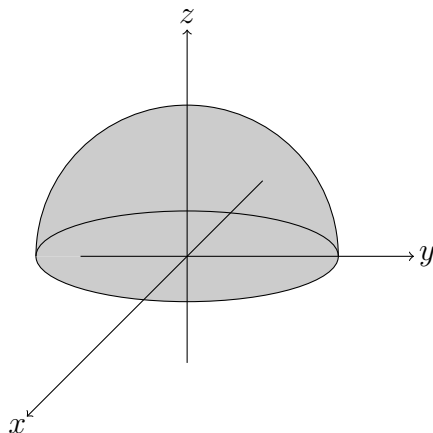


Figura 1.3: Región  $\Omega$  de la cual queremos obtener el área superficial.

Nótese que la región puede que buscamos es:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z > 0\}$$

Ahora, el obtener el área superficial puede ser computado tras parametrizar la curva de nuestra superficie en el plano  $yz$  y rotándola. La parametrización que usaremos es:

$$a(u) = (0, \cos u, \sen u) \quad \text{con } 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Y ahora, como queremos una rotación en el eje  $z$  escribimos la matriz de rotación correspondiente en términos del ángulo  $v$ .

$$R_z(v) = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto, la parte superior de la esfera queda parametrizada por:

$$\varphi(u, v) = R_z(v)a(u) = \begin{pmatrix} \cos u \sen v \\ \cos u \cos v \\ \sen u \end{pmatrix}$$

La región tras hacer el pullback es:

$$S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq \pi\}$$

Usando el teorema generalizado de Stokes con  $w = xdy$  obtenemos:

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\Omega} d(xdy) = \int_{\Omega} dx \wedge dy = \iint_S \varphi^*(dx \wedge dy) = \iint_S dx(\varphi) \wedge dy(\varphi)$$

Ahora hacemos los cálculos necesarios:

$$\begin{aligned} dx(\varphi) &= d(\cos u \sen v) = \cos v \cos u \, dv - \sen u \sen v \, du \\ dy(\varphi) &= d(\cos u \cos v) = -\sen v \cos u \, du - \sen u \cos v \, dv \\ dx(\varphi) \wedge dy(\varphi) &= \sen v \cos v \cos^2 u \, du \wedge dv - \sen v \cos v \sen^2 u \, dv \wedge du \\ &= \sen v \cos v \, du \wedge dv \end{aligned}$$

Regresando a la integral:

$$\begin{aligned} \iint_S dx(\varphi) \wedge dy(\varphi) &= \iint_S \sen v \cos v \, du \wedge dv = \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \sen v \cos v \, dudv \\ &= \int_0^\pi du \int_0^{\pi/2} \sen v \cos v \, dv = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sen 2v}{2} \, dv \\ &= \pi \int_0^\pi \sen t \, dt = \pi \end{aligned}$$

## 1.4. Tensores

Antes de comenzar es importante decir que los espacios vectoriales en general serán de dimensión finita y en caso contrario se hará una precisión al respecto.

**Definición 1.56.** Un *tensor  $k$ -covariante*  $F$  en  $V$  es una aplicación multilinear de la forma:

$$F : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Definición 1.57.** Un *tensor  $l$ -contravariante*  $F$  en  $V$  es una aplicación multilinear de la forma:

$$F : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Definición 1.58.** Un *tensor  $l$ -contravariante,  $k$ -covariante*  $F$  en  $V$  es una aplicación multilinear de la forma:

$$F : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ copias}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}$$

El conjunto de todos los tensores de tipo  $(l, k)$  en  $V$  será denotado por  $T_k^l(V)$ . Es importante notar el siguiente teorema:

**Teorema 1.59.** El conjunto de  $T_k^l(V)$  con las operaciones estándar de adición de funciones reales y multiplicaciones de funciones por escalar forma un espacio vectorial.

**Ejemplo 1.60. Tensores (0,1).** Un tensor  $(0,1)$  es una aplicación lineal  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Es importante notar que  $\alpha \in V^*$  y por eso:

$$T_1^0(V) = V^*.$$

**Ejemplo 1.61. Tensor (1,0).** Un tensor (1,0) es una aplicación lineal  $a : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Note que en este caso  $a \in (V^*)^* = V$ . Y este caso:

$$T_0^1(V) = V.$$

**Ejemplo 1.62. Producto interno (punto) de  $\mathbb{R}^n$ .** Recordemos que  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  es un espacio vectorial y en este tenemos definido un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que sabemos, es simétrico y *bilineal* o *lineal en sus dos entradas*. Particularmente el producto interno es un tensor de tipo (0,2).

**Definición 1.63. Campo tensorial.** Un *campo tensorial*,  $S$ , de tipo  $(l, k)$  en  $V$  es la asignación de un tensor  $S(p)$  de tipo  $(l, k)$  a cada espacio tangente  $T_p(V)$ . Esta asignación es suave en el sentido de que teniendo  $l$ -formas diferenciales suaves  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  y  $k$  campos vectoriales suaves  $X_1, \dots, X_k$ , la función  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(p) = (S(p))(\alpha_1(p), \dots, \alpha_l(p), X_1(p), \dots, X_k(p))$$

es una función suave de  $p$ .

**Ejemplo 1.64. Métrica Riemanniana.** Una métrica Riemanniana definida en una variedad diferenciable  $M$  es usualmente denotada por  $g$  y es un campo tensorial de tipo (0,2) que es simétrico y positivo definido, es decir, para cualesquiera dos vectores  $X, Y \in T_p M$  se cumple:

- 1)  $g(X, Y) = g(Y, X)$ .
- 2)  $g(X, X) > 0$ , y  $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ .

**Ejemplo 1.65. Campo vectorial.** Un campo vectorial  $V$  es un tensor de tipo (1,0). Aún más que esto, un campo vectorial suave es una sección suave de  $TM$ , es decir,  $\Gamma(TM)$ .

**Ejemplo 1.66. Tensores (0, k) alternantes.** Un tensor (0, k) alternante  $\alpha$  es una función de la forma:

$$\alpha : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

que alterna en el mismo sentido que una  $k$ -forma alternante.

**Definición 1.67. Corchete de Lie.** Sean  $X, Y$  dos campos vectoriales. El *corchete de Lie*  $[X, Y]$  de dos campos vectoriales está definido por el operador diferencial:

$$[X, Y] = XY - YX. \tag{1.3}$$

En coordenadas locales con  $X = X^i \partial_i$  y  $Y = Y^i \partial_i$  para funciones suaves  $X^i, Y^i$  el corchete de Lie toma la forma:

$$[X, Y] = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i) \partial_i. \tag{1.4}$$

*Observación.* Un tensor  $B$  de tipo (1,2) cuyo primer entrada es un vector, segunda un covector y tercera entrada es un vector se escribe:

$$B_{i \ k}^j = B(e_i, e^j, e_k).$$



**Definición 1.68.** La *traza* de un tensor es una operación que disminuye el rango de un tensor por 2. Si  $F$  es un tensor de tipo  $(1,1)$  que también podemos pensar como un endomorfismo de  $V$  su traza,  $\text{tr } F$ , es la que comúnmente se conoce de álgebra lineal; la traza de una matriz. Aún más, la traza de un endomorfismo no depende de la base y por lo tanto, está bien definida.

De manera general definimos  $\text{tr} : T_{k+1}^{l+1}(V) \rightarrow T_k^l(V)$  dejando que  $\text{tr } F(\omega^1, \dots, \omega^l, V_1, \dots, V_k)$  sea la traza del endomorfismo:

$$\text{tr } F(\omega^1, \dots, \omega^l, \cdot, V_1, \dots, V_k, \cdot).$$



# Capítulo 2

## Geometría Riemanniana

En este capítulo introducimos y desarrollamos las herramientas matemáticas necesarias para comprender Relatividad. Estas herramientas conciernen a la geometría diferencial, riemanniana y pseudo-riemanniana siendo los puntos centrales de la sección la métrica, la derivada covariante y el tensor de curvatura.

El capítulo está organizado en 7 secciones. En la Sección [2.1. Motivación: Curvas](#) se introducen conceptos de geometría diferencial concernientes a curvas. En la Sección [2.2. Métrica Riemanniana](#) introducimos el concepto de una variedad riemanniana con al igual que una variedad pseudo-riemanniana. En la Sección [2.3. Isometrías](#) damos la definición de isometría y desarrollamos un par de ejemplos. En la Sección [2.4. Conexión Riemanniana](#) introducimos el concepto de una conexión, los símbolos de Christoffel y el lema fundamental de geometría riemanniana definiendo la conexión de Levi-Civita. En la Sección [2.5. Geodésicas](#), primero motivamos la definición que tomaremos para poder describir una curva geodésica, luego derivamos su ecuación con las ecuaciones de Lagrange y finalmente hacemos la misma derivación pero con las herramientas de geometría riemanniana. En la Sección [2.6. Curvatura](#) introducimos el tensor de curvatura, algunas relaciones de simetrías que cumple pero más aún, introducimos el tensor de Ricci y la curvatura escalar. Finalmente en la Sección [2.7. Variedades de Einstein](#) introducimos la condición para que una variedad riemanniana sea considerada de Einstein.

La referencia principal para este capítulo es [\[11\]](#) a excepción de la primer sección para la cual la referencia es [\[5\]](#). Se puede complementar con [\[14\]](#) y [\[19\]](#) que fue de donde sacamos la idea de motivar la definición de las geodésicas tras derivar la ecuación geodésica con un langrangiano. Finalmente, con [\[6\]](#) se pueden complementar todos estos temas con excepción a las variedades de Einstein.

### 2.1. Motivación: Curvas

#### 2.1.1. Curvas Parametrizadas

**Definición 2.1.** Una curva parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de un intervalo  $I = (a, b)$  de la recta real  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ .

La palabra *diferenciable* en la definición anterior significa que hay una correspondencia

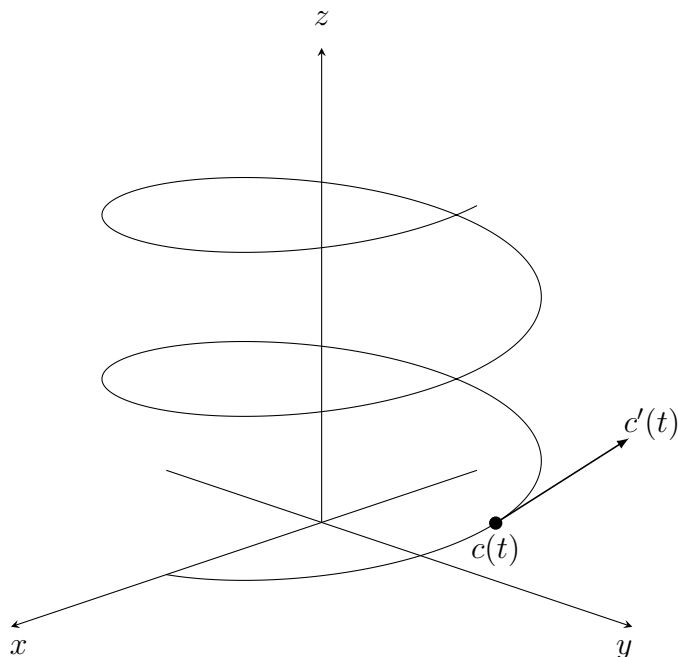


Figura 2.1: Traza de la curva  $c$  descrita en el [Ejemplo 2.3](#). Es importante notar que tenemos también marcado el vector tangente  $c'(t)$  para el punto  $c(t)$ .

que mapea cada  $t \in I$  a un punto  $c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$  de tal manera que las funciones  $x(t), y(t), z(t)$  son diferenciables. La variable  $t$  es el llamado *parámetro* de la curva.

**Definición 2.2.** La imagen  $c(I \subset \mathbb{R}^3)$  es llamada la traza de  $c$ .

**Ejemplo 2.3.** La curva parametrizada diferenciable dada por:

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

tiene su traza en  $\mathbb{R}^3$  y es una hélice de paso  $2\pi b$  sobre el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ .

### 2.1.2. Curvas Regulares: Longitud de Arco

A cualquier punto  $t$  donde  $c'(t) = 0$  se la denomina como *punto singular* de  $c$ . Curvas con este tipo de comportamientos generan cierto problema en la parametrización y por esto nos vamos a centrar en curvas sin puntos singulares.

**Definición 2.4.** Una curva parametrizada diferenciable  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  se denomina regular si  $c'(t) \neq 0$  para todo  $t$  en  $I$ .

De ahora en adelante se consideraran únicamente curvas parametrizadas diferenciables y regulares.

**Definición 2.5.** Dado  $t \in I$ , la *longitud de arco* de una curva regular parametrizada  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

de un punto  $t_0$ , es:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |c'(t)| dt \quad \text{con } |c'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

Un convenio que es usado con respecto a la orientación de curvas es el siguiente. Dada una curva parametrizada por longitud de arco  $s \in (a, b)$  podríamos considerar la curva definida en  $(-b, -a)$  por  $\beta(s) = c(-s)$  que tiene la misma traza pero está descrita en sentido contrario. En este caso se dice que las curvas se diferencian por un *cambio de orientación*.

**Teorema 2.6.** Una curva  $c$  esta parametrizada por longitud de arco  $s$  si y solo si:

$$|c'(s)| = 1$$

### 2.1.3. La Teoría Local de Curvas Parametrizadas por Longitud de Arco

Sea  $c : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco  $s$ . Dado que el vector tangente es unitario, la norma  $|c''(s)|$  de la segunda derivada mide la tasa de cambio del ángulo que tangentes próximas forman con la tangente en  $s$ . Por esta razón  $|c''(s)|$  proporciona una medida de cuán rápidamente se desvía la curva de la recta tangente en  $s$ . Esto sugiere la siguiente definición:

**Definición 2.7.** Sea  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco  $s \in I$ . El número  $|c''(s)| = k(s)$  es llamada la *curvatura* de  $c$  en  $s$ .

Junto con la definición de curvatura se suele introducir lo que es la torsión:

**Definición 2.8.** Sea  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco  $s$  tal que  $c''(s) \neq 0, s \in I$ . El número  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  es llamado la *torsión* de  $c$  en  $s$ .

Algunas ecuaciones que nos son útiles son:

$$\begin{aligned} c''(s) &= k(s)n(s) \\ t(s) &= c'(s) \text{ vector tangente (unitario)} \\ t'(s) &= c''(s) = k(s)n(s) \text{ } n \text{ es el vector normal } k \text{ es la curvatura} \\ b(s) &= t(s) \times n(s) \text{ vector binormal} \\ b'(s) &= t(s) \times n'(s) \\ b'(s) &= \tau(s)n(s) \text{ } n \text{ es el vector normal } \tau \text{ es la torsión} \end{aligned}$$

Dentro de las ecuaciones anteriores, se le conoce como las Formulas de Frenet a las siguientes:

**Definición 2.9. Formulas de Frenet.**

$$\begin{aligned} t' &= kn, \\ n' &= -kt - \tau b, \\ b' &= \tau n \end{aligned}$$

**Teorema 2.10. Teorema fundamental de la teoría local de curvas.** Dadas funciones diferenciables  $k(s) > 0$  y  $\tau(s)$ ,  $s \in I$ , existe una curva parametrizada regular  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s$  es la longitud de arco,  $k(s)$  es la curvatura y  $\tau(s)$  es la torsión. Aún más, cualquier curva  $\tilde{c}$  que satisface las mismas condiciones, difiere de  $c$  por un movimiento rígido; esto es, existe una transformación lineal ortogonal  $p$  de  $\mathbb{R}^3$ , con determinante positivo y un vector  $c$  tal que  $\tilde{c} = p \circ c + c$ .

*Observación.* En esta sección se optó muchas veces por usar la notación de  $c'(t)$  para la derivada porque usando la misma notación que usa [5] y el formalismo donde en principio a  $t$  solo se le considera un parámetro y no es necesariamente tiempo. De aquí en adelante si denotaremos a este parámetro como el tiempo y se optará por usar la notación de Newton, es decir,  $\dot{c}(t)$ .

## 2.2. Métrica Riemanniana

**Definición 2.11. Métrica Riemanniana.** Una métrica de Riemann en  $U$  es un campo tensorial  $(0,2)$   $g$  que es suave y que satisface las siguientes dos propiedades:

- 1)  $g$  es simétrico. Se tiene que para todo  $p$  de  $U$  y todos los vectores tangentes  $X_p, Y_p \in T_pU$ :

$$g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p).$$

- 2)  $g$  es no degenerado. Es decir, para todo  $p \in U$  y todos los vectores tangentes  $X_p \in T_pU$ :

$$g_p(X_p, X_p) \geq 0$$

la igualdad,  $g_p(X_p, X_p) = 0$  se cumple sí y solo sí  $X_p = 0_p$ .

*Observación.* Es importante notar que de la definición pasada hay dos símbolos para la métrica,  $g$  y  $g_p$ . Esto viene directamente de que  $g$  es un *campo tensorial* y por esto tenemos un tensor distinto en cada punto  $p$  de  $U$  que es denotado por  $g_p$ . De manera general podemos pensar que para dos campos vectoriales suaves  $X, Y$  de  $U \in \mathbb{R}^n$  la función:

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p)$$

es suave en  $p$ . Aquí pensamos a  $X_p$  y  $Y_p$  como los vectores tangentes de los espacios correspondientes en  $p$ .

En la literatura es común que a la métrica riemanniana simplemente se le refiera como *tensor métrico*.

**Definición 2.12.** Una *variedad riemanniana* consiste de una variedad diferenciable  $U$  que tiene definido una métrica  $g$ . Se le denota como la pareja  $(U, g)$ .

Teniendo en cuenta que sabemos cuál es la base para un campo tensorial de cualquier tipo podemos representar  $g$  de la siguiente manera:

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

note que  $g_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tienen que ser funciones suaves y que  $dx_i$  son una forma perteneciente a la base canónica de  $T^*U$ .

Dado que tenemos un doble índice,  $g_{ij}$ , podemos darle una representación matricial a nuestro tensor métrico. Si definimos  $G = [g_{ij}]$  y consideramos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  siendo representaciones de  $X, Y$  en vectores columna bajo la base usual de  $TU$ , podemos escribir la métrica de Riemann como:

$$g(X, Y) = \mathbf{y}^T G \mathbf{x}.$$

La traducción de las propiedades de la métrica de Riemann a matrices es dada con que  $g_{ij}$  tiene que ser igual a  $g_{ji}$  para la primera propiedad y que  $\mathbf{x}^T G \mathbf{x} \geq 0$  donde la igualdad solo ocurre si  $\mathbf{x} = 0$ .

*Observación.* Una variedad *pseudo-riemanniana* es idéntica a una riemanniana pero esta no es positiva definida, es decir no necesariamente  $g(X, X) > 0$ .

## 2.3. Isometrías

**Definición 2.13. Isometría.** Una isometría de una variedad (pseudo-)riemanniana  $(N, g')$  es una transformación  $T : N \rightarrow N$  que cumple que:

$$T^*(g') = g'. \quad (2.1)$$

Y solo bajo esta condición se dice que  $T$  es una isometría de  $N$  o que  $T$  deja invariante (o preserva) a  $g'$ .

### 2.3.1. Ejemplos

**Definición 2.14.** Sea  $(U, g)$  una variedad riemanniana. Si  $c : [a, b] \rightarrow U$  es una curva parametrizada, regular y suave para la que  $\dot{c}(t) \neq 0$  para toda  $t \in [a, b]$ . Definimos la longitud de arco de  $c$  como:

$$s(c) = \int_a^b [g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))]^{1/2} dt$$

**Ejemplo 2.15. Espacio euclidiano  $\mathbb{R}^2$ .** Considere  $U = \mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(u, v)$  junto con:

$$g_0 = du \otimes du + dv \otimes dv = du^2 + dv^2 \quad G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como comentario aclaratorio el 0 en  $g$  aquí solo es usado para numeración. Dicho esto, lo primero que quiero hacer aquí es comprobar que  $g_0$  cumpla con ser un tensor métrico. Esto es más sencillo en general usando la forma matricial y por eso no voy a tomar este camino. Podemos comprobar que es simétrico si consideramos  $x = (x_1, x_2)$  y  $y = (y_1, y_2)$  con  $x, y \in \mathbb{R}^2$

y notamos que:

$$\begin{aligned}
 g_0(x, y) &= (du \otimes du + dv \otimes dv)(x, y) \\
 &= du \otimes du(x, y) + dv \otimes dv(x, y) \\
 &= du(x) \otimes du(y) + dv(x) \otimes dv(y) \\
 &= dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 \\
 &= dy_1 dx_1 + dy_2 dx_2 = du \otimes du(y, x) + dv \otimes dv(y, x) \\
 &= (du \otimes du + dv \otimes dv)(y, x) \\
 g_0(x, y) &= g_0(y, x)
 \end{aligned}$$

Y entonces,  $g_0$  es simétrico. Algo interesante a notar aquí es que  $g_0$  actúa de la misma manera que el producto interno. Ahora necesitamos comprobar que es no degenerado, para esto solamente necesitamos usar  $x$ .

$$\begin{aligned}
 g_0(x, x) &= (du \otimes du + dv \otimes dv)(x, x) \\
 &= du \otimes du(x, x) + dv \otimes dv(x, x) \\
 &= dx_1^2 + dx_2^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Dado que estamos trabajando con reales sabemos que  $x_i^2 \geq 0$  y la igualdad solo pasa si  $x_i = 0$  lo que hace a  $g_0$  no degenerado y por lo tanto  $(\mathbb{R}^2, g_0)$  cumple con todo lo necesario para ser una variedad riemanniana.

Consideremos una curva parametrizada, diferenciable y regular  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que consideraremos tiene la forma  $c(t) = (x(t), y(t))$ . Ahora vemos como actúa  $g_0$  sobre  $c$ .

$$g_0(c(t), c(t)) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)$$

por lo que directamente vemos:

$$s_0(c) = \int_a^b [g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))]^{1/2} dt = \int_a^b [\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)]^{1/2} dt$$

Que es justamente la expresión que esperaríamos encontrar. Ahora quiero que consideremos una transformación lineal dada por:

$$T(u, v) = \lambda(u, v).$$

Veamos con el pullback de  $g_0$  bajo  $T$  si esta puede ser una isometría de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}
 T^*(g_0) &= T^*(du^2 + dv^2) \\
 &= d(T(u))^2 + d(T(v))^2 \\
 &= d(\lambda u)^2 + d(\lambda v)^2 \\
 &= \lambda^2 du^2 + \lambda^2 dv^2 \\
 &= \lambda^2 (du^2 + dv^2) \\
 T^*(g_0) &= \lambda^2 g_0
 \end{aligned}$$

Podemos ver que para que  $T$  sea una isometría se debe cumplir que  $\lambda = \pm 1$ .



**Ejemplo 2.16. Plano hiperbólico superior.** Para empezar primero definimos el plano hiperbólico superior.

$$\mathbb{H}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$$

En este espacio consideraremos la siguiente métrica:

$$g_1 = \frac{du \otimes du + dv \otimes dv}{v^2} = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

Para ejemplificar, veamos como actúa sobre un vector  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2$ .

$$g_1(x, x) = \frac{(du \otimes du + dv \otimes dv)(x, x)}{x_2^2} = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}$$

Y lo que verdaderamente nos interesa es ver como actúa la métrica en la curva  $c$ .

$$l_1(c) = \int_a^b \left[ \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{y^2(t)} \right]^{1/2} dt = \int_a^b \frac{1}{y(t)} [\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)]^{1/2} dt$$

Vemos que claramente hay una diferencia con la longitud de arco común de  $\mathbb{R}^2$ . Al igual que con el ejemplo pasado, vamos a ver si  $T$  es una isometría pero dado que no tenemos vectores con  $y$  negativa tenemos que introducir la restricción de que  $\lambda > 0$ . Es decir, consideraremos:

$$T(u, v) = \lambda(u, v), \quad \lambda > 0.$$

Ahora hacemos los cálculos:

$$\begin{aligned} T^*(g_1) &= \frac{\lambda^2 du^2 + \lambda^2 dv^2}{\lambda^2 v^2} \\ &= \frac{\lambda^2 (du^2 + dv^2)}{\lambda^2 v^2} \\ &= \frac{du^2 + dv^2}{v^2} \\ T^*(g_1) &= g_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T$  con  $\lambda > 0$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$ .

## 2.4. Conexión Riemanniana

**Definición 2.17. Conexión lineal.** Una conexión lineal en una variedad suave  $M$  es una función  $\nabla$  tal que:

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que cumple:

1)  $\nabla_X Y$  es lineal sobre  $C^\infty(M)$  en  $X$ . Es decir que para  $f, g \in C^\infty(M)$  se cumple:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y,$$

2)  $\nabla_X Y$  es lineal sobre  $\mathbb{R}$  en  $Y$ . Para  $a, b \in \mathbb{R}$  se cumple:

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2,$$

3)  $\nabla$  cumple la regla de Leibniz o la regla del producto. Para  $f \in C^\infty(M)$  se cumple:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y.$$

Es importante decir que  $Xf$  corresponde a la derivada direccional común y que  $\nabla_X Y$  es llamada la derivada covariante de  $Y$  en la dirección de  $X$ .

**Definición 2.18. Símbolos de Christoffel.** Sea  $M$  una variedad suave con una conexión lineal  $\nabla$ . Los símbolos de Christoffel se definen como:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k. \quad (2.2)$$

**Lema 2.19.** Sea  $\nabla$  una conexión lineal definida en  $M$  y sean  $X, Y \in \Gamma(M)$  expresados en coordenadas locales como  $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j$ . Entonces:

$$\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}) \partial_k. \quad (2.3)$$

**Definición 2.20.** El *tensor de torsión* es un campo tensorial de tipo  $(2, 1)$   $\tau : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  es definido por:

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

**Teorema 2.21. Lema fundamental de Geometría Riemanniana.** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana (o pseudo-Riemanniana). Existe una única conexión lineal en  $M$ , llamada la conexión de Levi Civita, que cumple:

1) Compatibilidad con  $g$ . En otras palabras:

$$\nabla g = 0.$$

2) Que es libre de torsión, es decir:

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Aún más, de esta conexión surge la formula de Koszul. Para los campos vectoriales  $X, Y, Z$  se cumple:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y]). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Particularmente los símbolos de Christoffel para una variedad Riemanniana pueden ser obtenidos con la formula de Koszul. Si sustituimos  $\partial_i, \partial_j, \partial_l$  obtenemos:

$$2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) = \partial_i g(\partial_j, \partial_l) + \partial_j g(\partial_l, \partial_i) - \partial_l g(\partial_i, \partial_j) \\ - g(\partial_j, [\partial_i, \partial_l]) - g(\partial_l, [\partial_j, \partial_i]) + g(\partial_i, [\partial_l, \partial_j]).$$

Para continuar aunque no lo demostraré  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  debe ser cierto para cualquier par de campos vectoriales unitarios. Esto finalmente se obtiene de que las parciales en  $\mathbb{R}^n$  conmutan. Entonces:

$$2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) = \partial_i g(\partial_j, \partial_l) + \partial_j g(\partial_l, \partial_i) - \partial_l g(\partial_i, \partial_j) \\ 2g(\Gamma^k_{ij}\partial_k, \partial_l) = \partial_i g(\partial_j, \partial_l) + \partial_j g(\partial_l, \partial_i) - \partial_l g(\partial_i, \partial_j) \\ 2g_{kl}\Gamma^k_{ij} = \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \\ g^{kl}g_{kl}\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \\ \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

Finalmente las símbolos de Christoffel vemos que pueden ser escritos como:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (2.5)$$

Aún más, de esta expresión directamente podemos ver que:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

## 2.5. Geodésicas

### 2.5.1. Motivación Física

Si consideramos una partícula en movimiento no relativista en  $\mathbb{R}^3$  con masa  $m$  que no está sujeta a ninguna potencial. Sabemos que si  $r = (x, y, z)$ , en el formalismo de Lagrange, su lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Que al usar las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0 \quad \implies \quad \ddot{r}_i = 0$$

Esto nos dice que una partícula libre se mueve a velocidad constante en líneas rectas. De esto, podríamos definir que una geodésica en  $\mathbb{R}^3$  es una curva con velocidad constante, i.e. una línea recta.

Para generalizar esta discusión a espacios curvos debemos introducir lo que nos describe la curvatura del espacio, el tensor métrico, en nuestros cálculos. Esto podemos hacerlo fácilmente

viendo que para un espacio curvo con métrica  $g$  debemos hacer el intercambio de  $\dot{r}^2 \rightarrow g(\dot{r}, \dot{r})$  en nuestro lagrangiano, es decir:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}mg(\dot{r}, \dot{r}) = \frac{1}{2}mg_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Ahora veamos que:

$$\frac{\partial L}{\partial x^l} = \frac{1}{2}m\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

Y:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} &= \frac{d}{dt}(mg_{lj}\dot{x}^j) \\ &= mg_{lj}\ddot{x}^j + m\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j \\ &= mg_{lj}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}m\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}m\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j \\ &= mg_{lj}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}m\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}m\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j \end{aligned}$$

Juntamos todo esto y obtenemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\begin{aligned} g_{lj}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j &= 0 \\ g^{kl}g_{lj}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j &= 0 \\ \delta_j^k\ddot{x}^j + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a lo que un poco más adelante veremos que es la ecuación geodésica:

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

Es decir, que siguiendo el mismo razonamiento por el cual obtuvimos que una partícula no relativista que no está sujeta a ningún potencial se mueve en el espacio en curvas de velocidad constante, que a su vez son rectas. Obtuvimos una condición similar para espacios curvos. Esto le da relevancia a pensar a las geodésicas como curvas de velocidad constante cuya forma es dada por la ecuación geodésica. En este caso no se ve directamente que la curva deba tener una velocidad constante es un «requerimiento» pero en la definición formal que haré partiremos de esto para que sea más claro.

### 2.5.2. Definición

Sea  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva suave como las que hemos considerado anteriormente. Un *campo vectorial a lo largo de una curva* es una función suave  $V : I \rightarrow TM$  tal que  $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$  para cada  $t \in I$ . El espacio de campos vectoriales a lo largo de gamma será denotado como  $\Gamma(\gamma)$ .

Se dice que un campo vectorial  $V$  definido a lo largo de  $\gamma$  es *extendible* si existe un un campo  $\tilde{V}$  en una vecindad de la imagen de  $\gamma$  que cumple que para cualesquiera  $t_1, t_2 \in I$  si  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  entonces  $\tilde{V}(t_1) = \tilde{V}(t_2)$ . En la [Figura 2.2](#) en a) tenemos un campo vectorial extendible mientras que en b) tenemos un campo no extendible.

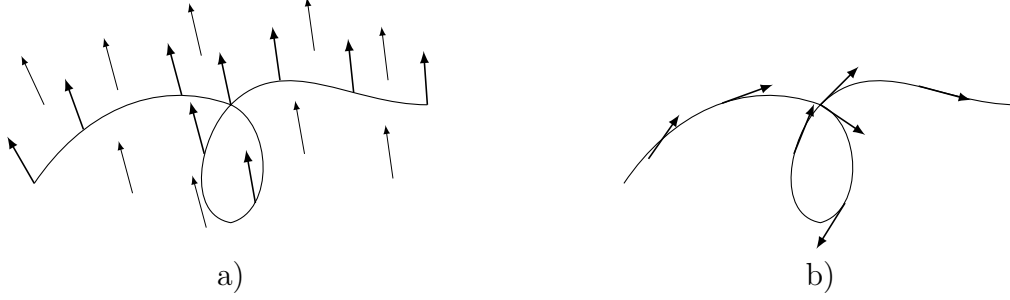


Figura 2.2: En a) tenemos un ejemplo de un campo vectorial extendible mientras que en b) tenemos un campo vectorial no extendible.

**Lema 2.22.** Sea  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ . Para cada curva  $\gamma : I \rightarrow M$ ,  $\nabla$  determina un operador único:

$$D_t : \Gamma(\gamma) \rightarrow \Gamma(\gamma)$$

que satisface:

- 1) Linealidad sobre  $\mathbb{R}$ , es decir, para  $a, b \in \mathbb{R}^3$ :

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW.$$

- 2) Regla de Leibniz. Para  $f \in C^\infty(I)$ :

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV.$$

- 3) Si  $V$  es extendible, entonces para cualquier extensión  $\tilde{V}$  de  $V$ :

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}.$$

Bajo la noción de la poder derivar a lo largo de curvas ahora podemos definir lo que consideraremos una geodésica. Sea  $M$  una variedad con una conexión lineal  $M$  y sea  $\gamma$  una curva en  $M$ . La *aceleración* de  $\gamma$  es un campo vectorial  $F_t\dot{\gamma}$  a lo largo de  $\gamma$ . Una curva  $\gamma$  es llamada una *geodésica* con respecto a  $\nabla$  si su aceleración es cero, es decir:  $D_t\dot{\gamma}(t) = 0$ . Que si desarrollamos obtenemos:

$$\begin{aligned} D_t\dot{\gamma}(t) &= \ddot{\gamma}^j(t)\partial_j + \dot{\gamma}^j(t)\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\partial_j \\ &= \ddot{\gamma}^j(t)\partial_j + \dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\nabla_{\partial_i}\partial_j \\ &= \ddot{\gamma}^j(t)\partial_j + \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\partial_k \\ &= (\ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)))\partial_k = 0 \end{aligned}$$

La última igualdad es la *ecuación geodésica* aunque es más común escribirla para la componente  $k$ , es decir:

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0 \quad (2.6)$$

Claro aunque está ecuación se debe cumplir para todas las entradas que tenga  $\gamma$ .

**Teorema 2.23. Existencia y unicidad de geodésicas.** Sea  $M$  una variedad con una conexión lineal. Para todo  $p \in M$ , cualquier  $V \in T_p M$  y todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  conteniendo a  $t_0$  y una geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  que satisface  $\gamma(t_0) = p, \dot{\gamma}(t_0) = V$ . Cualesquiera dos geodésicas son idénticas en sus dominios compartidos

*Demostración.* Eligiendo como coordenadas  $(x^i)$  en alguna variedad  $U$  de  $p$  sabemos la curva  $\gamma : I \rightarrow U$  es una geodésica sí y solo sí sus componentes  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  cumplen:

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0$$

Ahora, notemos que si introducimos la variable  $v^i(t) = \dot{x}^i(t)$  obtenemos el siguiente sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}^k(t) &= v^k(t) \\ \dot{v}^k(t) &= -v^i(t)v^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)).\end{aligned}$$

Recordando el Teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones de primer orden, sabemos que nuestro sistema tiene solución. La parte de unicidad necesita un poco más de razonamiento pero esto viene directamente del mismo teorema por lo que no enseñaré esa parte de la prueba. ■

**Ejemplo 2.24. Geodésicas en el plano Hiperbólico Superior.** Considerando el plano hiperbólico superior  $\mathbb{H}^2$  con su métrica usual dada por:

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Usando la [Ecuación \(2.5\)](#) obtenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{2l}(\partial_1 g_{1l} + \partial_1 g_{l1} - \partial_l g_{11}) & \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0 \\ &= \frac{1}{2}y^2\left(\frac{2}{y^3}\right) = \frac{1}{y} & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{y}\end{aligned}$$

Usando [Ecuación \(2.6\)](#) obtenemos la ecuación que nos definirá las geodésicas:

$$\begin{aligned}\ddot{x}y &= 2\dot{x}\dot{y} \\ \ddot{y}y + \dot{x}^2 - \dot{y}^2 &= 0\end{aligned}$$

En este caso, quiero que usemos este sistema de ecuaciones y consideremos una serie de manipulaciones a la función  $y\dot{y}\dot{x}^{-1} + x$ . Véase que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y\dot{y}\dot{x}^{-1} + x) &= \dot{y}^2\dot{x}^{-1} + y\ddot{y}\dot{x}^{-1} - \ddot{x}y\dot{x}^{-2} + \dot{x} \\ &= \dot{y}^2\dot{x}^{-1} + y\ddot{y}\dot{x}^{-1} - 2\dot{y}^2\dot{x}^{-1} + \dot{x} \\ &= y\ddot{y}\dot{x}^{-1} + \dot{x} - \dot{y}^2\dot{x}^{-1} \\ &= x^{-1}(y\ddot{y} + \dot{x}^2 - \dot{y}^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

Lo que nos dice que  $y\dot{y}\dot{x}^{-1} + x$  es constante. Más aún, si integramos obtenemos:

$$\begin{aligned} y\dot{y}\dot{x}^{-1} + x &= a \\ \int (\dot{y}y + \dot{x}x)dt &= \int a\dot{x}dt \\ \frac{1}{2}(y^2 + x^2) &= ax + b \\ x^2 + y^2 - ax &= b \end{aligned}$$

Esta última expresión es justamente la ecuación de las geodésicas en  $\mathbb{H}^2$ .

## 2.6. Curvatura

**Definición 2.25. Tensor de Curvatura.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana. El endomorfismo de curvatura es la función  $R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$  definida por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (2.7)$$

Este endomorfismo, a su vez define el 4-covariante campo tensorial llamado *tensor de curvatura* como:

$$R(X, Y, Z, W) = \langle W, R(X, Y)Z \rangle \quad (2.8)$$

**Teorema 2.26.** El tensor de curvatura cumple las siguientes simetrías para cualesquiera campos vectoriales  $W, X, Y, Z$ :

- 1)  $R(W, X, Y, Z) = -R(X, W, Y, Z)$ .
- 2)  $R(W, X, Y, Z) = -R(W, X, Z, Y)$ .
- 3)  $R(W, X, Y, Z) = R(Y, Z, W, X)$ .
- 4)  $R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) = 0$ .

La simetría mostrada en 4) es conocida como la primera identidad de Bianchi.

**Teorema 2.27.** La derivada covariante total del tensor de curvatura satisface la siguiente igualdad:

$$\nabla_W R(X, Y, Z, V) + \nabla_Z R(X, Y, V, W) + \nabla_V R(X, Y, W, Z, V) = 0 \quad (2.9)$$

### 2.6.1. Tensor de Ricci y la Curvatura Escalar

El tensor de curvatura al ser de tipo (0,4) lo hace complicado de manejar por lo que se acostumbra hacer uso de otras construcciones que simplifiquen parte de la información que nos brinda este. La primera construcción que nos es relevante es el *tensor de Ricci*.

**Definición 2.28. Tensor de Ricci.** El *tensor de Ricci* es un 2-covariante campo tensorial definido como la traza del tensor de curvatura como endomorfismo, es decir:

$$Ric(X, Y) = g(R(e_i, X)Y, e_i) \quad Ric_{ij} = \text{Tr}_g R_{kijl} = g^{kl} R_{kijl} \quad (2.10)$$

Más aún, podemos definir  $Ric(x)$ , un endomorfismo, de manera implícita con:

$$g(Ric(X), Y) = Ric(X, Y) \quad (2.11)$$

La segunda construcción relevante es la *curvatura escalar*.

**Definición 2.29. Curvatura Escalar.** La *curvatura escalar* está definida como la traza del tensor de Ricci, es decir:

$$S = Ric(e_i, e_i) \quad S = \text{Tr}_g Ric_{ij} = g^{ij} Ric_{ij} \quad (2.12)$$

**Lema 2.30. Identidad de Bianchi contraída.** La derivada covariante del tensor de Ricci y la curvatura escalar satisfacen la siguiente igualdad:

$$\text{div } Ric = \frac{1}{2} \nabla S \quad R_{ij; j} = \frac{1}{2} S_{; i} \quad (2.13)$$

### 2.6.2. Intuición Geométrica

Esta subsección está inspirada por el apartado que se tratan los detalles matemáticos de las ecuaciones de Einstein presente en [3].

Una de las grandes herramientas de tener una conexión es que esta nos permite *transportar paralelamente*. Para visualizar esto un poco quiero que veamos lo que sería su equivalente en un plano. Si en un punto arbitrario de  $p$  de  $\mathbb{R}^2$  como está representado en la [Figura 2.3](#) nosotros tenemos dos vectores  $w_1$  en rojo y  $u$  en negro, es fácil ver que  $w_2$  es  $w_1$  trasladado a través de  $u$ . La idea es similar a cuando sumamos gráficamente vectores en el plano pero nos quedamos a medias. Ahora, lo que estoy diciendo es que en  $\mathbb{R}^2$  nosotros tenemos una forma muy sencilla de trasladar vectores por otros vectores. El vector inicial  $w_1$  es paralelo en el sentido de que «conservó» su orientación a través de trasladarlo por  $u$  y resultó en  $w_2$ . En general esta es la esencia del transporte paralelo pero la idea puede ser extendida no solo a traslación sobre vectores sino que sobre curvas.

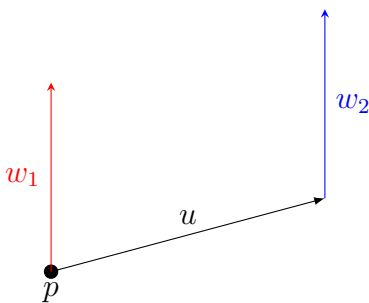


Figura 2.3: Intuición geométrica del Tensor de Curvatura. Idea inspirada por [3].



Cabe decir que con las ideas fundamentales que introduje sobre transporte paralelo sí son las esenciales pero es importante darnos cuenta de un ejemplo en un espacio plano. Cuando hablamos de espacios curvos no necesariamente el vector se verá igual que como inicio. El vector puede ser rotado tras ser transportado paralelamente por una curva debido a la curvatura y aquí es donde entra el tensor de curvatura.

Considerando que ya estamos en un espacio con curvatura, en la [Figura 2.4](#) en un punto  $p$  nosotros tenemos los vectores  $u, v, w$ . Si por una cantidad infinitesimal  $\epsilon > 0$  se traslada al vector  $w$  a través de  $\epsilon u$  y luego  $\epsilon v$  para que el vector resultante sea  $w_1$ . De la misma manera también trasladamos a  $w$  a través de  $\epsilon v$  y luego  $\epsilon u$  para que el vector resultante sea  $w_2$ . El tensor de curvatura  $R_p(u, v)w$  calcula la diferencia entre los vectores  $w_1$  y  $w_2$  y con esto, la curvatura en un punto.

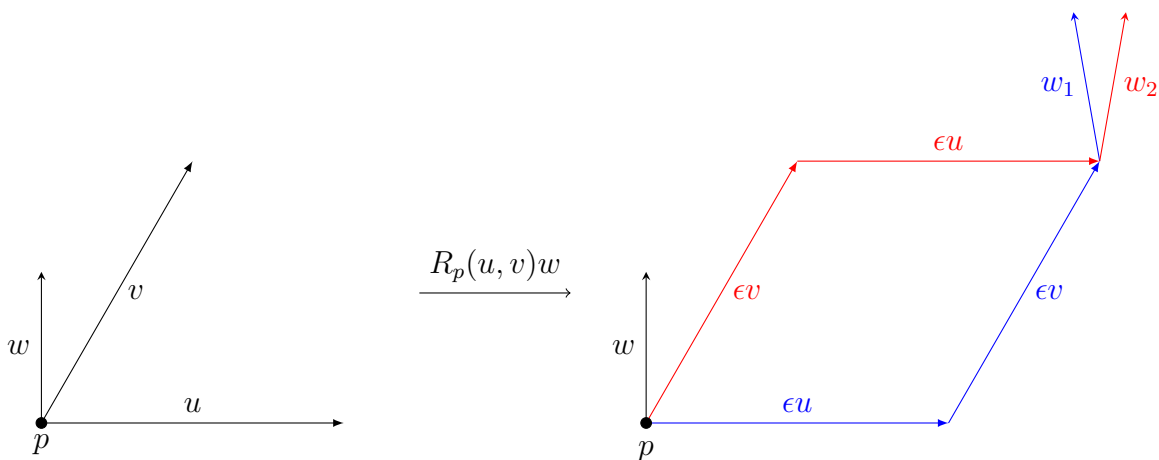


Figura 2.4: Intuición geométrica del tensor de curvatura. Idea inspirada por [3].

De una manera similar, el tensor de Ricci para un vector  $x$  en un punto  $p$ , es decir  $Ric_p(x)$ , es el promedio de las curvaturas seccionales en el punto y la curvatura escalar  $S$  es el promedio de las curvaturas.

## 2.7. Variedades de Einstein

Una variedad Riemanniana  $(M, g)$  se dice que es de Einstein o equivalentemente, que  $g$  es una métrica de Einstein si se cumple que:

$$Ric = \lambda g. \quad (2.14)$$

Lo primero a recalcar de esta igualdad es que tenemos que recordar que la métrica es un tensor de tipo  $(2,0)$  que además es simétrico por lo que claro, el tensor de Ricci también lo tiene que ser. Y ahora, aunque parezca una condición muy simple en realidad nos dice algo muy fuerte. Nos dice que la variedad de Einstein de la que estamos hablando cumple las ecuaciones de Einstein en el vacío e incluso se puede sacar más información de esta ecuación.

Específicamente sí tomamos traza de ambos lados obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_g Ric_{ij} &= \lambda \mathrm{Tr}_g g_{ij} \\ S &= \lambda g^{ij} g_{ij} \\ S &= \lambda \delta_i^i \\ S &= \lambda \dim M \\ \therefore \lambda &= \frac{1}{n} S\end{aligned}$$

Con esto, la condición para una métrica de Einstein es:

$$Ric = \frac{1}{n} Sg. \quad (2.15)$$

**Proposición 2.31.** Si  $g$  es una métrica de Einstein en una variedad conectada de dimensión  $n \geq 3$ , su curvatura escalar es constante.

*Demostración.* Empezamos tomando la derivada covariante de ambos lados de la [Ecuación \(2.15\)](#):

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_k} \left( Ric_{ij} = \frac{1}{n} Sg_{ij} \right) \\ \nabla_{\partial_k} Ric_{ij} &= \frac{1}{n} S \nabla_{\partial_k} g_{ij} + \frac{1}{n} g_{ij} \nabla_{\partial_k} S \\ \partial_k Ric_{ij} &= \frac{1}{n} g_{ij} \partial_k S \\ Ric_{ij;k} &= \frac{1}{n} g_{ij} S_{;k}\end{aligned}$$

Los subíndices tras el punto y coma representan la dirección de la derivada. Dicho esto, ahora tomamos traza sobre  $j$  y  $k$  para luego comparar con la identidad contraída de Bianchi:

$$\begin{aligned}g^{jk} Ric_{ij;k} &= \frac{1}{n} g^{jk} g_{ij} S_{;k} \\ Ric_{ij}{}^{;j} &= \frac{1}{n} \delta_i^k S_{;k} \\ Ric_{ij}{}^{;j} &= \frac{1}{n} S_{;i} \\ \frac{1}{2} S_{;i} &= \frac{1}{n} S_{;i}\end{aligned}$$

Dado que  $n > 2$  debemos tener que  $S_{;i} = 0$  Pero  $S_{;i}$  es el componente  $\nabla S = ds$  por lo que que  $M$  sea conectada implica que  $S$  es constante. ■

El término de «métrica de Einstein» surgió de física. Veremos más a detalle en el siguiente capítulo que la idea central de la Teoría de Relatividad General de Einstein es que el espacio tiempo es modelado por una variedad 4 dimensional que lleva consigo una métrica Lorentziana cuya curvatura de Ricci satisface las ecuaciones de Einstein dadas por:

$$Ric - \frac{1}{2} Sg = T$$

donde  $T$  es un tensor de rango 2 simétrico comúnmente llamado el tensor de energía momento. Dicho tensor describe la densidad de momento y estrés de la materia y energía presentes en cada punto del espacio tiempo.



# Capítulo 3

## Relatividad General

En este capítulo con parte de las herramientas que ya introdujimos en los capítulos pasados buscamos el darle sentido a conceptos de Relatividad Especial como el cono de luz y el grupo de Poincaré. Aún más, buscamos darle un sentido a las ecuaciones de Einstein entendiendo los tensores presentes en estas y para finalizar, presentamos la solución de Schwarzschild.

El capítulo está organizado en 4 secciones. En la Sección 3.1. [Espacio de Minkowski](#) hablamos sobre el espacio de Minkowski y del cono de luz. En la Sección 3.2. [Grupo de Poincaré](#) ilustramos el porque el grupo de Poincaré es el grupo de isometrías del espacio de Minkowski. En la Sección 3.3. [Las Ecuaciones de Campo de Einstein](#) entendemos los componentes que tienen las ecuaciones de campo de Einstein. Finalmente, en la Sección 3.4. [La Métrica de Schwarzschild](#) presentamos la solución de Schwarzschild.

La referencia principal para este capítulo es principalmente [4] y algunos temas en general pueden ser encontrados en [6, 19] pero con otro enfoque.

### 3.1. Espacio de Minkowski

Al espacio tiempo de la *Relatividad Especial* se le conoce como el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^4$ . Es decir, tenemos a  $\mathbb{R}^4$  con la métrica Lorentziana  $g$  dada por:

$$g = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Esta métrica se dice que tiene signatura  $(-+++)$  y muchas veces al espacio de Minkowski con esta elección de signos se le abrevia como el espacio  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Para facilitar los cálculos que haremos más adelante vamos a considerar que la velocidad de la luz es igual a uno. Es decir, trabajaremos con la métrica:

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

La elección de una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  respecto a  $g$  para  $\mathbb{R}^4$  nos induce el sistema de coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  que es visto como el sistema de coordenadas preferidas para un observador particular que se percibe en reposo. La coordenada  $x^1$  describe el tiempo medido por este observador. Particularmente si  $x^1 = \text{constante}$  entonces el resto de las coordenadas describen el espacio como lo ve el observador para este tiempo  $x^1$ . La historia del observador está descrita por la curva  $\alpha(t) = (t, a, b, c)$  que nos dice que para cada tiempo

$t$  el observador se queda en el punto  $(a, b, c)$  en su espacio. En general, una partícula con masa en reposo distinta a cero que está en movimiento relativa a nuestro observador en reposo va a ser descrita por las coordenadas de nuestro observador por la curva parametrizada  $\beta(t) = (t, x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ . Esta partícula tiene velocidad

$$\left[ \left( \frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^3}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^4}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}$$

que sabemos no puede moverse a una velocidad mayor a la de la luz, la cual nosotros tomamos como 1. Entonces tenemos:

$$\left( \frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^3}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^4}{dt} \right)^2 < 1$$

y dado que  $x^1(t) = t$  podríamos escribir esto como:

$$-\left( \frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^3}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^4}{dt} \right)^2 < 0.$$

Esta condición es independiente de la parametrización por lo que si quisiéramos tomar el *tiempo propio* que se define como la longitud de arco de  $\beta$  la desigualdad no cambiaría su forma. Más aún, podemos reescribir esta condición en términos de la métrica como:

$$g(\dot{\beta}, \dot{\beta}) = -\left( \frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^3}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^4}{dt} \right)^2 < 0.$$

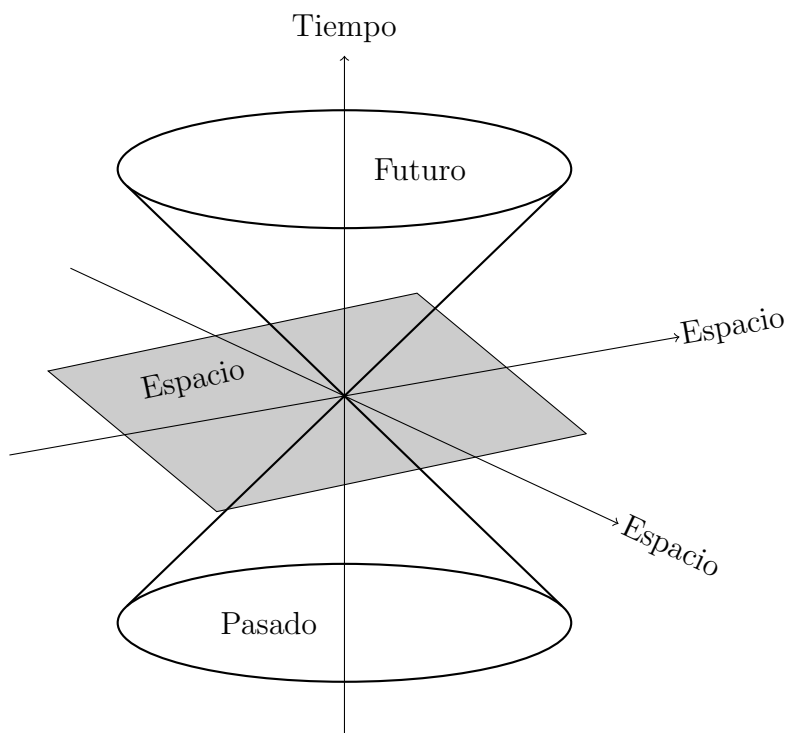


Figura 3.1: Cono de luz característico del Espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Los vectores fuera del cono de luz se dicen de tipo espacio mientras que los de dentro se dicen de tiempo y los que están en el cono son de tipo nulo o tipo luz.

Esto nos da pie a hablar del cono de luz que vemos representado en la [Figura 3.1](#). Este cono de luz es una construcción dada por la métrica  $g$  y esta nos divide al espacio en 5 regiones principales. La primera región que quiero denotar es la superficie del cono. A los vectores que están en la superficie del cono se les dice de tipo nulo y corresponde a los rayos de luz o una partícula sin masa, un fotón, que esté viajando a la velocidad de luz. Cualquier punto sobre el cono tiene la condición  $g = 0$ . La condición de  $g < 0$  coincide con la región de dentro del cono. A los vectores de esta región se les dice de tipo tiempo y corresponden a los observadores en general puesto que no pueden moverse a una velocidad mayor a la de la luz. La condición de  $g > 0$  coincide con la región de fuera del cono. En este caso a los vectores de esta región se les dice de tipo espacio y su velocidad es mayor a la de la luz. Las dos regiones que quedan son la parte con tiempo positivo del cono que concebimos como el futuro y la parte negativa del cono que concebimos como el pasado.

## 3.2. Grupo de Poincaré

Para esta sección queremos explorar el grupo de Poincaré puesto que es el grupo de isometrías del espacio de Minkowski. Recordando que ya sabemos cuál es la condición para una isometría será bueno ver esto para el grupo de Poincaré.

Este grupo está compuesto por traslaciones espaciales y por lo que también se conoce como el grupo de Lorentz que corresponde a rotaciones espaciales y los boosts. En términos más matemáticos tenemos:

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^{3,1}) = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{O}(3, 1).$$

Es importante notar que las traslaciones son simplemente denotadas  $\mathbb{R}^4$  mientras que  $\mathcal{O}(3, 1)$  es el grupo de Lorentz. También es importante notar que el símbolo  $\rtimes$  es una estructura distinta al producto de grupos pero esto no nos es relevante por el momento y solo nos bastará el ver individualmente que las traslaciones y el grupo de Lorentz son isometrías del Espacio de Minkowski.

Empezando con el grupo de traslaciones, sabemos que la traslación de  $v = (t, x, y, z)$  por un vector  $w = (t', x', y', z')$  es de la forma:

$$T_w(v) = v + w.$$

Hacemos el pullback de  $g$  bajo  $T$ ;

$$\begin{aligned} T_w^*(g) &= T_w^*(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= -d(T_w^*(t))^2 + d(T_w^*(x))^2 + d(T_w^*(y))^2 + d(T_w^*(z))^2 \\ &= -d(t + t')^2 + d(x + x')^2 + d(y + y')^2 + d(z + z')^2 \\ &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= g. \end{aligned}$$

Fácilmente vimos que las traslaciones sí son isometrías del espacio de Minkowski. Para el tratamiento del grupo de Lorentz de igual manera queremos hacerlo de la manera más general posible para poder simplificar nuestras cuentas. Es bien sabido que el grupo de Lorentz puede ser definido como:

$$\mathcal{O}(3, 1) = \{A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$$

con:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos comprobar que si  $T(v) = Av$  con  $A \in \mathcal{O}(3, 1)$  entonces:

$$T^*(g) = g.$$

Recordemos que  $A$  debe cumplir que  $A^T J A = J$  y que para un vector  $v = (t, x, y, z)$  la transformación  $T$  actúa como:

$$T(v) = Av = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}t + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z \\ a_{21}t + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z \\ a_{31}t + a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z \\ a_{41}t + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z \end{pmatrix}.$$

Con esto en mente, ahora hacemos el pullback de  $g$  bajo  $T$ :

$$T^*(g) = -d(T^*(t))^2 + d(T^*(x))^2 + d(T^*(y))^2 + d(T^*(z))^2.$$

Es importante recordar que  $x_1 = t$ .

$$\begin{aligned} T^*(g) &= -d(a_{11}t + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z)^2 + d(a_{21}t + a_{22}x + a_{23}y \\ &\quad + a_{24}z)^2 + d(a_{31}t + a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z)^2 + d(a_{41}t + \\ &\quad a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z)^2 \\ &= \sum_{j=2}^4 \left( \sum_{i=1}^4 a_{ji} dx_i \right) \otimes \left( \sum_{k=1}^4 a_{jk} dx_k \right) - \left( \sum_{i=1}^4 a_{1i} dx_i \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^4 a_{1j} dx_j \right) \\ &= (-a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2) dt \otimes dt + \sum_{j=2}^4 \left( \sum_{i=2}^4 a_{ij}^2 - a_{1i}^2 \right) dx_j \otimes dx_j \\ &\quad + \sum_{i \neq k}^4 \left( \sum_{j=2}^4 a_{ji} a_{jk} - a_{1i} a_{1k} \right) dx_i \otimes dx_k. \end{aligned}$$

Simplificando las cuentas obtuvimos:

$$\begin{aligned} T^*(g) &= (-a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2) dt \otimes dt + \sum_{j=2}^4 \left( \sum_{i=2}^4 a_{ij}^2 - a_{1j}^2 \right) dx_j \otimes dx_j \\ &\quad + \sum_{i \neq k}^4 \left( \sum_{j=2}^4 a_{ji} a_{jk} - a_{1i} a_{1k} \right) dx_i \otimes dx_k \\ &= -1 dt \otimes dt + \sum_{j=2}^4 1 dx_j \otimes dx_j + \sum_{i \neq k}^4 0 dx_i \otimes dx_k = g. \end{aligned}$$



Donde la penúltima igualdad se sigue del hecho que  $A^T J A = J$  con:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, en el grupo de Poincaré tenemos 4 traslaciones en direcciones  $t, x, y, z$ . Además para cada par de ejes  $xy, yz, zx$  tenemos una rotación isomorfa a:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para cada par de ejes  $xt, yt, zt$  tenemos un boost de Lorentz isomorfo a:

$$\begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}.$$

Recordando el famoso teorema de Noether [15], que en términos coloquiales nos dice que: Toda simetría diferenciable de la acción de un sistema físico con fuerzas conservativas tiene una ley de conservación correspondiente, podemos escribir la relación de cada una de estas simetrías con su correspondiente cantidad conservada como podemos ver ejemplificado en la [Tabla 3.1](#).

Simetría	Cantidad conservada	Dimensiones
Traslación temporal	Energía	1
Traslaciones espaciales	Momento lineal	3
Rotaciones espaciales	Momento angular	3
Boosts de Lorentz	Velocidad del centro de masa	3

Tabla 3.1: Relación entre simetrías y cantidades conservadas junto con la cantidad de dimensiones en las que se conservan.

### 3.3. Las Ecuaciones de Campo de Einstein

En Relatividad General, la métrica de Lorentz  $g$  es vista como un potencial gravitacional y por ello debe ser relacionado a alguna ecuación de campo y a la distribución de masa-energía que generan un campo gravitacional. Las ecuaciones de campo propuestas por Einstein son:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

donde  $G$  es el tensor de Einstein,  $g$  el tensor métrico,  $T$  el tensor de energía momento,  $\Lambda$  es la constante cosmológica y  $\kappa$  es la constante gravitacional de Einstein. El tensor de Einstein está definido como:

$$G_{ij} = Ric_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}S$$

Por lo que también es común que las ecuaciones de campo tomen la forma:

$$Ric_{ij} - \frac{1}{2}Sg_{ij} = T_{ij}.$$

La constante cosmológica en este caso es cero y la constante de Einstein es absorbida por el tensor de energía momento. Particularmente el tensor de energía momento es un campo tensorial 2-covariante en  $M$ . Para cada observador  $v \in M_p$ ,  $T(v, v)$  representa la densidad de energía en  $p$  medida por  $v$  de la distribución de energía momento en el espacio tiempo. El covector  $T(v, \cdot)$  representa la densidad de momento y la forma bilineal  $T|_{v^\perp}$  el tensor de estrés, ambos medidos por  $v$  de la masa-energía en  $p$ . Dado que  $g|_{v^\perp}$  es negativo definido, esto nos dice que el tensor de estrés puede ser diagonalizado con respecto a  $g$  y las entradas diagonales son las presiones principales en  $p$  de la distribución de masa-energía como lo ve  $v$ . En pocas palabras, los componentes  $T_{ij}$  de este tensor nos dicen cuanto momentum en la dirección  $i$  está fluyendo en la dirección  $j$  para algún punto en el espacio tiempo. En algunos casos el flujo de  $t$ -momentum en la dirección de  $t$  es muchas veces referido como densidad de energía mientras que al resto de  $i$ -momentum en la dirección de  $i$  se le refiere como la presión en la dirección de  $i$ .

Ya acabamos de analizar la parte derecha de las ecuaciones de Einstein que justamente corresponde a todo lo respectivo a masa o energía en el universo que estemos considerando. Si ahora analizamos la parte izquierda de estas ecuaciones vemos que tenemos al tensor de Ricci, la curvatura escalar y el tensor métrico. Es decir, tenemos puramente tensores que dan un sentido geométrico a nuestro universo y de aquí la relación que hay entre la masa y la geometría del universo, la curvatura.

Las ecuaciones de Einstein pueden ser motivadas de distintas maneras, particularmente se sabe que en el límite clásico las ecuaciones de Einstein se reducen a la ecuación de Poisson que describe la gravedad de Newton.

Una solución de la ecuación de Einstein es una métrica  $g$  y un tensor de energía momento  $T$  que describe un tipo específico de materia donde estos tensores están relacionados por las ecuaciones de Einstein. En el caso que  $T = 0$  solo necesitamos encontrar una  $g$  que cumpla  $Ric - Sg/2 = 0$ .

Sí aplicamos traza de los dos lados de la ecuación de Einstein vemos que:

$$S = -\text{Tr} T.$$

Esto hace que las ecuaciones de Einstein simplemente se vuelven  $Ric = 0$ . Cuando se tiene esta condición se dice que el espacio es Ricci plano y este tipo de espacios tiempo describen soluciones en el vacío de las ecuaciones de Einstein.

### 3.4. La Métrica de Schwarzschild

Una pequeña nota sobre esa sección es que es más expositiva y por temas de la complejidad del tema hay términos que no se definen. Nos basamos en [4] en donde la convención de signos usadas es (+ - - -) al igual que en esta sección pero esto es un detalle mino que no afecta a los cálculos. Otras aproximaciones a esta misma sección pueden ser encontradas en [6, 19].

La solución más útil de las ecuaciones de Einstein en el vacío es la encontrada por Schwarzschild en 1916 poco después de que Einstein formulara su teoría de Relatividad General

[4]. Esta solución modela el campo gravitacional fuera de una estrella que es esféricamente simétrica, estática y que está aislada.

Esta solución tiene varias consideraciones clave, la primera es que el espacio tiempo  $M$  que consideramos es estático. Esto nos dice que el espacio tiempo no cambia en el tiempo y que además de esto existe un campo vectorial  $X$  distinto de cero que preserva la métrica, es decir:

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$$

que se dice ser de Killing. Aún más, este campo vectorial es de tipo tiempo ( $g(X, X) > 0$ ) y su distribución de 3-planos ortogonales, de tipo espacio, a  $X$  es integrable. Esto está representado en la [Figura 3.2](#).

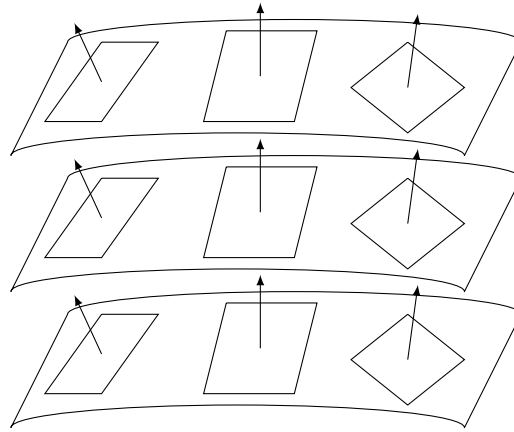


Figura 3.2: Distribución de superficies con 3-planos ortogonales a un vector de Killing.

Nuestra segunda consideración es que el espacio tiempo  $M$  sea esféricamente simétrico. Esto significa que hay una acción isométrica  $\phi$  con el grupo espacial ortogonal  $SO(3)$ , es decir,  $\phi : M \times SO(3) \rightarrow M$  tal que cada órbita es una 2-superficie de tipo espacio con curvatura constante y positiva o un solo punto.

Si consideramos el espacio tiempo  $M = \mathbb{R} \times I \times S^2$ , con  $I$  un intervalo abierto. La motivación para esto es que esta es la forma a la que a  $\mathbb{R}^4$  le damos la forma adecuada para nuestras consideraciones de que sea estático y esféricamente simétrico. En [Figura 3.3](#) tenemos una posible visualización con una dimensión menos. Aún más, considerando la métrica:

$$g = F^2(\rho)dt^2 - d\rho^2 - G^2(\rho)d\sigma^2$$

donde  $t$  y  $\rho$  son las coordenadas estándar en  $\mathbb{R}$  y  $I$  respectivamente mientras que  $d\sigma^2$  es la métrica estándar de  $S^2$ . La coordenada función  $t$  es una función de tiempo global. El grupo  $SO(3)$  actúa isométricamente en  $M$  con órbitas las 2-esferas,  $(t, \rho) = \text{constante}$ . La esfera  $t = t_0$  y  $\rho = \rho_0$  es isométrica en la métrica inducida  $G^2(\rho)d\sigma^2$  a una 2-esfera euclidiana con radio  $G^2(\rho)$ . Las funciones  $F$  y  $G$  van a ser encontradas de manera que tengamos curvatura de Ricci cero.

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la hipersuperficie  $\{t\} \times I \times S^2$  es totalmente geodésica dado que es el punto fijo de una reflexión isométrica ( $t \rightarrow -t$ ). Dado que cada campo vectorial de longitud constante normal a cualquier superficie totalmente geodésica es paralelo a lo largo de la

hipersuperficie se sigue que  $R(y, z)x = 0$  cuando  $x$  es tangente a  $\mathbb{R}$  y  $y, z$  son perpendiculares a  $x$ . Esto implica que  $\partial_t$  es un eigenvector del tensor de Ricci.

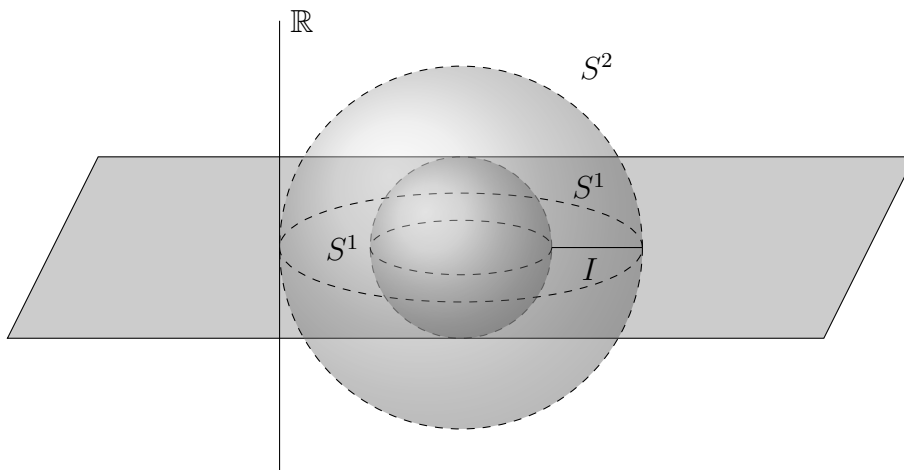


Figura 3.3: Visualización del espacio de dimensión 4 donde se define la métrica de Schwarzschild.

La hipersuperficie  $\mathbb{R} \times I \times S^1$  es totalmente geodésica en  $M$  para cada gran círculo  $S^1$  en  $S^2$  (es el punto fijo de una reflexión de  $S^2$ ) por lo que  $R(y, z)x = 0$  cuando  $x$  es tangente a  $S^2$  y  $y, z$  son perpendiculares a  $x$ . Por lo que cada vector tangente a  $S^2$  es también es un eigenvector de  $Ric$ .

Se sigue que los espacios tangentes a  $\mathbb{R}$  y  $S^2$ , y a  $I$  por ortogonalidad, son eigenespacios de  $Ric$  por lo que el tensor de Ricci es diagonal relativo a la estructura de producto de  $M$  y solo tenemos que obtener los términos diagonales que son sumas de curvaturas seccionales.

Para obtener las curvaturas seccionales relevantes primero notamos que la curva  $\gamma_{(t,p)}(\rho) = (t, \rho, p)$  es una geodésica en  $M$  para cada  $t \in \mathbb{R}$  y  $p \in S^2$  dado que está parametrizada por su longitud de arco y su trayectoria es un componente conexo de un conjunto puntos fijos del grupo de isometrías generado por una reflexión en  $\mathbb{R}$  a través de  $t$  y reflexiones en  $S^2$  sobre grandes círculos a través de  $p$ . El campo vectorial  $\partial_t$  es un campo de Jacobi a lo largo de la curva  $\gamma_{(t,p)}$  y por lo tanto:

$$K(\partial_t \wedge \partial_\rho) = \frac{g(\nabla_{\partial_\rho}^2 \partial_t, \partial_t)}{\|\partial_t \wedge \partial_\rho\|^2} = \frac{F''}{F}$$

De manera similar, para cada vector  $x$  tangente a  $S^2$ ,  $\partial_\theta$  es un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  donde  $\theta$  es la coordenada angular del gran círculo  $S^1$  en  $S^2$  generado por  $x$  y por lo tanto:

$$K(\partial_\rho \wedge x) = \frac{g(\nabla_{\partial_\rho}^2 \partial_\theta, \partial_\theta)}{\|\partial_\theta \wedge \partial_\rho\|^2} = \frac{G''}{G}$$

En otras palabras, obtuvimos la curvatura de un subespacio 2-dimensional que es totalmente geodésico en coordenadas Gaussianas.

Podemos obtener el resto de las curvaturas seccionales observando que para cada  $\rho = \text{constante}$  la hipersuperficie  $\mathbb{R} \times \{\rho\} \times S^2$  la métrica inducida es:

$$g_\rho = F^2(\rho)dt^2 - G^2(\rho)d\sigma^2$$

y la segunda forma fundamental de la hipersuperficie con respecto al campo vectorial, unitario  $\partial_\rho$  es dado por  $\frac{D}{\partial_\rho}(x, y) = -2g_\rho(Sx, y)$ , entonces:

$$S = \begin{pmatrix} -FF' & 0 \\ 0 & -GG'h \end{pmatrix}$$

con  $h = d\sigma^2$ . Entonces, por la ecuación de Gauss:

$$K(\partial_t \wedge x) = \frac{F' G'}{F G}$$

cuando  $x$  es tangente a  $S^2$  y

$$K(x \wedge y) = -\frac{1}{G^2} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$

cuando tanto  $x$  y  $y$  son tangentes a  $S^2$ . Se sigue los eigenvalores del tensor de Ricci son:

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{F''}{f} + 2\frac{F' G'}{f G} \\ r_\rho &= \frac{F''}{f} + 2\frac{G''}{G} \\ r_x &= \frac{G''}{G} + \frac{F' G'}{F G} - \frac{1}{G^2} + \left(\frac{G'}{G}\right) \end{aligned}$$

Ahora aplicamos las condiciones para que esto pase en nuestros eigenvalores:

$$0 = r_t = \frac{1}{FG^2}(F'G^2)' = \frac{1}{FG^2}m'$$

esto implica que  $m$  debe ser constante. Ahora,

$$0 = r_\rho - r_t = 2\frac{F}{G} \left(\frac{G'}{G}\right)$$

nos dice que  $(G'/F)$  también es constante. Si reescalamos  $t$  podemos asumir que  $G'/F = 1$ . Entonces se sigue que:

$$G' = F$$

y que:

$$G'' = F' = mG^2.$$

Vemos que:

$$r_x = \frac{1}{G} \left(\frac{2m}{G} - 1 + F^2\right)$$

Por lo que, la condición de que  $r_x = 0$  solo se cumple sí:

$$F = \left(1 - \frac{2m}{G}\right)^{1/2}$$

lo que hace que la métrica

$$g = F^2(\rho)dt^2 - d\rho^2 - G^2(\rho)d\sigma^2$$

en  $\mathbb{R} \times I \times S^2$  satisface las ecuaciones de Einstein en el vacío siempre que:

$$F = \frac{dG}{d\rho} = \left(1 - \frac{2m}{G}\right)$$

para alguna constante  $m$ . Finalmente si consideramos a  $\tilde{\rho} = G(\rho)$  llegamos a que  $g$  tiene la forma:

$$g = \left(1 - \frac{2m}{\tilde{\rho}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{\tilde{\rho}}\right)^{-1} d\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}^2 d\sigma^2$$

conocida como la métrica de Schwarzschild.

# Capítulo 4

## Estructuras Complejas y Casi-Complejas

En este capítulo trabajamos con estructuras casi complejas y complejas, tratando primero de explicar los conceptos necesarios para definir el espacio de twistor de una variedad riemanniana. Este espacio fue introducido por Roger Penrose en el contexto de geometría Lorentziana, aquí lo estudiamos desde el punto de vista Riemanniano. Los teoremas que se exponen aquí relacionan la integrabilidad del twistor con la curvatura de la variedad.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección [4.1. Preliminares Algebraicos](#) se desarrolla el álgebra lineal de espacios de vectoriales complejos y su relación con espacios vectoriales reales, abstrayendo la noción de multiplicación compleja como transformación lineal. En la Sección [4.2. Variedades Casi complejas y Complejas](#) se definen variedades casi complejas y complejas, dando unos ejemplos bastante ilustrativos de variedades de este tipo. Finalmente la Sección [4.3. El Espacio de Twistor](#) desarrolla brevemente la teoría de twistor de una variedad riemanniana y cuaterniónica.

Para esta capítulo los preliminares fueron basados de [\[9\]](#) y el resto estuvo principalmente basado en [\[4\]](#).

### 4.1. Preliminares Algebraicos

Una estructura compleja en un espacio vectorial real  $V$  es un endomorfismo  $J$  de  $V$  tal que  $J^2 = -1$  donde  $1$  es la transformación identidad de  $V$ . En general, si tenemos un espacio vectorial  $V$  con una estructura compleja puede ser transformado en un campo vectorial complejo tras definir la multiplicación por un número complejo como:

$$(a + ib)X = aX + bJX \quad \text{para } X \in V \text{ y } a, b \in \mathbb{R} .$$

Es importante notar que la dimensión real  $m$  de  $V$  debe ser par para que la dimensión compleja de  $V$  sea  $m/2$ . De manera contraria, podemos tener un espacio vectorial complejo con dimensión  $n$ , siendo  $J$  un endomorfismo de  $V$  definido por:

$$JX = iX \quad \text{para } X \in V .$$

Si  $V$  es considerado como un espacio vectorial real de dimensión  $2n$  entonces  $J$  es una estructura compleja de  $V$ .

**Proposición 4.1.** Sea  $J$  una estructura compleja en un espacio vectorial real  $V$  de dimensión  $2n$ . Considere  $X_1, \dots, X_n$  como una base para  $V$  como un espacio vectorial complejo. Es fácil ver que  $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$  es una bases para  $V$  como un espacio vectorial real.

Sea  $\mathbb{C}^n$  un espacio vectorial complejo con  $n$ -tuplas de números complejos  $Z = (z^1, \dots, z^n)$ . Si definimos:

$$z^k = x^k + iy^k, \quad x^k, y^k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n.$$

entonces  $\mathbb{C}^n$  puede ser identificado como el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^{2n}$  de  $2n$ -tuplas de números reales  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ . Es decir, hacemos la correspondencia:

$$(z^1, \dots, z^n) \rightarrow (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

La estructura compleja de  $\mathbb{R}^{2n}$  inducida de  $\mathbb{C}^n$  es:

$$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \rightarrow (-y^1, \dots, -y^n, x^1, \dots, x^n)$$

y es llamada la estructura compleja canónica de  $\mathbb{R}^{2n}$ . En términos de la base natural de  $\mathbb{R}^{2n}$ , es dada por la matriz:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

**Proposición 4.2.** Hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de estructuras complejas en  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\mathcal{J}$ , y el espacio homogéneo  $GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$ . Es decir:

$$\mathcal{J} \cong \frac{GL(2n, \mathbb{R})}{GL(n, \mathbb{C})}$$

*Demostración.* Sí consideramos la acción de  $GL(2n, \mathbb{R})$  dada por:

$$\begin{aligned} GL(2n, \mathbb{R}) \times \mathcal{J} &\rightarrow \mathcal{J} \\ (S, J) &\rightarrow SJS^{-1} \end{aligned}$$

Primero es importante notar que:

$$(SJS^{-1})^2 = (SJS^{-1})(SJS^{-1}) = SJ^2S^{-1} = -1SS^{-1} = -1.$$

por lo que la acción está bien definida. Para ver que esta acción es transitiva sabemos que para cualesquiera dos estructuras complejas  $J$  y  $J'$  distintas existen las bases  $\{e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n\}$  y  $\{e'_1, \dots, e'_n, J'e'_1, \dots, J'e'_n\}$  para  $\mathbb{R}^{2n}$ . Si definimos un elemento  $S$  de  $GL(2n, \mathbb{R})$  como:

$$Se_k = e'_k, \quad SJe_k = J'e'_k, \quad \text{para: } k = 1, \dots, n.$$

Se puede ver que:

$$e_k = S^{-1}e'_k, \quad J'e'_k = SJe_k \implies J' = SJS^{-1}e'_k \iff J' = SJS^{-1}.$$

■



**Definición 4.3.** Una producto interno *hermitiano* en un campo vectorial real con una estructura compleja  $J$  es un producto interno  $h$  tal que:

$$h(JX, JY) = h(X, Y) \quad \text{para: } X, Y \in V .$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} h(JX, X) &= h(J^2X, JX) \\ h(JX, X) &= h(-X, JX) \\ h(JX, X) &= -h(X, JX) \\ h(JX, X) &= -h(JX, X) \\ 2h(JX, X) &= 0. \end{aligned}$$

Lo que directamente implica que:  $h(JX, X) = 0$  para cada  $X \in V$ .

**Teorema 4.4.** Sea  $h$  un producto interno definido en un  $2n$  dimensional espacio vectorial real  $V$  con estructura compleja  $J$ . Existen elementos  $X_1, \dots, X_n$  de  $V$  tal que  $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$  es una base ortonormal de  $V$  con respecto al producto interno  $h$ .

**Teorema 4.5.** Hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de productos internos hermitianos en  $\mathbb{R}^{2n}$  con respecto a la estructura canónica  $J_0$  y el espacio homogéneo  $GL(n, \mathbb{C})/U(n)$ . Es decir, para  $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$  y alguna  $S \in GL(n, \mathbb{C})$  se cumple:

$$h(X, Y) = h_0(SX, XY).$$

donde  $h_0$  representa el producto interno hermitiano usual de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

## 4.2. Variedades Casi complejas y Complejas

Una estructura casi compleja en una variedad real diferenciable es una campo tensorial  $J$  que a cada punto  $x$  de  $M$  define un endomorfismo en el espacio tangente  $T_x(M)$  tal que  $J^2 = -1$  donde  $1$  denota la transformación identidad de  $T_x(M)$ . Una variedad con una estructura casi compleja fija es llamada una variedad casi compleja.

**Proposición 4.6.** Toda variedad casi compleja es de dimensión par y es orientable.

*Demostración.* En este caso solo voy a demostrar la paridad de la dimensión de una variedad casi compleja. Sea  $M$  una variedad  $n$  dimensional con estructura compleja  $J$ . Sabemos que  $J^2 = -1$

$$\det(J^2) = \det(-1) = (-1)^n = (\det(J))^2 > 0 \implies n = 2m, m \in \mathbb{N}$$

■

**Proposición 4.7.** Una función  $f$  de un abierto de  $\mathbb{C}^n$  a  $\mathbb{C}^m$  preserva la estructura casi compleja de  $\mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{C}^m$ , i.e.,  $f_* \circ J = J \circ f_*$ , si y solo si  $f$  es holomorfa.

**Definición 4.8.** El tensor de Nijenhuis es un campo tensorial de tipo (1,2) que en una variedad  $M$  con estructura casi compleja  $J$  que se define como:

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]$$

**Teorema 4.9.** Una estructura casi compleja es una estructura compleja si y solo si el tensor de Nijenhuis se anula.

### 4.2.1. Ejemplos

**Ejemplo 4.10.**  $S^2$  admite una estructura casi compleja. Si pensamos a  $\mathbb{R}^3$  como todas los vectores  $p \in \mathbb{H}$  puramente imaginarios, es decir, cuaternios de la forma:

$$p = ai + bj + ck$$

y además pedimos que  $p$  sea unitario para poder representar a  $S^2$ , es decir, estamos haciendo que  $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ . Definimos, para cualesquiera dos vectores  $v, p$  de  $S^2$  pensándolos como imaginarios puros de  $\mathbb{H}$ , a  $J_p(v)$  como:

$$J_p(v) = pv$$

Teniendo en cuenta que las las unidades imaginarias de los cuaternios cumplen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j$$

Para todo  $p$  se cumple que:

$$\begin{aligned} p^2 &= (ai + bj + ck)^2 \\ &= (ai)^2 + (bj)^2 + (ck)^2 + ijab + jiab + ikac + kiac + jkbc + kjbc \\ &= (ai)^2 + (bj)^2 + (ck)^2 + ijab + jiab + ikac + kiac + jkbc + kjbc \\ &= -(a^2 + b^2 + c^2) + ij(ab - ab) + ik(ac - ac) + jk(bc - bc) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Lo que implica:

$$J_p^2(v) = p(pv) = p^2v = -v$$

Haciendo que la  $J_p$  que definimos sea una estructura compleja en  $S^2$ .

**Ejemplo 4.11.** De manera análoga al ejemplo anterior, en  $S^6$  se puede definir una estructura casi compleja tras considerar a  $S^6 \subset \mathbb{R}^7 \subset \mathbb{O}$ . Aunque es importante decir que se necesita un tratamiento distinto dado que los octonios no son asociativos.

**Ejemplo 4.12.** En 2 dimensiones, toda estructura casi compleja  $J$  es integrable. Esto se puede ver desde que si  $M$  es una 2-variedad con estructura casi compleja  $J$ , una base para

esta variedad es  $\{e_1, Je_1\}$ . Ahora calculamos el tensor de Nijenhuis:

$$\begin{aligned}
 N_J(e_1, Je_1) &= [e_1, Je_1] + J[Je_1, Je_1] + J[e_1, J^2e_1] - [Je_1, J^2e_1] \\
 &= [e_1, Je_1] + J[Je_1, Je_1] + J[e_1, J^2e_1] - [Je_1, J^2e_1] \\
 &= [e_1, Je_1] + J[e_1, -e_1] - [Je_1, -e_1] \\
 &= [e_1, Je_1] - J[e_1, e_1] + [Je_1, e_1] \\
 &= [e_1, Je_1] - [e_1, Je_1] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por el teorema de Newlander-Nirenberg  $J$  es una estructura casi compleja integrable.

### 4.3. El Espacio de Twistor

En general la teoría de twistor asocia un espacio complejo a un espacio real. En el sentido de variedades asocia una variedad compleja (hermitiana) a una variedad diferenciable (riemanniana). La idea es traducir problemas de variable real utilizando los métodos de variable compleja.

En el contexto de el espacio de twistor, Roger Penrose comenzó con estas ideas donde su idea original era asociar al espacio de rayos tipo luz que es  $\mathbb{CP}^3$ , visto como un  $S^2$  haz sobre el espacio de Minkowski. Compactificando se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 S^2 & \hookrightarrow & \mathbb{CP}^3 \\
 & & \downarrow \\
 & & S^4
 \end{array}$$

Al mismo tiempo, Calabi trabajó en el contexto Riemanniano utilizando el espacio de estructuras hermitianas en una variedad de dimensión par. Este espacio se conoce ahora como el espacio de twistor (riemanniano).

Del mismo modo, se tiene para dimensión 4 un  $S^2$  haz fibrado (de estructuras complejas). En este capítulo, presentamos este último enfoque, mostrando las ideas de matemáticos como Atiyah, Lebrun y Salamon.

#### 4.3.1. Construcción del Twistor

Dada  $M$  una variedad riemanniana de dimensión par  $2n$  con métrica  $g$ . Recordando que  $g$  es la elección suave de un producto interno en el espacio tangente de  $M$ . Se tiene que:

$$(T_p M, g_p) \cong (\mathbb{R}^{2n}, \langle, \rangle)$$

Aún más, si  $M$  tiene una orientación y se considera:

$$\begin{aligned}
 Z_p = \{ & J \in \text{End}(T_p M) \mid J^2 = -1, \ g(Jv, Jw) = g(v, w), \\
 & J \text{ compatible con la orientación de } M \}
 \end{aligned}$$

Recordando que  $SO(2n)$  es el grupo que preserva el producto interno y la orientación, se puede ver que:

$$Z_p \cong \frac{SO(2n)}{U(n)}$$

donde la identificación se hace considerando la acción de  $SO(2n)$  en  $Z_p$  por conjugación. Esta acción es transitiva en  $Z_p$  y cada punto tiene un grupo de isotropía isomorfo a  $U(n)$  análogamente a la [Proposición 4.2](#).

El espacio de Twistor  $\mathcal{Z}$  de  $M^n$  se define como:

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{p \in M} \{Z_p\}$$

Si  $n = 2$ ,  $M^{2n} = M^4$ , de manera análoga a la prueba de la se puede ver que:

$$Z_p \cong \frac{SO(4)}{U(2)} \cong S^2$$

Más aún, podemos definir una estructura casi compleja en  $\mathcal{Z}$  con:

- 1)  $T_p \mathcal{Z} = T_p H \oplus T_p V$ .
- 2)  $T_p H \cong T_p M$ .
- 3)  $T_p V \cong T_p S^2$ .
- 4)  $S^2$  es una variedad compleja.
- 5)  $J_p(X + U) = p(X) + J_{S^2}(U)$ .

En general, la integrabilidad de la estructura compleja definida en el twistor se relaciona con la curvatura de la variedad base. Dados dos campos vectoriales  $X$  e  $Y$  del espacio de twistor, podemos descomponerlos en su parte vertical y horizontal, es decir podemos escribir  $X = X_h + X_v$  e  $Y = Y_h + Y_v$  con  $X_h, Y_h$  en la distribución horizontal y  $X_v, Y_v$  en la distribución vertical.

Así, para ver la integrabilidad de una variedad tenemos se pueden considerar

- 1)  $N(X_h, Y_h)$ .
- 2)  $N(X_h, Y_v)$ .
- 3)  $N(X_v, Y_v)$ .

La parte que se relaciona con la curvatura de la variedad es la componente horizontal de  $N(X_h, Y_h)$ . Más aún, dado un  $S$  en el espacio de twistor entonces  $N_S(X_h, Y_h) = 0$  para todos campos vectoriales  $X, Y$  implica que

$$[R_{SZ, SW}, S] - S[R_{SZ, W}, S] - S[R_{Z, SW}, S] - [R_{Z, W}, S] = 0.$$

Para cualesquiera  $Z, W$  vectores tangentes en la variedad base. De hecho en [7], Gray demuestra que esta identidad se cumple siempre que  $S$  sea integrable, como estructura compleja de  $M$ . Más aún se sabe que la parte derecha de la ecuación es la proyección de  $R$  al un subespacio de tensores de Weyl. Lo que quiere decir esto es que en realidad que el espacio de twistor sea una variedad compleja da condiciones en la parte conforme de la curvatura. La curvatura de una variedad se puede descomponer genéricamente como

$$R = W + Ric^0 + S,$$

donde  $W$  es el tensor de Weyl, que es la parte conforme de la curvatura,  $Ric^0$  es el tensor de Ricci sin traza y  $S$  es la curvatura escalar.

Debido a que el operador de  $*$  de Hodge en dimensión 4 actúa como un endomorfismo en 2-formas cuyo cuadrado es la identidad, la descomposición de la curvatura en este caso es

$$R = W^+ + W^- + Ric^0 + S,$$

donde  $W = W^+ + W^-$ . Una variedad se llama auto-dual si  $W^- = 0$  y anti auto-dual si  $W^+ = 0$ .

Esto da lugar a los siguientes teoremas clásicos dentro de la teoría de twistor.

**Teorema 4.13. (Atiyah).** Sea  $M^4$  una variedad riemanniana con espacio de twistor  $Z$ . Entonces  $Z$  es complejo si y solo si  $W^- = 0$ , es decir  $M$  es auto-dual.

**Teorema 4.14.** Sea  $M^{2n}$  una variedad riemanniana con dimensión mayor que 4 y espacio de twistor  $Z$ . Entonces  $Z$  es complejo si y solo si  $W = 0$ , es decir  $W$  es conformemente plana.

Del mismo modo que uno construye estructuras hermitianas, se pueden definir estructuras cuaterniónicas hermitianas.

**Definición 4.15.** Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana. Una estructura cuaterniónica hermitiana en  $(M, g)$  es un subhaz  $\mathcal{G}$ , de rango 3, del haz de endomorfismos  $EndTM$ , tal que localmente  $\mathcal{G}$  tiene una base adaptada  $I, J, K$  con  $I^2 = J^2 = -1$ ,  $K = IJ = -JI$ , y  $g(AX, AY) = g(X, Y)$ , para  $A = I, J, K$ . En este caso la métrica se llama cuaterniónica hermitiana.

El nombre cuaterniónica hermitiana viene del hecho que el espacio lineal generado por  $Id_{TM_x}, I, J$  y  $K$  forman un copia de  $\mathbb{H}$ . Por lo tanto, la existencia de una estructura cuaterniónica hermitiana en  $(M, g)$  implica que la dimensión debe de ser multiplo de 4. En terminos de  $G$ -estructuras, esto es equivalente a una reducción del  $SO(4n)$  haz de marcos ortonormales a  $Sp(n)Sp(1)$ .

Si el subhaz 3 dimensional generado por  $I, J, K$  es paralelo con respecto a la conexión de Levi-Civita, entonces se dice que  $M$  es una variedad **cuaterniónica Kähler** (o QK) en analogía con el caso complejo.

Para una variedad cuaterniónica Kähler el espacio de twistor se define de la siguiente manera. Uno puede dar una métrica en el haz generado por  $I, J, K$  de forma tal que formen una base ortonormal. Luego uno toma para cada  $x \in M$ ,

$$Z_x = \{aI + bJ + cK \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$$

y define el espacio de twistor como  $Z = \sqcup_{x \in M} Z_x$ , se puede ver que este es un conjunto de estructuras complejas ortogonales en el punto  $x$ , justo como el primer ejemplo de la Sección Sección 4.2. [Variedades Casi complejas y Complejas](#). Este es un  $S^2$  haz de estructuras complejas puntuales. Es bien sabido que  $Z$  es una variedad compleja y admite métricas Kähler-Einstein.

Lo fundamental para que el espacio de twistor sea Kahler es relacionar la derivada covariante de la estructura compleja con curvatura de la variedad, que para variedades QK es muy particular. Se puede demostrar que la condición necesaria es que

$$[R_{SX,SY}, S] = S[R_{SX,Y}, S]$$

que es un condición más fuerte que la de que la variedad sea integrable, lo cual tiene sentido.

La condición de Einstein para el espacio de twistor se deriva del hecho que la base y la fibra son Einstein, eligiendo una métrica adecuada. La demostración es complicada, dada la siguiente proposición.

**Proposición 4.16.** Sea  $\pi : M \rightarrow B$  una submersión riemanniana con fibras totalmente geodésicas. Entonces,  $(M, g)$  es Einstein si y solo si, para algunas constante  $\lambda$ ,  $\hat{r}$ ,  $\tilde{r}$  y  $A$  cumplen

$$\begin{aligned} \delta A &= 0, \\ \hat{r}(U, V) + (AU, AV) &= \lambda(U, V), \\ \tilde{r}(X, Y) - 2(AX, AY) &= \lambda(X, Y). \end{aligned}$$

Donde  $\hat{r}$ ,  $\tilde{r}$  son las curvaturas de Ricci de la fibra, y la base respectivamente y  $A$  es el tensor  $A$  de O’neill. Si la distribución horizontal cumple la primera condición se llama una conexión Yang-Mills y en general es difícil probar la existencia de una conexión Yang-Mills.

Estás ideas se pueden extender a las llamadas variedades con estructuras de Clifford par (paralelas), que son generalizaciones de variedades cuaternionicas Hermitianas (QK), una vez que se tiene una buena noción de espacio de twistor. Referimos al lector a [1, 2], donde se demuestra que el espacio de twistor es Kahler y Einstein respectivamente.

# Conclusiones

En esta tesis desarrollamos los fundamentos matemáticos indispensables para entender los aspectos de la relatividad especial. Estos fundamentos se basan en el estudio de la geometría diferencial y (pseudo)riemanniana. En particular el comprender las ecuaciones de Einstein involucra el entendimiento de tensores de curvatura. Recordando que estos tensores se definen a partir de una métrica riemanniana y una conexión riemanniana (la llamada conexión de Levi-Civita). Para poder tener un contexto global de la geometría utilizada en relatividad especial y general, se estudian conceptos como isometrías, espacio de Minkowski, geodésicas, entre otros. Un aspecto interesante de relatividad es el teorema de Noether, que entendido en este contexto nos dice que para cada isometría o elemento del grupo de Poincaré corresponde una cantidad conservada. En términos físicos existen algunos ejemplos relevantes: una traslación espacial corresponde a la conservación de momento lineal, una rotación espacial preserva el momento angular y una traslación temporal corresponde a la conservación de energía.

Motivados por las construcciones de Penrose, en el último capítulo se estudia la construcción del espacio de twistor, para esta parte se dan algunas nociones de geometría compleja y casi compleja. Se pretende que este capítulo sea un primer acercamiento a esta teoría, que involucra conceptos avanzados de diferentes áreas de la geometría, entre ellos geometría algebraica, geometrías spin, teoría de representación y topología diferencial, esto va más allá de los alcances de la tesis. El enfoque que se tomó en esta tesis fue el riemanniano, en donde los resultados relacionan integrabilidad del twistor con la parte conforme del tensor de curvatura.

El objetivo principal de esta tesis fue introducirnos a las nociones y herramientas indispensables para poder comprender relatividad desde el punto de vista de las matemáticas a un nivel correspondiente al primer año de posgrado. Con esta tesis conseguimos aprender estos fundamentos, enfocados principalmente en relatividad y de manera introductoria en la teoría de twistores.





# Referencias

- [1] Gerardo Arizmendi y Charles Hadfield. «Twistor spaces of Riemannian manifolds with even Clifford structures». En: *Annals of Global Analysis and Geometry* 51.1 (2017), págs. 11-20.
- [2] Gerardo Arizmendi, Rafael Herrera y Paolo Piccinni. «An even Clifford diamond.» En: *Annals of Global Analysis & Geometry* 57.3 (2020).
- [3] John C. Baez y Emory F. Bunn. «The meaning of Einstein's equation». En: *American Journal of Physics* 73.7 (jul. de 2005), págs. 644-652. DOI: [10.1119/1.1852541](https://doi.org/10.1119/1.1852541).
- [4] A.L. Besse. *Einstein Manifolds*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540741206.
- [5] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 2.<sup>a</sup> ed. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2016. ISBN: 9780486806990.
- [6] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity: Pearson New International Edition*. Pearson Education, 2014. ISBN: 9781292039015.
- [7] Alfred Gray. «Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds». En: *Tohoku Mathematical Journal* 28.4 (1976), págs. 601-612. DOI: [10.2748/tmj/1178240746](https://doi.org/10.2748/tmj/1178240746).
- [8] I.N. Herstein. *Topics in Algebra*. 2.<sup>a</sup> ed. Wiley India Pvt. Limited, 2006. ISBN: 9788126510184.
- [9] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Wiley Classics Library v. 2. Wiley, 2009. ISBN: 9780470555583.
- [10] S. Lang. *Linear Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2010. ISBN: 9781441930811.
- [11] J.M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006. ISBN: 9780387227269.
- [12] J. Liesen y V. Mehrmann. *Linear Algebra*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 9783319243443.
- [13] J.E. Marsden y A. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, 2011. ISBN: 9781429215084.
- [14] A. McInerney. *First Steps in Differential Geometry: Riemannian, Contact, Symplectic*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781461477327.
- [15] D. Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 9780521876223.

- [16] James R Munkres. *Topology; a First Course*. 2.<sup>a</sup> ed. Prentice-Hall, 1974.
- [17] Roger Penrose. «The Geometry of the Universe». En: *Mathematics Today Twelve Informal Essays*. Ed. por Lynn Arthur Steen. New York, NY: Springer New York, 1978, págs. 83-125. ISBN: 978-1-4613-9435-8. DOI: [10.1007/978-1-4613-9435-8\\_5](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9435-8_5). URL: [https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9435-8\\_5](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9435-8_5).
- [18] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3.<sup>a</sup> ed. v. 1. Publish or Perish, 1979. ISBN: 9780914098836.
- [19] D. Tong. *General Relativity*. 2019.
- [20] S.H. Weintraub. *Differential Forms: Integration on Manifolds and Stokes's Theorem*. Elsevier Science, 1997. ISBN: 9780127425108.