

CAPÍTULO 5

MARCO TEÓRICO

En la presente sección se explicará los términos fundamentales y conocimientos necesarios para poder llevar a cabo un análisis claro de los fenómenos que sean generados en la parte experimental. Con la finalidad de clarificar el significado de las variables y terminología usada en la descripción de los fenómenos de interés en materiales no lineales discretos. Además se presentarán los fundamentos matemáticos básicos para posteriormente llevar a cabo la interpretación física del trabajo.

5.1 Propiedades Lineales y No Lineales de Materiales Dieléctricos.

Se define como material dieléctrico a aquel que no posee cargas libres, esto significa que no conduce corriente eléctrica. Sin embargo, permite el paso de ondas electromagnéticas en su interior. Las moléculas en esta clase de materiales están firmemente unidas a sus cargas, aunque resulta posible separarlas ligeramente de su posición de equilibrio [1].

Bajo los efectos de un campo eléctrico externo \overline{E} , dentro de las moléculas de un material dieléctrico se desplaza el centro de cargas positivas con respecto al centro de cargas negativas, por lo tanto existe una asimetría en la distribución de carga. El resultado neto da origen a un momento bipolar en cada una de las moléculas, es decir, el campo

externo provoca una polarización eléctrica en el material y a su vez esta polarización afecta al campo eléctrico externo según la cantidad de la misma.

Esta polarización por unidad de volumen \bar{P} esta directamente relacionada con el campo eléctrico externo. En general, la constante de proporcionalidad entre \bar{E} y \bar{P} es χ_e que se define como la susceptibilidad eléctrica del medio. En algunos casos dependiendo de la geometría puede ser un tensor, además de que está relacionada con el índice de refracción de la siguiente forma

$$\chi_e = n^2 - 1 \quad (5.1.1)$$

La interacción entre la polarización y el campo puede ser de forma lineal o de manera no lineal. En forma general, se denota a \bar{P} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{P}_\alpha(\bar{r}, t) = & \varepsilon_0 \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{E}_\beta(\bar{r}, t) + \varepsilon_0 \sum_{\beta\gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} \bar{E}_\beta(\bar{r}, t) \bar{E}_\gamma(\bar{r}, t) \\ & + \varepsilon_0 \sum_{\beta\gamma\delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} \bar{E}_\beta(\bar{r}, t) \bar{E}_\gamma(\bar{r}, t) \bar{E}_\delta(\bar{r}, t) + \dots, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

la cual se puede separar en dos términos

$$\bar{P}_\alpha^{(L)}(\bar{r}, t) = \varepsilon_0 \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{E}_\beta(\bar{r}, t), \quad (5.1.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_\alpha^{(NL)}(\bar{r}, t) = & \varepsilon_0 \sum_{\beta\gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} \bar{E}_\beta(\bar{r}, t) \bar{E}_\gamma(\bar{r}, t) \\ & + \varepsilon_0 \sum_{\beta\gamma\delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} \bar{E}_\beta(\bar{r}, t) \bar{E}_\gamma(\bar{r}, t) \bar{E}_\delta(\bar{r}, t) + \dots, \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

donde $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}$, $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}$, \dots , $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta\dots}^{(n)}$ se refieren a la susceptibilidad de segundo, tercer, hasta el n -ésimo orden. El primer término $\chi_{\alpha\beta}^{(1)}$ es el tensor de susceptibilidad de la teoría de dieléctricos ordinarios [6]. Aquí α , β y γ pueden tomar los valores x , y , z .

5.2 Guía de Onda con No Linealidad Tipo Kerr

Se entiende por *guía de onda* como un dieléctrico en forma de tubo o pipeta circular, elíptica o rectangular por la cual las ondas electromagnéticas viajan confinadas a sus dimensiones y geometría [2]. Al igual que los dieléctricos, las guías de onda tienen una respuesta a un campo eléctrico. La finalidad principal de una guía de onda es ser usada en la transportación de luz.

Dado que la luz es un campo electromagnético, una guía de onda no lineal tendrá una respuesta de igual manera por el campo eléctrico de la onda que viaja en su interior. En un material dieléctrico con no linealidad tipo Kerr la polarización no lineal es proporcional al cubo del campo, entonces, para este caso $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} = 0$ en la Ec. (5.1.4). Así la susceptibilidad para cada guía de este tipo es de tercer orden. Suponiendo que la polarización no lineal depende solo de la dirección de propagación, es decir, que solo nos fijaremos en la parte espacial del campo eléctrico, la Ec. (5.1.4) se reduce a

$$\bar{P}_\alpha^{(NL)}(\bar{r}) = \varepsilon_0 \sum_{\beta\gamma\delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} \bar{E}_\beta(\bar{r}) \bar{E}_\gamma(\bar{r}) \bar{E}_\delta(\bar{r}). \quad (5.2.1)$$

En un material isotrópico, como es el presente caso, la susceptibilidad no es de forma tensorial, entonces la Ec. (5.2.1) queda de la siguiente forma

$$\bar{P}^{(NL)}(\bar{r}) = \varepsilon_0 \chi_e^{(3)} \bar{E}(\bar{r}) \bar{E}(\bar{r}) \bar{E}(\bar{r}), \quad (5.2.2)$$

siendo ε_0 la permitividad del vacío. En general para la no linealidad tipo Kerr el producto $\bar{E}(\bar{r}) \bar{E}(\bar{r}) \bar{E}(\bar{r}) = 3 \bar{E}(\bar{r}) |\bar{E}(\bar{r})|^2$. El modulo al cuadrado del campo esta relacionado con la intensidad de la forma que sigue

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_0 c |\bar{E}(\bar{r})|^2, \quad (5.2.3)$$

donde n_0 es el índice de refracción lineal y c la velocidad de la luz en el vacío.

Dado que el índice de refracción está relacionado con la susceptibilidad como lo muestra la Ec. (5.1.1) y a su vez con la polarización generada, en materiales como una guía de onda existe una no linealidad de tercer orden. De esta forma, el índice de refracción, constante en los medios lineales, es una función que depende de la intensidad de la radiación incidente y de la posición

$$n = n(r, I). \quad (5.2.4)$$

En resumen, la polarización eléctrica total inducida en el material queda descrita por la siguiente igualdad

$$\bar{P}(\bar{r}) = \varepsilon_0 \chi_e^{(1)} \bar{E}(\bar{r}) + 3\varepsilon_0 \chi_e^{(3)} \bar{E}(\bar{r}) |\bar{E}(\bar{r})|^2. \quad (5.2.5)$$

5.3 Arreglo de Guías de Onda Acoplados (AGOA)

Uno de los dispositivos más comunes en la óptica es una rejilla de difracción. Entenderemos por rejilla de difracción a una lámina muy delgada formada por un número grande de rendijas cuyo ancho es más o menos del orden de la longitud de la onda que se está usando para radiarla. Estos dispositivos también se conocen como redes de difracción.

Ahora bien, tomando una rejilla que es iluminada por un frente de onda plano y colocando una pantalla a una distancia grande en comparación con el ancho de cada rejilla, se observará un patrón de difracción. Se define como difracción a la distorsión de una onda debido a un obstáculo que es comparable con la longitud de onda de ésta, el obstáculo

puede ser una rendija o un objeto [2]. Dependiendo del punto de observación y del tipo de la fuente se puede presentar difracción de Fraunhofer o de Fresnel.

Los grandes avances en la tecnología han permitido la fabricación de redes de difracción de un espesor más grande alrededor de milímetros. Tomando como base una rejilla de difracción se hace que la profundidad de la misma sea mayor. Lo que obtendremos finalmente será un sistema que se comporta de forma parecida y cuyas ecuaciones poseen mayor complejidad.

Un sistema similar a una red de difracción de mayor espesor es un arreglo de guías de onda, motivo de interés en el presente trabajo, que no puede ser tratado de un modo clásico debido a que el parámetro del espesor afecta directamente en los patrones de difracción. La geometría no es la única variante que afecta en el comportamiento del campo eléctrico dentro del arreglo, sino también la no linealidad.

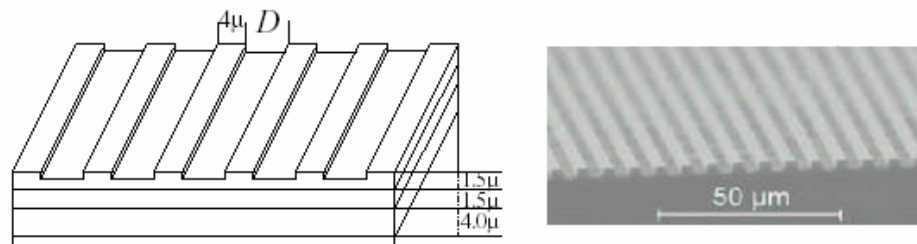


Fig. 5.3. 1. Arreglos de Guías de Onda Acopladas.

Entenderemos por un *Arreglo de Guías de Onda Acopladas evanescentemente* (AGOAE), como una estructura formada por guías de onda idénticamente espaciadas [7] y cuyo espaciamiento es de un par de micras, Fig. 5.3.1. El término acopladas se relaciona

con el tunelamiento que el campo experimenta en la propagación y que esta en función de qué tan rápido el campo óptico decae fuera de la guía.

Para las simulaciones subsecuentes en la presente tesis se tomará la geometría y configuración usada en estudios y simulaciones anteriores. La separación entre las guías es de $7 \mu\text{m}$ y el grosor de cada una de ellas es de $4 \mu\text{m}$. Es de importancia mencionar que los valores elegidos anteriormente no son los únicos valores posibles, solamente son los valores típicos usados en un gran número de investigaciones recientes.

5.4 Propagación del Campo Eléctrico en un AGOA

Consideramos un AGOA en la que cada guía posee una no linealidad de tipo Kerr, como ya se mencionó anteriormente. Un AGOA es un claro ejemplo de estructuras en las cuales la *óptica discreta* puede ser observada e investigada. Lo que se observa en la propagación de la luz dentro de un AGOA es un comportamiento discreto llamado *difracción discreta* cuyos orígenes ya se mencionaron en el capítulo anterior.

Con la no linealidad presente la radiación perturba al sistema como lo muestra la Ec. (5.2.2), alterando directamente al índice de refracción a lo largo de cada una de las guías. De la Ec. (5.2.4) podemos señalar que entre mayor es la intensidad mayor es la perturbación provocada sobre el índice de refracción, es decir, la no linealidad aumenta.

5.4.1 Modelo matemático

Supongamos un material por el cual se propaga una onda electromagnética, por ejemplo un dieléctrico (p. ej. AlGaAs), el cual posee una no linealidad tipo Kerr. Las ecuaciones de Maxwell en un material de este tipo, dieléctrico isotrópico sin absorción, son las siguientes

$$\nabla \cdot \bar{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \bar{P}, \quad (5.4.1.1)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \quad (5.4.1.2)$$

$$\mu(\nabla \cdot \bar{H}) = 0, \quad (5.4.1.3)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}, \quad (5.4.1.4)$$

donde μ es la permeabilidad y ϵ_0 es la permitividad ambas en el vacío. Conjugando las relaciones anteriores se obtiene una ecuación diferencial, válida tanto para el caso lineal como para el caso no lineal, para la propagación del campo eléctrico dentro del medio.

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \quad (5.4.1.5)$$

La ecuación diferencial asociada para la Ec. (5.4.1.5) que describe la propagación espacial, ecuación de Helmholtz, se lee como sigue

$$\left[\nabla^2 + k_0^2 n(r, I)^2 \right] \bar{E} = 0. \quad (5.4.1.6)$$

Si el campo es provocado por una onda plana que se propaga dentro del material y cuyo perfil es

$$\bar{E} = E(x, z)e^{ikz}, \quad (5.4.1.7)$$

entonces la Ec. (5.4.1.6) es igual a

$$i2k \frac{\partial}{\partial z} E(x, z) + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E(x, z) + [k_0^2 n(x, z, I)^2 - k^2] E(x, z) = 0, \quad (5.4.1.8)$$

donde el vector de onda $k = k_0 n_0$, definido en términos del índice de refracción lineal y el vector de onda inicial. El índice de refracción no lineal es dependiente de la intensidad de la onda incidente y además de estar relacionado con el índice de refracción lineal. Tomando la relación de polarización Ec. (5.2.5) como base y considerando por simplicidad $E(x, z) = E$, se puede determinar el valor de la susceptibilidad eléctrica del material

$$\chi = \chi_e + 3\chi_e^{(3)} |E|^2. \quad (5.4.1.9)$$

Por lo tanto, el índice de refracción no lineal esta definido como

$$n(x, z, I) = \sqrt{1 + \chi}, \quad (5.4.1.10)$$

haciendo una serie de sustituciones y recordando que $n_0^2 = 1 + \chi_e$ entonces

$$n(x, z, I) \cong n_0 + \alpha |E|^2, \quad (5.4.1.11)$$

con $\alpha = 3\chi_e^{(3)} / 2n_0$. Sustituyendo la Ec. (5.4.1.11) en la Ec. (5.4.1.8), además de considerar el hecho de que la resta de los cuadrados de los índices de refracción es $n(x, z, I)^2 - n_0^2 = [n(x, z, I) - n_0][n(x, z, I) + n_0]$ y que $[n(x, z, I) + n_0] \cong 2n_0$, se llega a

$$i2k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} E + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E + 2\alpha n_0 k_0^2 |E|^2 E = 0. \quad (5.4.1.12)$$

En la ecuación anterior se hace presente la segunda derivada de campo eléctrico con respecto a z , pero considerando la Aproximación de Variación Lenta de las Amplitudes (SVAA), es decir,

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} E(x, z) \right| \ll |kE(x, z)|, \quad (5.4.1.13)$$

la $\partial^2 E(x, z)/\partial z^2$ puede ser despreciada. Finalmente la Ec. (5.4.1.12) se simplifica para obtener la Ecuación No Lineal de Schrödinger (ENLS)

$$i2k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} E + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E + 2\alpha n_0 k_0^2 |E|^2 E = 0. \quad (5.4.1.14)$$

Ahora, haciendo una aproximación de la segunda derivada de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, z) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [E(x + \Delta x, z) - 2E(x, z) + E(x - \Delta x, z)], \quad (5.4.1.15)$$

la ENLS se puede escribir como

$$i2k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} E(x, z) + 2\alpha n_0 k_0^2 |E(x, z)|^2 E(x, z) + \frac{1}{(\Delta x)^2} [E(x + \Delta x, z) - 2E(x, z) + E(x - \Delta x, z)] = 0. \quad (5.4.1.16)$$

Ahora bien, retomando el hecho de que un AGOA es un sistema no continuo, en otras palabras, la variable x es discreta en cierta forma porque el material esta formado por una serie de canales equidistantes (en principio un número infinito de ellos), la Ec. (5.4.1.14) también será discreta. Además, haciendo un cambio de variable para el campo, $E(x, z) = E_j(z)e^{-iz/k_0 n_0 (\Delta x)^2}$ entonces la Ec. (5.4.1.16) se simplifica en

$$i \frac{d}{dz} E_j(z) + \alpha k_0 |E_j(z)|^2 E_j(z) + \frac{1}{2k_0 n_0 (\Delta x)^2} [E_{j+1}(z) + E_{j-1}(z)] = 0. \quad (5.4.1.17)$$

El diferencial es completo ahora porque el campo solo depende de la variable z . La ecuación anterior que rige el sistema es denominada *Ecuación de Schrödinger no lineal discreta* (ENLSD), que generalmente se escribe en una forma más compacta

$$i \frac{d}{dz} E_j(z) + C[E_{j+1}(z) + E_{j-1}(z)] + \mu |E_j(z)|^2 E_j(z) = 0, \quad (5.4.1.18)$$

donde C se entiende como el coeficiente de acoplamiento y μ es el parámetro no lineal.

Finalmente en un AGOA se desglosa de la Ec. (5.4.1.18) tres posibles casos:

$$i \frac{dE_1}{dz} + CE_2 + \mu |E_1|^2 E_1 = 0, \quad (5.4.1.19)$$

$$i \frac{dE_j}{dz} + C[E_{j+1} + E_{j-1}] + \mu |E_j|^2 E_j = 0, \quad (5.4.1.20)$$

$$i \frac{dE_N}{dz} + CE_{N-1} + \mu |E_N|^2 E_N = 0, \quad (5.4.1.21)$$

La Ec. (5.4.1.19) describe el comportamiento del campo en el extremo inicial del arreglo. La Ec. (5.4.1.20), determina la conducta del campo para cualquier elemento dentro del arreglo, es decir, con $j = 2, 3, \dots, N-1$. Por último, la Ec. (5.4.1.21) se usa para describir el campo óptico en el extremo final del arreglo. De esta manera, se tiene un sistema de N ecuaciones diferenciales para describir el campo en la totalidad del arreglo.

5.4.2 Definición de parámetros

Para cada una de las ecuaciones se puede hacer una división en tres términos. El primer término se refiere a la propagación del campo en la dirección z . El segundo miembro define el acoplamiento del campo en el sitio j con sus vecinos $j-1$ y $j+1$, que esta en función del coeficiente de acoplamiento C . El último término, donde se hace presente el modulo al cuadrado de la función de onda, determina el tipo e intensidad de la no linealidad. Éste

factor μ , denominado parámetro no lineal, esta en función del material (coeficiente Kerr) y de la longitud de onda de la luz incidente.

El coeficiente de Kerr (\hat{n}_2) es un valor asociado al material que depende de su composición química. Para un AGOA de AlGaAs, $\hat{n}_2 = 1.5 \times 10^{-13} \text{ cm}^2 \text{ W}^{-1}$ [3]. El valor de la constante de acoplamiento depende de la separación entre las guías. Para éste trabajo, la separación entre guías es $7 \text{ }\mu\text{m}$ y la longitud de onda incidente es $\lambda = 1.53 \text{ }\mu\text{m}$ con polarización TM. El coeficiente de acoplamiento y parámetro no lineal típicamente usados en investigaciones recientes en el tema son $C = 0.52 \text{ mm}^{-1}$ y $\mu = 3.35 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \text{ W}^{-1}$ [9].

5.5 Conservación de la Energía y Hamiltoniano del Sistema

Es de vital importancia encontrar aquellas propiedades que son conservadas en el sistema. Primeramente es sabido que en la naturaleza los sistemas son no conservativos, pero para los cálculos es de mayor facilidad suponer que nuestro sistema lo es. Una señal en forma de un pulso luminoso que es conducido por un canal, compuesto por un dieléctrico, disminuye su intensidad en aproximadamente un tercio después de haber recorrido una distancia de 50 km. Así que se supone que el sistema esta aislado del entorno y no existe absorción por parte del material. Por otra parte, al igual que cualquier sistema físico, la definición del hamiltoniano es parte fundamental en el proceso. El hamiltoniano otorga la posibilidad de hallar soluciones analíticas para ciertos casos. A continuación se definirán este par de propiedades para un AGOA.

5.5.1 Conservación de la energía

Parte importante para el modelo es considerar que la potencia total incidente se conserva a lo largo de la propagación, es decir, que la suma de todas las potencias dentro del arreglo a una cierta distancia z debe ser exactamente igual al del haz incidente. Esto nos lleva a la suposición de que la muestra no es absorbente y no disipativo.

Para obtener la condición matemática de conservación de energía procederemos de la siguiente manera. Partiendo del hecho de que el AGOA esta formado por N elementos idénticos y equidistantes. Tomando la ecuación de onda de la primera guía y multiplicando por su función de onda conjugada se obtiene

$$iE_1^* \frac{dE_1}{dz} + CE_1^* E_2 + \mu |E_1|^4 = 0. \quad (5.5.1.1)$$

Restando a la Ec. (5.5.1.1) su complejo conjugado, se halla la relación siguiente

$$i \frac{d|E_1|^2}{dz} + C(E_1^* E_2 - E_1 E_2^*) = 0. \quad (5.5.1.2)$$

En el caso de la última guía, análogamente se puede obtener la siguiente ecuación

$$i \frac{d|E_N|^2}{dz} + C(E_{N-1} E_N^* - E_{N-1}^* E_N) = 0. \quad (5.5.1.3)$$

Ahora se debe obtener la ecuación equivalente a (5.5.1.3) para los elementos internos en el arreglo. La relación análoga a la Ec. (5.5.1.1) para la j -ésima guía de onda es

$$iE_j^* \frac{dE_j}{dz} + C(E_j^* E_{j+1} + E_{j-1} E_j^*) + \mu |E_j|^4 = 0, \quad (5.5.1.4)$$

para $j = 2, 3, \dots, N-1$. Restando su conjugado

$$i \frac{d|E_j|^2}{dz} + C(E_j^* E_{j+1} + E_{j-1} E_j^* - E_j E_{j+1}^* - E_{j-1}^* E_j) = 0. \quad (5.5.1.5)$$

Si se suman todas las ecuaciones obtenidas se tiene

$$\begin{aligned}
 & i \frac{d|E_1|^2}{dz} + C(E_1^* E_2 - E_1 E_2^*) + \dots + \\
 & i \frac{d|E_j|^2}{dz} + C(E_j^* E_{j+1} + E_{j-1} E_j^* - E_j E_{j+1}^* - E_{j-1}^* E_j) + \dots + \\
 & i \frac{d|E_N|^2}{dz} + C(E_{N-1} E_N^* - E_{N-1}^* E_N) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.5.1.6}$$

La Ec. (5.5.1.6) se simplifica en

$$\frac{d|E_1|^2}{dz} + \dots + \frac{d|E_j|^2}{dz} + \dots + \frac{d|E_N|^2}{dz} = 0, \tag{5.5.1.7}$$

con $j = 2, 3, \dots, N-1$. Finalmente la relación obtenida es

$$\sum_{i=1}^N |E_i|^2 = P_0, \tag{5.5.1.8}$$

la cual define la energía total y como no depende de z es válida para cualquier punto a lo largo de la propagación dentro del arreglo.

5.5.2 Hamiltoniano

En un AGOA el Hamiltoniano es la suma de la energía proporcionada por la onda incidente y el potencial periódico inducido por el material. Para éste cálculo se retomarán la Ec. (5.4.1.19), Ec. (5.4.1.20) y Ec. (5.4.1.21). El proceso matemático para la obtención del Hamiltoniano se explica de forma completa a continuación.

Primero, tomando solamente la Ec. (5.4.1.19) y su complejo conjugado se tiene el siguiente par de ecuaciones

$$\frac{dE_1}{dz} = iCE_2 + i\mu E_1 |E_1|^2, \quad (5.5.2.1)$$

$$\frac{dE_1^*}{dz} = -iCE_2^* - i\mu E_1^* |E_1|^2, \quad (5.5.2.2)$$

multiplicando (5.5.2.1) por dE_1^*/dz , (5.5.2.2) por dE_1/dz y restando ambos resultados se obtiene

$$iCE_2 \frac{dE_1^*}{dz} + iCE_2^* \frac{dE_1}{dz} + i\mu E_1 |E_1|^2 \frac{dE_1^*}{dz} + i\mu E_1^* |E_1|^2 \frac{dE_1}{dz} = 0, \quad (5.5.2.3)$$

sustituyendo $|E_1|^2 = E_1 E_1^*$ en la Ec. (5.5.2.3) se tiene

$$iCE_2 \frac{dE_1^*}{dz} + iCE_2^* \frac{dE_1}{dz} + i\mu E_1^2 E_1^* \frac{dE_1^*}{dz} + i\mu E_1 E_1^{*2} \frac{dE_1}{dz} = 0. \quad (5.5.2.4)$$

La Ec. (5.5.2.4) se puede reescribir de la siguiente forma

$$CE_2 \frac{dE_1^*}{dz} + CE_2^* \frac{dE_1}{dz} + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dz} (|E_1|^4) = 0. \quad (5.5.2.5)$$

Tomando el extremo final del arreglo, Ec. (5.4.1.21), se encuentra una ecuación análoga que es

$$CE_{N-1} \frac{dE_N^*}{dz} + E_{N-1}^* \frac{dE_N}{dz} + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dz} (|E_N|^4) = 0. \quad (5.5.2.6)$$

En el caso de los elementos intermedios es posible realizar el mismo procedimiento. Sin embargo, el acoplamiento de cada canal se lleva a cabo con sus dos guías adyacentes. Entonces, se hace uso de la ecuación para el j -ésimo elemento de la muestra

$$\frac{dE_j}{dz} = iC(E_{j-1} + E_{j+1}) + i\mu E_j |E_j|^2 = 0, \quad (5.5.2.7)$$

con $j = 2, 3, \dots, N-1$. Obteniendo para la Ec. (5.5.2.7)

$$\begin{aligned}
& C \left(E_{j-1} \frac{dE_j^*}{dz} + E_{j-1}^* \frac{dE_j}{dz} \right) \\
& + C \left(E_{j+1} \frac{dE_j^*}{dz} + E_{j+1}^* \frac{dE_j}{dz} \right) + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dz} |E_j|^4 = 0.
\end{aligned} \tag{5.5.2.8}$$

Sumando las N ecuaciones obtenidas anteriormente se llega a

$$C \sum_{i=2}^N \left[\frac{d}{dz} (E_{i-1} E_i^*) + \frac{d}{dz} (E_{i-1}^* E_i) \right] + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dz} (|E_i|^4) \right] = 0, \tag{5.5.2.9}$$

reordenando los índices

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\mu}{2} \frac{d}{dz} (|E_i|^4) \right] + \sum_{i=1}^N C \left[\frac{d}{dz} (E_j E_{j+1}^*) + \frac{d}{dz} (E_j^* E_{j+1}) \right] = 0, \tag{5.5.2.10}$$

La ecuación anterior es válida si se tiene en consideración que $E_{N+1} = E_{N+2} = \dots = 0$ y $E_0 = E_{-1} = \dots = 0$, cuya validez está fundamentada en el argumento de que no existe guía $N+1$ o posteriores, ni cero o anteriores. En términos generales esto significa que el campo fuera de la muestra es cero, siendo estas las condiciones de frontera.

Finalmente el Hamiltoniano del sistema es

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\mu}{2} |E_i|^4 + C (E_i E_{i+1}^* + E_i^* E_{i+1}) \right] = H_0. \tag{5.5.2.11}$$

Se puede verificar que la Ec. (5.5.2.11) es equivalente a

$$\sum_{i=0}^N \left[C (|E_i|^2 + |E_{i+1}|^2 - |E_{i+1} - E_i|^2) + \frac{\mu}{2} |E_i|^4 \right] = H_0. \tag{5.5.2.12}$$

Siendo la Ec. (5.5.2.12) el Hamiltoniano total del sistema de N elementos.

Es importante mencionar que la obtención de P_0 y H_0 es de vital importancia para la presente tesis ya que se usará para controlar y verificar la validez y exactitud de las soluciones numéricas obtenidas.

5.6 Relación de Dispersión

En un arreglo de guías de ondas de gran número, inicialmente infinito, el campo óptico se propaga en cada uno de los canales con un modo. La cercanía de estos canales provoca que la luz “salte” de un sitio a otro mediante tunelamiento, dando como resultados que sus modos individuales se combinen. Cada guía está acoplada con sus vecinas próximas, lo que altera de manera considerable sus características de difracción [7].

La amplitud del campo óptico, $E_{(x,j)}$ se define como el campo E en la guía número j colocada a una distancia x del origen, fijado por convención en la primera guía. Es importante recordar que el modelo supone un sistema discreto de posiciones. La variable de posición transversal usada anteriormente k es número real entero positivo, que difiere de la variable de posición x , que es un valor real positivo y esta medida en μm . Así, usando esta notación para clarificar los procesos matemáticos posteriores, la ecuación diferencial asociada para cualquier guía es

$$i \frac{dE_{(x,j)}}{dz} + C[E_{(x+D,j+1)} + E_{(x-D,j-1)}] + \mu |E_{(x,j)}|^2 E_{(x,j)} = 0, \quad (5.6.1)$$

donde D es la distancia de separación entre los centros de dos guías adyacentes. Para esta sección es de interés estudiar la propagación de la luz en la dirección transversal al eje de propagación z , por lo tanto la tercera parte de la Ec. (5.6.1) es intrascendente ahora debido a que el tercer término afecta directamente a la propagación del campo en la dirección z .

La Ec. (5.6.1) se reduce de la siguiente forma

$$i \frac{dE_{(x,j)}}{dz} + C[E_{(x+D,j+1)} + E_{(x-D,j-1)}] = 0, \quad (5.6.2)$$

Se nota que la solución para esta ecuación diferencial es de tipo exponencial imaginaria y se puede escribir de la siguiente forma.

$$E_{(x,j)}(z) = E_0 e^{i(\beta z - k_x x)}, \quad (5.6.3)$$

donde β y k_x son las componentes del vector de onda en z y x respectivamente.

Sustituyendo esta solución en la Ec. (5.6.2)

$$-\beta E_0 e^{i(\beta z - k_x x)} + C \left[E_0 e^{i[\beta z - k_x(x+D)]} + E_0 e^{i[\beta z - k_x(x-D)]} \right] = 0. \quad (5.6.4)$$

Simplificando

$$-\beta + C \left[e^{-ik_x D} + e^{ik_x D} \right] = 0, \quad (5.6.5)$$

Finalmente, la Ec. (5.6.5) es la relación entre β y la componente x del vector de onda, k_x . A esta ecuación se le denomina *Relación de dispersión* y en forma más general es

$$\beta = 2C \cos(k_x D). \quad (5.6.6)$$

Esta relación muestra una periodicidad de 2π . En la Ec. (5.6.6) $k_x D$ es llamado momento Bloch, el cual está relacionado directamente con el ángulo de inclinación en el que es disparado el rayo sobre el arreglo. La inclinación se puede determinar por medio de la diferencia de fase entre dos guías contiguas. El perfil de la onda incidente se describe por la Ec. (5.6.3), de esta forma, la diferencia de fase inicial entre dos guías adyacentes es $\Delta\varphi = k_x D$. Así, el ángulo de inclinación del haz queda descrito en una relación entre el vector de onda \bar{k} y su componente en x , k_x , de la manera siguiente

$$\theta = \arcsin\left(\frac{k_x D}{kD}\right) \quad |\bar{k}| = k = \frac{2\pi m_0}{\lambda}. \quad (5.6.7)$$

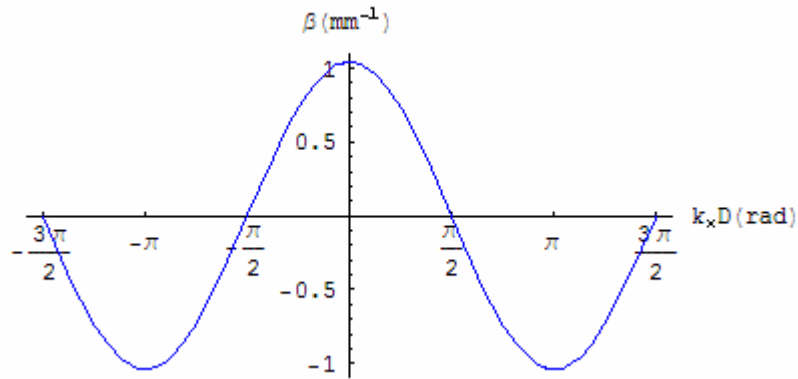


Fig. 5.6. 1. Relación de dispersión.

Esta relación ofrece más ventajas que la presentada en un material continuo. El coeficiente de dispersión es igual a la segunda derivada de la Ec. (5.6.6) [4], es decir, es la curvatura de la Fig. 5.6.1, concluyendo así cuatro casos importantes.

- a) Sí $k_x D \ll 1$ entonces $\beta \approx C(2 - k_x^2 D^2)$.
- b) Para valores de $0 \leq k_x D < \pi/2$ la difracción es normal.
- c) Cuando $k_x D = \pi/2$ la difracción es completamente eliminada.
- d) Para valores de $\pi/2 < k_x D \leq \pi$ la difracción es inversa (difracción anómala).

Del primer inciso se puede concluir que para valores pequeños de momento Bloch la relación de dispersión puede ser descrita como una parábola, equivalente a la relación de dispersión en un medio continuo. En el caso siguiente el haz incidente es ensanchando en la salida. El término normal se asocia con el hecho de que el coeficiente de dispersión es de valor negativo, como normalmente es observado. Para el tercer caso con la variación correcta del ángulo de entrada la difracción es eliminada, lo que en el caso continuo no es posible vía este método. Finalmente, en el último punto, el valor del coeficiente de

dispersión es positivo, de signo contrario a como lo experimenta comúnmente. Este hecho y conjugado con otros factores provoca que un material con no linealidad tipo Kerr positiva (enfocante) se convierta en un medio con no linealidad desenfocante, generando así que el haz se disperse aún más [14].