

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

ESCUELA DE CIENCIAS E INGENIERÍA

SISTEMA MULTI-NIVEL DE UN BIFOTÓN
ENTRELAZADO ESPACIALMENTE
GENERADO BAJO EL PROCESO DE LA
SPDC

TESIS PRESENTADA POR: MARA ABRIL LOZANO MÁRQUEZ

SUPERVISADA POR: DR. WANDERSON MAIA PIMENTA



2021

Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

A mis papás, Gustavo y Norma.

Agradecimientos

Agradezco especialmente al Dr. Wanderson Maia Pimenta, quien más que un profesor, fue un colega para mí, y sin él, este trabajo no hubiera podido ser. Le agradezco infinitamente por creer en mí, además de todo el esfuerzo dedicado al seguimiento, realización y revisión de este trabajo.

También me gustaría agradecerles a mis papás por todo el apoyo incondicional que me han brindado durante toda mi vida, tanto educativa como personal, y que sin ello, no podría haber llegado hasta donde estoy.

Asimismo, agradezco a todos los profesores que me mostraron el maravilloso camino de la ciencia. En especial a Alberto Apreza Sies, quien fue el responsable de que estudiara esta bellísima carrera.

Finalmente, me gustaría agradecer a Jules por todas las horas de estudio que hemos pasado juntos, pero también por todos los buenos momentos de risa y diversión. De igual forma, le agradezco por todo el apoyo brindado al momento de la realización de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	5
2. Tratamiento clásico para el campo electromagnético	9
2.1. Descripción del campo electromagnético dentro de una cavidad	9
2.2. Energía total dentro de la cavidad	14
3. Cuantización del campo electromagnético	17
3.1. El oscilador armónico cuántico	17
3.2. Campo electromagnético cuantizado	21
4. Estado cuántico de un bifotón entrelazado	26
4.1. Estados entrelazados	26
4.2. Generación de fotones gemelos bajo el proceso de la Conversión Paramétrica Descendente	27
4.3. Interacción del campo eléctrico con la materia	29
4.3.1. Hamiltoniano de interacción con el cristal no lineal	30
4.4. Estado cuántico de los fotones gemelos después de la salida del cristal	32
4.4.1. Cálculo del espectro angular del <i>pump</i> transmitido al bifotón	38
4.4.2. Transmisión del bifotón a través de objetos ópticos lineales	39
4.4.3. Cálculo del estado de fotones gemelos después de una rendija con N aperturas	44
5. Conclusiones	51
Bibliografía	53

Capítulo 1

Introducción

“It is safe to say that nobody understands quantum mechanics.”

Richard Feynman

Desde los inicios de la mecánica cuántica, esta disciplina ha traído controversias sobre diversos fenómenos que, a primera vista serían contraintuitivos, pues la física que se conocía antes de la mecánica cuántica podía ser perfectamente explicada por sus bases matemáticas y aunque, años más tarde este formalismo comenzó a ser desarrollado por científicos como Schrödinger o Heisenberg, había quienes aún no aceptaban la nueva teoría del cuanta, creando una separación en la comunidad científica. En esa época escuchar algo nuevo siempre traía controversias, pues la teoría solo podía ser comprobada a partir de resultados experimentales y dado que en aquellos días la tecnología no estaba lo suficientemente desarrollada para poder realizar experimentos más sofisticados, los científicos tenían las herramientas para poder replicar algún resultado que tuviera que ver con la teoría cuántica. Tal fue el caso de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) [1], pues ellos en 1935 llegaron a la conclusión de que la descripción de la mecánica cuántica que provee alguna realidad descrita por la función de onda no es completa, o que las cantidades físicas representadas por operadores no conmutantes, no pueden existir en una misma realidad. Lo que ellos demostraron es que asumiendo que la teoría es completa llegan a que cualesquiera dos cantidades físicas no conmutantes sí pueden estar en una realidad simultánea, así pues, negando la primera asunción, también se negaría la segunda.

El planteamiento de EPR se trataba de determinar la localidad y no localidad de la teoría cuántica, afirmando que se trataba de una teoría no local y que para que fuera una teoría

completa se necesitaba el uso de variables adicionales para reestructurar la localidad, a estas variables se le llamaron variables ocultas y que al no saber nada de estas variables simplemente no aceptarían la cuántica como una teoría completa. No fue sino hasta 1964 cuando J.S. Bell [2] propuso un planteamiento que podía ser realizado experimentalmente para darle seguimiento a el tema de las variables ocultas. A partir de ello, Bell dedujo una desigualdad en donde la teoría de EPR debía ser satisfecha, sin embargo, demostró que en el trabajo de EPR hay situaciones en que la desigualdad se violaba debido a lo que se conoce hoy en día como un estado entrelazado.

Un sistema cuántico de dos niveles es aquel en que los objetos que lo conforman pueden estar en cualquier estado, pero, debido a que este sistema está sujeto a las propiedades de la mecánica cuántica, entonces también podrían estar en estado de superposición, que consiste en estar en los dos estados a la vez [3, 4]. Ahora, estos sistemas cuánticos de dos niveles, podrían ser, por ejemplo, la polarización de un fotón, las partículas de spin $\frac{1}{2}$, etc, en el que los estados de este sistema, pertenecen a un espacio de Hilbert, formando una base para expandir este espacio, y dónde la dimensión es de 2. Dicho esto, si se hace una analogía con la unidad mínima de información, que es utilizado dentro de la informática, el bit, el cual puede tomar solo dos valores, entonces su análogo cuántico es el bit cuántico, mejor conocido como qubit (que es la forma reducida del término en inglés *quantum-bit*), y que, a diferencia de su análogo clásico, este puede presentar una superposición de los dos estados lógicos. De hecho, dentro de la mecánica cuántica, también podemos encontrar sistemas de N-niveles que corresponderían a lo que se denomina como qudits¹. La mayor ventaja que tienen los qudits sobre los qubits, es que, se ha demostrado que los qudits, al ser N-Dimensionales, muestran mayor resistencia ante el ruido cuántico [5, 6, 7], además de mejorar el procesamiento de la información dentro de la implementación computacional [8]. Estas son unas de las razones más importantes por las cuales es mejor trabajar con qudits en vez de qubits.

Ahora, pasando a lo que es un estado entrelazado, esto es, que el estado cuántico de las partículas que conforman al sistema no pueden ser descritas de forma individual, sino que, son descritos como un conjunto, es decir, con un estado único para todo el sistema. Esto tiene una implicación muy interesante, ya que, si todos los objetos que pertenecen al sistema deben ser descritos por un solo estado, significa que no importa cuán separados espacialmente estén estos objetos, ya que, si se conoce el estado de un solo elemento, se sabrá automática-

¹Muchos autores también les dan el nombre de quNits para hacer referencia a las N-dimensiones

mente el estado de los demás, esto gracias a las correlaciones entre las propiedades físicas que presentan cada uno de ellos. Por lo que, otro de los principales motivos por los cuales es de suma importancia el estudio de estados cuánticos entrelazados, es por las diversas áreas que han sabido aprovechar las ventajas del fenómeno. Algunas de ellas son, la teletransportación [9, 10], la criptografía cuántica [11, 12], la metrología [13, 14, 15] y la codificación superdensa [16, 17].

Dentro del estudio y caracterización de sistemas de partículas entrelazadas, existen varios métodos para la generación de estas. No obstante, para el interés de este trabajo, lo que se busca es una fuente que genere un par de fotones únicos, para luego, inducir el entrelazamiento en camino transversal. Se requiere precisamente de esta manera, porque a través de este tipo de entrelazamiento se pueden generar qudits, que, a diferencia de otro tipo de entrelazamiento, como por ejemplo en polarización, no sería posible. Y aunque, existen otros sistemas, que no necesariamente son fotones y cuentan con entrelazamiento en el grado de libertad que se trabajará, no se enfocará en ellos debido a la complejidad que supone generarlos [18].

Con ello, la generación de fotones únicos, pueden ser obtenidos a partir de procesos físicos como la conversión paramétrica espontánea descendente (*Spontaneous Parametric Down Conversion-SPDC* por sus siglas en Inglés) [19, 20, 21], el proceso espontáneo de dispersión de Raman [22] o utilizando puntos cuánticos (*quantum dots* en inglés) [23, 24]. Todos estos procesos son implementados en distintos tipos de arreglos experimentales, que cuentan con ventajas y desventajas, dependiendo de lo que se quiera estudiar, pues unas técnicas serán mejores que otras. El proceso de la *SPDC*, ha resultado ser una de las fuentes de fotones únicos más utilizados. Este proceso se basa en la generación de diferencia de frecuencias, pues al hacer interactuar un haz de alta potencia con un cristal no lineal, se obtienen dos fotones únicos cuya suma de frecuencias de estos, da como resultado la frecuencia del fotón inicial que los generó, pues este proceso conserva energía y momento. Bajo este proceso, se ha demostrado que el par de fotones generados presentan entrelazamiento en diversos grados de libertad, tales como posición-momento [25, 26, 27, 28], energía-tiempo [29, 30, 31], polarización [32, 33, 34] y momento angular orbital [35]. Es este el proceso que se utilizará en este trabajo, pues hay dos principales razones por las cuales se escogió. La primera es que, como se estudiara el entrelazamiento en camino transversal, se requieren dos fotones para lograrlo, y a comparación de los otros procesos antes mencionados, estos generan un solo fotón. La segunda razón es porque, el proceso de la *SPDC* se puede implementar en un

arreglo experimental muy sencillo y barato, hecho que los otros procesos antes mencionados, no son.

A lo largo de todo este trabajo, lo que se estudiará será la generación experimental de estados N-dimensionales, qudits. Con ello, se hará la derivación y completa descripción del estado de dos fotones generados a partir de una fuente de luz de alta potencia, que interactuará con un cristal no lineal, bajo el proceso de la *SPDC*. El hecho de utilizar específicamente este proceso es debido a su bajo coste, y que, a comparación de otros procesos, la implementación experimental dentro de un laboratorio es realmente sencilla. El estado final que se obtendrá será después de atravesar una rendija de N-aberturas. La razón por la cual se utiliza una rendija de N-aberturas, es debido a que, esto nos permite obtener un sistema de N-niveles, creando así estados de N-dimensiones, o qudits, y que, como ya se mencionó, estos tienen grandes ventajas sobre los qubits.

La estructura de este trabajo está dividida en tres capítulos. Dentro del Capítulo 2 se iniciará con la descripción de un campo electromagnético confinado dentro de una cavidad que no cuenta con fuentes ni corrientes. El hecho de realizar esta descripción es debido a que, un campo confinado en este tipo de cavidad se comporta como un oscilador armónico, y con ello, durante el Capítulo 3 se hará un link directo para la cuantización del campo electromagnético. En el Capítulo 4 se describirá la generación de fotones entrelazados bajo el proceso de la *SPDC*, para luego, desarrollar el Hamiltoniano de interacción con el cristal. El Hamiltoniano, es necesario para la descripción del estado justo después de salir del cristal no lineal y después de haber recorrido cierta distancia dentro de un intervalo temporal. Seguido de ello, se analizará la transmisión de los fotones por algún objeto óptico lineal general, para así, determinar el estado cuántico de estos, y después utilizar la función de transmisión de una rendija de N-aberturas para analizar el estado del par de fotones, posterior a haber pasado a través de dicha rendija. De aquí, se encontrará que el estado resultante es un estado producto, por lo que será necesario agregar un elemento más al arreglo experimental para la obtención de estados entrelazados. Finalmente, en el Capítulo 5, se hablará de los resultados obtenidos a lo largo de todo el trabajo y las conclusiones a las que se llegaron.

Capítulo 2

Tratamiento clásico para el campo electromagnético

En este capítulo se obtendrán las soluciones para el campo eléctrico y magnético dentro de una cavidad de forma clásica. Se partirá de las ecuaciones de Maxwell, para después, introducir un vector potencial \vec{A} y una función escalar Φ , y así, encontrar la solución de la ecuación de onda que estará en términos de este vector potencial, haciendo uso del Gauge de Coulomb. Seguido de ello, al obtener la solución para este vector, se reescribirá en términos del campo eléctrico y magnético. Finalmente, ya teniendo las soluciones de estos dos campos, se utilizará la definición de densidad de energía de radiación, para calcular la energía total dentro de la cavidad. El análisis de la solución clásica para el campo electromagnético dentro de una cavidad es necesario para la obtención de la cuantización de los campos, hecho que quedará claro en el Capítulo 3.

2.1. Descripción del campo electromagnético dentro de una cavidad

Se comienza, entonces, por el análisis detallado de la descripción clásica del campo electromagnético dentro de una cavidad, así como de su energía. Por lo tanto, el primer paso partir

de las ecuaciones de Maxwell [36]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1.1a)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (2.1.1b)$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \sigma, \quad (2.1.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.1.1d)$$

dónde σ es la densidad de carga superficial, \vec{j} la densidad de corriente eléctrica, μ_0 y ϵ_0 son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica en el vacío, respectivamente. Aquí se hará uso de un vector potencial \vec{A} y una función escalar Φ . El cambio de \vec{A} y Φ satisfacen las ecuaciones de Maxwell 2.1.1, sin embargo, al ser una expresión generalizada, lo que se utiliza para reducir el número de estas funciones y vectores que las satisfacen, es haciendo uso del llamado Gauge de Coulomb. Las transformaciones de Gauge son transformaciones en algún grado de libertad interno, que no modifica ninguna propiedad física observable [36], con ello, los campos magnéticos y eléctricos quedarán en función de estas entidades matemáticas, teniendo la forma,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.1.2)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2.1.3)$$

sustituyendo el campo magnético y eléctrico en la Ecuación 2.1.1b y con el uso de la siguiente identidad: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$, se puede llegar a la siguiente ecuación de onda

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\Phi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j}, \quad (2.1.4)$$

que, de igual forma, realizando la sustitución de los campos presentados en las ecuaciones 2.1.2 y 2.1.3 dentro de la Ecuación 2.1.1c, lo que resulta es una variante de la ecuación de onda 2.1.4, que tiene la siguiente forma,

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \Phi - \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sigma; \quad (2.1.5)$$

esta es la ecuación de Poisson, que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea. Aquí, se tienen dos ecuaciones de onda, 2.1.4 y 2.1.5, que indistintamente, se pueden resolver para obtener la solución del vector potencial \vec{A} , ya que se llegaría al mismo resultado. Así pues, se decidió utilizar la Ecuación 2.1.4 para continuar con este análisis. Dentro del Gauge de Coulomb se tiene la condición de que la divergencia del vector potencial, es cero, *i.e.* $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Aplicando esta condición y sabiendo que la transformación de Gauge solo afecta a la parte longitudinal de la Ecuación 2.1.4 y que la parte transversal es invariante, entonces, la ecuación de onda se puede expresar en su parte transversal y longitudinal [37], de la forma

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j}_T \quad (2.1.6)$$

y

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \Phi) = \mu_0 \vec{j}_L, \quad (2.1.7)$$

dónde \vec{j}_T y \vec{j}_L representan las componentes transversal y longitudinal respectivamente, de la densidad de corriente eléctrica.

A partir de este momento, se considera una cavidad cúbica de lado L cuyas fronteras no son reales, a esta cavidad se le denomina Cavidad de cuantización (véase la Figura 2.1), dónde el campo electromagnético estará confinado dentro de esta región en ausencia de fuentes ni corrientes, por lo que las ecuaciones 2.1.6 y 2.1.7 estarán igualadas a cero. Debido a que se desea saber la forma del vector potencial, entonces, se utilizará la Ecuación 2.1.6. Además, como este vector está definido a partir del campo magnético (véase la Ecuación 2.1.2), y este a su vez es transversal al campo eléctrico, entonces se utilizará la notación \vec{E}_T para hacer notar este hecho. Así pues, el vector potencial \vec{A} es expandido como una suma de todas las contribuciones de los modos de la cavidad,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1,2} \vec{e}_{\vec{k},s} A_{\vec{k},s}(\vec{r}, t), \quad (2.1.8)$$

dónde $\vec{e}_{\vec{k},s}$ es el vector unitario de polarización, los subíndices \vec{k} y s son, el vector de onda dentro de la cavidad y la polarización del campo respectivamente, y en cuanto a $A(\vec{r}, t)$, este término está dado por:

$$A_{\vec{k},s}(\vec{r}, t) = A_{\vec{k},s}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + A_{\vec{k},s}^*(t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.1.9)$$

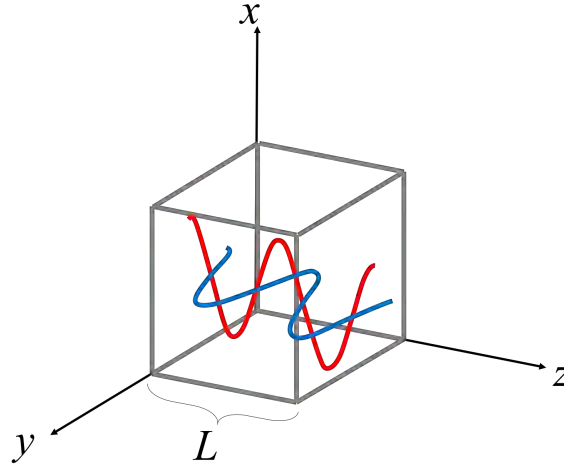


Figura 2.1: El campo electromagnético está confinado en una cavidad cúbica de lado L , a esta cavidad se le conoce como, cavidad de cuantización. La energía dentro de esta es la oscilación entre la energía del campo eléctrico y el magnético.

Y cuyas componentes del vector de onda, se obtienen a través de las condiciones a la frontera que debe satisfacer la ecuación de onda 2.1.6; estas son:

$$k_x = \frac{2\pi}{L}m_x, \quad (2.1.10a)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L}m_y, \quad (2.1.10b)$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L}m_z, \quad (2.1.10c)$$

dónde $m_i = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $i = x, y, z$. El vector unitario de polarización $\vec{e}_{\vec{k},s}$ de la Ecuación 2.1.8, debido al Gauge de Coulomb, debe cumplir con las siguientes condiciones:

- El vector de polarización es transversal al vector de propagación de la onda. $\vec{e}_{\vec{k},s} \cdot \vec{k} = 0$.
- Los vectores de polarización son ortonormales, $\vec{e}_{\vec{k},s} \cdot \vec{e}_{\vec{k},s'} = \delta_{s,s'}$

dónde $\delta_{s,s'}$ es la Delta de Kronecker que puede tomar los valores 0 si $s \neq s'$ o 1 si $s = s'$. De la ecuación del vector potencial 2.1.8 y de 2.1.9 se puede ver que la amplitud depende de la parte temporal por lo que debe ser definida, para ello, lo que se hace es sustituir la Ecuación 2.1.8 en 2.1.6, pero, como la derivada de una suma es la suma de las derivadas, entonces,

simplemente en esta ocasión, se omitirá poner la suma, y al final del cálculo se volverá a colocar nuevamente, de esta forma, la ecuación de onda es

$$-\nabla^2 A_{\vec{k},s}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{\vec{k},s}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1.11)$$

dónde cada una de las componentes modales son independientes y obedecen la ecuación de onda. Con ello, realizando las respectivas derivadas, se llega a la ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$k^2 A_{\vec{k},s}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 A_{\vec{k},s}(t)}{dt^2} = 0; \quad (2.1.12)$$

además, con el objetivo de simplificar la ecuación anterior, lo que se puede hacer es, multiplicar por c^2 y de esta forma dejar el término de la derivada libre para su mejor manejo. También, se puede introducir la variable $\omega_k = ck$ y dejar la forma de una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea, la cual se presenta en la siguiente forma:

$$\frac{d^2 A_{\vec{k},s}(t)}{dt^2} + \omega_k^2 A_{\vec{k},s}(t) = 0, \quad (2.1.13)$$

y cuya solución puede ser obtenida a partir del método de polinomio característico. Con esto la amplitud que depende del tiempo es

$$A_{\vec{k},s}(t) = A_{\vec{k},s} \exp(\pm i\omega_k t). \quad (2.1.14)$$

Finalmente, si se sustituye 2.1.14 en 2.1.9 y esta a su vez en 2.1.8 se obtiene la expresión completa del vector potencial que se buscaba

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \vec{e}_{\vec{k},s} (A_{\vec{k},s} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + A_{\vec{k},s}^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})). \quad (2.1.15)$$

De la Ecuación 2.1.3, se puede ver que hay dos partes que componen al campo eléctrico, una que depende de Φ y otra que depende de \vec{A} , si utilizamos la Ecuación 2.1.15, para sustituirla en este campo, lo que se obtendrá va a ser la parte transversal del campo eléctrico \vec{E}_T . Esto debido a lo que se mencionó anteriormente sobre la perpendicularidad entre el campo

eléctrico y el campo magnético. Así pues, se llega a la siguiente expresión

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \vec{e}_{\vec{k},s} [i\omega_k (A_{\vec{k},s} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - A_{\vec{k},s}^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r}))]. \quad (2.1.16)$$

Para el campo magnético se hace un procedimiento análogo utilizando la Ecuación 2.1.2 y 2.1.15, llegando a la ecuación,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \frac{\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},s}}{k} [ik (A_{\vec{k},s} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - A_{\vec{k},s}^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r}))]. \quad (2.1.17)$$

2.2. Energía total dentro de la cavidad

La densidad de energía del campo electromagnético se define como [36, 4],

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{cavidad} dV [\epsilon_0 \vec{E}_T(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_T(\vec{r}, t) + \mu_0^{-1} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)]. \quad (2.2.1)$$

Si se realizan los respectivos productos punto del campo eléctrico y magnético dados por la ecuaciones 2.1.16 y 2.1.17 respectivamente, se observa que resultan dos términos, que, dependen del espacio y de dos términos que dependen del tiempo. Ahora, si se toma en consideración la condición antes mencionada sobre la ortonormalidad de los vectores de polarización, y qué, además, se asegura que los modos (\vec{k}, s) y $(-\vec{k}, s)$ cuentan con la misma frecuencia ¹, se llega a que las integrales de la Ecuación 2.2.1 solo quedarían en términos de la parte espacial, mientras que el resto es constante, con ello,

$$\int_{cavidad} dV \exp(\pm i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}) = V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.2.2)$$

y

$$\int_{cavidad} dV \exp(\pm i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}) = V \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \quad (2.2.3)$$

¹El hecho de que los modos (\vec{k}, s) y $(-\vec{k}, s)$ tengan la misma frecuencia es porque la dirección del vector de onda no influye en su frecuencia, esta cambia solo si la magnitud también lo hace.

llegando a la expresión de la energía total de radiación dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{s,s'} V [& (A_{\vec{k},s} A_{\vec{k},s'}^* + A_{\vec{k},s}^* A_{\vec{k},s'}) \\
 & \times (\epsilon_0 \omega_k^2 \vec{e}_{\vec{k},s} \cdot \vec{e}_{\vec{k},s'} + \mu_0^{-1} (\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},s}) \cdot (\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},s'})) \\
 & - (A_{\vec{k},s} A_{\vec{k},s'} \exp(-2i\omega_k t) + A_{\vec{k},s}^* A_{\vec{k},s'}^* \exp(2i\omega_k t)) \\
 & \times (\epsilon_0 \omega_k^2 \vec{e}_{\vec{k},s} \cdot \vec{e}_{\vec{k},s'} - \mu_0^{-1} (\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},s}) \cdot (\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},s'}))] ,
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

donde la parte temporal se desvanece debido a la propiedad de los vectores de polarización sobre la ortogonalidad, con esto se evitar sumar ceros, por lo tanto cuando $s = s'$, se tiene

$$\mathcal{E} = \sum_{\vec{k}} \sum_s \epsilon_0 V \omega_k^2 (A_{\vec{k},s} A_{\vec{k},s}^* + A_{\vec{k},s}^* A_{\vec{k},s}), \tag{2.2.5}$$

dónde las amplitudes $A_{\vec{k},s}$ y $A_{\vec{k},s}^*$ pueden sumarse, reduciendo el término que se encuentra dentro del paréntesis, no obstante, se dejará de esta forma sugestiva, ya que será útil para contrastarlo con el resultado al que se llegará en el capítulo siguiente. Pero, podemos notar que, si se hace la suma sobre la polarización, la suma de las amplitudes dentro del paréntesis y se toma en cuenta que, debido a que estamos en el régimen clásico, las amplitudes son reales, entonces, la Ecuación 2.2.5 se reescribe como:

$$\mathcal{E} = \sum_{\vec{k}} 2\epsilon_0 V \omega_k^2 (A_{\vec{k},1}^2 + A_{\vec{k},2}^2), \tag{2.2.6}$$

dónde $A_{\vec{k},1}$ hace referencia a la amplitud oscilatoria del campo eléctrico y $A_{\vec{k},2}$ a la del campo magnético. Además, si introducimos las siguientes cantidades

$$x_{\vec{k}} = (4\epsilon_0 V)^{1/2} A_{\vec{k},1} \tag{2.2.7a}$$

$$p_{\vec{k}} = (4\epsilon_0 V \omega^2)^{1/2} A_{\vec{k},2} \tag{2.2.7b}$$

dónde $x_{\vec{k}}$ y $p_{\vec{k}}$ son introducidos de forma conveniente representando una equivalencia entre posición y momento respectivamente. Si, estas dos ecuaciones se utilizan dentro la Ecuación

2.2.6, entonces se puede llegar a la siguiente expresión de energía

$$\mathcal{E} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} p_{\vec{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_{\vec{k}}^2, \quad (2.2.8)$$

que es análoga a la energía de un oscilador armónico mecánico, de la forma:

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2. \quad (2.2.9)$$

Físicamente, lo que representa la energía de un oscilador armónico mecánico, es la oscilación entre energía cinética y potencial, mientras que la del campo electromagnético confinado dentro de una cavidad, es la oscilación entre la energía del campo eléctrico con la del campo magnético, pudiendo comprobar de esta forma, que este campo se comporta como un oscilador armónico.

Capítulo 3

Cuantización del campo electromagnético

En este capítulo se hará el procedimiento detallado para la obtención del campo electromagnético cuantizado, donde se hará un salto directo del análisis clásico realizado en el Capítulo 2 a su contraparte cuántica, esto debido a que como se vio en dicho capítulo, la energía de este campo se comporta igual al de un oscilador armónico simple. Se comenzará con el estudio cuántico del oscilador armónico, donde se introducirá el concepto de operadores, así como algunas de sus propiedades. También, se obtendrán las expresiones para los operadores del campo que representan observables, mientras que se examinarán algunas de sus propiedades que serán útiles a lo largo de este trabajo. Para luego, poder obtener su Hamiltoniano asociado.

3.1. El oscilador armónico cuántico

La expresión del Hamiltoniano para el oscilador armónico cuántico en una dimensión, está compuesto por dos partes, la contribución de la energía cinética y de la energía potencial del sistema, el cual tiene la forma [3, 38],

$$\hat{\mathbb{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (3.1.1)$$

donde \hat{x} y \hat{p} son los operadores de posición y momento respectivamente, cuyo conmutador es el siguiente,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (3.1.2)$$

la información que nos proporciona este conmutador es que las observables físicas que representan los operadores de posición y momento no son compatibles, por lo que una medición en alguna de estas dos supondrá el aumento de incertidumbre en la otra.

De igual forma, es conveniente introducir un par de operadores que están en términos de los operadores de posición y momento, ya que, serán de suma importancia de aquí en adelante, pues el significado físico de estos recae directamente en el fenómeno estudiado en este trabajo. A estos se les llama, operadores escalera, y quedará claro mas adelante por qué se les nombra de esta forma. De igual manera cabe recalcar, que estos operadores no representan una observable física, por lo que no son operadores Hermitianos ¹. La forma de estos operadores es:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}), \quad (3.1.3)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}), \quad (3.1.4)$$

y donde estos, pueden ser escritos en términos del operador Hamiltoniano,

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathbb{H}} + \frac{1}{2}\hbar\omega \right), \quad (3.1.5)$$

cuyo conmutador es representado de la siguiente forma,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.1.6)$$

además, despejando el Hamiltoniano de la Ecuación 3.1.5 se tiene la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbb{H}} = \frac{1}{2}\hbar\omega (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right). \quad (3.1.7)$$

La energía es un eigenvalor que puede ser determinado en base a los operadores escalera. Sea Ψ_n un eigenestado del operador Hamiltoniano, cuyo eigenvalor esta dado por E_n , entonces, la ecuación de eigenvalor- eigenestado es

$$\hat{\mathbb{H}}\Psi_n = E_n\Psi_n, \quad (3.1.8)$$

¹Un operador Hermitiano es aquel que cumple la condición de que su adjunto sea él mismo, *i.e.* $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$

si a este estado, se le aplica el operador de subida de ambos lados de la ecuación, lo que se obtiene es el siguiente resultado,

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger\Psi_n = (\hbar\omega + E_n)\Psi_n, \quad (3.1.9)$$

lo que significa que, al aplicar el operador \hat{a}^\dagger a un estado, este aumenta de energía por un factor de $\hbar\omega$, y que, además, sigue representando un eigenestado del oscilador armónico. Por otra parte, si se llegara a aplicar el operador de bajada a un cierto estado, un número determinado de veces, llegará un momento en el que el resultado será cero, de forma que

$$\begin{aligned} \hat{H}\hat{a}\Psi_n &= (E_n - \hbar\omega)\Psi_n \\ \hat{H}\hat{a}|\Psi_{n-1}\rangle &= (E_{n-1} - \hbar\omega)\Psi_{n-1} \\ &\vdots \\ \hat{H}\hat{a}\Psi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

esto debido a que, la energía potencial y cinéticas son cantidades positivas, por lo tanto, los eigenvalores no pueden ser cantidades negativas. Observando entonces que el operador \hat{a} aplicado a un estado, baja de energía, mientras que el operador \hat{a}^\dagger aplicado a un estado, aumenta de energía, es por esta razón por la cual se les llama operadores escalera. Bajo este análisis, entonces, Ψ_0 es el estado base del sistema, con una energía E_0 . Ahora, haciendo uso de la relación obtenida en la ecuación de eigenvalor-eigenestado 3.1.10,

$$\hat{H}\hat{a}\Psi_0 = (E_0 - \hbar\omega)\hat{a}\Psi_0 = 0, \quad (3.1.11)$$

por hipótesis, $\hat{a}\Psi_0 = 0$, y con esta condición se determina la energía base, siendo

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega; \quad (3.1.12)$$

aunque, intuitivamente uno pensaría que la energía del estado base es cero, la realidad es que, el resultado de la Ecuación 3.1.12 refleja que el estado Ψ_0 cuenta con una cantidad mínima de energía diferente de cero. Utilizando este resultado, en conjunto con la Ecuación 3.1.9, se

llega a que la energía del n -ésimo estado está dado por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad (3.1.13)$$

que resulta en la energía cuantizada de un oscilador armónico simple. De aquí, se puede notar que, cuando se aplica el operador de subida n veces al estado base, se llegaría al estado n -ésimo,

$$\Psi_n = C_n (\hat{a}^\dagger)^n \Psi_0 = C_n \hat{a}^\dagger \Psi_{n-1}, \quad (3.1.14)$$

y dónde C_n es una constante de normalización.

A través de los operadores escalera, dados por las ecuaciones 3.1.3 y 3.1.4, se puede definir un nuevo operador llamado, operador número. Además, dentro de este contexto, el significado físico de estos operadores cambia y será evidente más adelante. Con ello, la forma de este operador es la siguiente

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.1.15)$$

Los operadores escalera, dados por las ecuaciones 3.1.3 y 3.1.4, permitieron determinar un conjunto ortonormal de funciones de onda determinados por el subíndice n , y dónde estas funciones aumentan su energía en pasos de $\hbar\omega$. Cada una de estas funciones de onda son eigenestados del oscilador armónico, y al estar representadas por este subíndice n , es de dónde surge naturalmente el concepto de estado número, pues se puede ver que existe una equivalencia, tal que $\Psi_n \equiv |n\rangle$. Por lo tanto, los estados número son también eigenestados del oscilador armónico cuántico, entonces, al aplicarle los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} a estos, se obtendría una relación similar a lo que se vio en la Ecuación 3.1.14,

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (3.1.16a)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (3.1.16b)$$

dónde \sqrt{n} y $\sqrt{n+1}$ son las constantes de normalización ². La interpretación es que, cuando \hat{a}^\dagger es aplicado a algún estado número, este crea un cuanta, llevándolo al estado $|n+1\rangle$, mientras que, si se le aplica el operador \hat{a} , lo que se obtendrá es la destrucción de un cuanta llevándolo al estado $|n-1\rangle$, de aquí que el nombre de estos operadores cambie, pues en este

²Estas constantes de normalización se pueden obtener a través de aplicar n veces el operador creación al estado $|0\rangle$ e ir normalizándolo cada vez que se tiene un nuevo estado.

contexto se les conoce como operadores de creación y aniquilación [4]. Así pues, utilizando las ecuaciones 3.1.15 y 3.1.16 se puede corroborar que la siguiente ecuación eigenvalor-eigenestado se cumple,

$$\begin{aligned}\hat{n} |n\rangle &= \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n^{1/2} \hat{a}^\dagger |n-1\rangle \\ &= n^{1/2} ((n-1) + 1) |n\rangle \\ &= n |n\rangle,\end{aligned}\tag{3.1.17}$$

siendo los estados número, los eigenestados del operador número. Gracias al análisis realizado, ahora se puede asociar al fenómeno que se estará analizando en capítulos posteriores. Se define entonces, un estado número fotónico, el cual representará físicamente a un campo monocromático cuantizado con una frecuencia angular ω que contiene n fotones.

A veces, es más conveniente trabajar con operadores adimensionales de posición y momento llamados operadores cuadratura, pues los cálculos se reducen considerablemente. Estos se definen como

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}),\tag{3.1.18a}$$

$$\hat{Y} = \sqrt{2m\hbar\omega} \hat{p} = \frac{1}{2}i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}),\tag{3.1.18b}$$

y cuyo conmutador es

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \frac{i}{2};\tag{3.1.19}$$

reescribiendo el Hamiltoniano en término de estos operadores se tiene

$$\hat{\mathbb{H}} = \hbar\omega(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2).\tag{3.1.20}$$

3.2. Campo electromagnético cuantizado

El campo electromagnético es cuantizado en base al oscilador armónico cuántico, dónde cada modo (\vec{k}, s) , es la radiación en la cuantización de la cavidad que se vio en la primera parte. Esto es debido, a que, como ya se mencionó, el comportamiento del campo dentro de la cavidad es idéntica al del oscilador armónico clásico, por lo que la transición de la descripción clásica a la cuántica es directa. Los modos de los operadores cuánticos son indicados por los subíndices (\vec{k}, s) , por lo tanto, los operadores de creación y aniquilación aplicados a los estado

número de las ecuaciones 3.1.16 toman la forma,

$$\hat{a}_{\vec{k},s} |n_{\vec{k},s}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},s}} |n_{\vec{k},s} - 1\rangle \quad (3.2.1a)$$

$$\hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger |n_{\vec{k},s}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},s} + 1} |n_{\vec{k},s} + 1\rangle, \quad (3.2.1b)$$

cuya interpretación física de estos operadores es que, crean o destruyen un fotón en el modo \vec{k} con polarización s dentro de la cavidad y dónde su energía es $\pm\hbar\omega_k$. Del mismo modo que en el análisis clásico, la frecuencia angular del fotón, es independiente del modo de polarización y depende solo de la magnitud del vector de onda.

El operador número de los fotones excitados de la Ecuación 3.1.15 se reescribe como,

$$\hat{n}_{\vec{k},s} = \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},s}, \quad (3.2.2)$$

y la ecuación de eigenvalor-eigenestado, dónde fue utilizada la Ecuación 3.1.17 es

$$\hat{n}_{\vec{k},s} |n_{\vec{k},s}\rangle = \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},s} |n_{\vec{k},s}\rangle = n_{\vec{k},s} |n_{\vec{k},s}\rangle. \quad (3.2.3)$$

Los diferentes modos de la cavidad son independientes y sus operadores asociados conmutan

$$[\hat{a}_{\vec{k},s}, \hat{a}_{\vec{k}',s'}^\dagger] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{s,s'}, \quad (3.2.4)$$

con esto, el estado de todo el campo, se expresa como el producto de los estados de los modos de forma individual

$$|n_{\vec{k}_1,1}, n_{\vec{k}_1,2}, n_{\vec{k}_2,1}, n_{\vec{k}_2,2}, \dots\rangle = |n_{\vec{k}_1,1}\rangle |n_{\vec{k}_1,2}\rangle |n_{\vec{k}_2,1}\rangle |n_{\vec{k}_2,2}\rangle \dots = |\{n_{\vec{k},s}\}\rangle. \quad (3.2.5)$$

Para el Hamiltoniano del campo, la forma en la que se escribe es de la misma manera que el presentado en la Ecuación 3.1.7 y será la suma de las contribuciones de todos los osciladores armónicos, expresado de la siguiente manera,

$$\hat{\mathbb{H}}_R = \sum_{\vec{k}} \sum_s \frac{1}{2} \hbar\omega_k (\hat{a}_{\vec{k},s} \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},s}). \quad (3.2.6)$$

esta expresión fue obtenida directamente del Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico,

la importancia de esto radica en que, cuando se obtenga el Hamiltoniano a partir de los operadores de campo eléctrico y magnético, se llegará exactamente a la misma expresión, confirmando de esta manera la transición directa del oscilador clásico al cuántico.

En el estudio del campo electromagnético clásico, se obtuvo que el promedio de la energía estaba en términos de las amplitudes de los respectivos campos (véase la Ecuación 2.2.5). Lo que se pretende ahora es darle la forma de operadores a estas amplitudes, teniendo como resultado la siguiente forma,

$$A_{\vec{k},s} \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{\vec{k},s}, \quad (3.2.7)$$

$$A_{\vec{k},s}^* \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger, \quad (3.2.8)$$

con este cambio se puede llegar al operador del vector potencial visto en la Ecuación 2.1.8 y en la Ecuación 2.1.9, tiene la forma,

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1,2} \vec{e}_{\vec{k},s} \hat{A}_{\vec{k},s}(\vec{r}, t), \quad (3.2.9)$$

donde

$$\hat{A}_{\vec{k},s}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} (\hat{a}_{\vec{k},s} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})); \quad (3.2.10)$$

también, se introducirá una fase de ángulo para los modos de la onda, y así poder facilitar los cálculos, dado por la siguiente expresión

$$\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{\pi}{2}. \quad (3.2.11)$$

Con esto, el operador completo del campo eléctrico se puede separar en sus componentes positivas y negativas de la frecuencia,

$$\hat{E}_T(\vec{r}, t) = \hat{E}_T^+(\vec{r}, t) + \hat{E}_T^-(\vec{r}, t) \quad (3.2.12a)$$

$$\hat{E}_T^+(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \vec{e}_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \hat{a}_{\vec{k},s} \exp(-i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)) \quad (3.2.12b)$$

$$\hat{E}_T^-(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \vec{e}_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger \exp(i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)). \quad (3.2.12c)$$

Este procedimiento se hace de forma análoga para el campo magnético,

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \hat{B}^+(\vec{r}, t) + \hat{B}^-(\vec{r}, t) \quad (3.2.13a)$$

$$\hat{B}^+(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{\vec{k},s} \exp(-i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)) \quad (3.2.13b)$$

$$\hat{B}^-(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger \exp(i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)). \quad (3.2.13c)$$

Generalizando los operadores de cuadratura, vistos en las ecuaciones 3.1.18, la relación de conmutación se expresa de la siguiente manera:

$$[\hat{X}_{\vec{k},s}, \hat{Y}_{\vec{k}',s'}] = \frac{i}{2} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{s,s'}. \quad (3.2.14)$$

Ahora, despejando los operadores de creación y aniquilación de la Ecuación 3.1.18,

$$\hat{a}_{\vec{k},s} = \hat{X}_{\vec{k},s} + i\hat{Y}_{\vec{k},s}, \quad (3.2.15a)$$

$$\hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger = \hat{X}_{\vec{k},s} - i\hat{Y}_{\vec{k},s}, \quad (3.2.15b)$$

y sustituyéndolo en las ecuaciones del campo eléctrico 3.2.16, se llega a obtener la expresión del operador en términos de las cuadraturas,

$$\begin{aligned} \hat{E}_T(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \vec{e}_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} [(\hat{X}_{\vec{k},s} + i\hat{Y}_{\vec{k},s}) \exp(-i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)) \\ + (\hat{X}_{\vec{k},s} - i\hat{Y}_{\vec{k},s}) \exp(i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t))], \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

de forma análoga para el campo magnético,

$$\begin{aligned} \hat{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} [(\hat{X}_{\vec{k},s} + i\hat{Y}_{\vec{k},s}) \exp(-i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)) \\ + (\hat{X}_{\vec{k},s} - i\hat{Y}_{\vec{k},s}) \exp(i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t))]. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

A partir de estos dos operadores de campo, lo que se puede hacer es calcular el Hamiltoniano, que es análogo al ya visto en el capítulo del análisis clásico,

$$\hat{\mathbb{H}}_R = \frac{1}{2} \int_v dV [\epsilon_0 \hat{E}_T(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}_T(\vec{r}, t) + \mu_0^{-1} \hat{B}(\vec{r}, t) \cdot \hat{B}(\vec{r}, t)], \quad (3.2.18)$$

y sustituyendo ambos campos de las ecuaciones 3.2.16 y 3.2.17 o de las ecuaciones 3.2.12 y 3.2.13a en el Hamiltoniano dado por la Ecuación 3.2.18 se llega a,

$$\hat{\mathbb{H}}_R = \sum_{\vec{k}} \sum_s \frac{1}{2} \hbar \omega_k (\hat{a}_{\vec{k},s} \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},s}), \quad (3.2.19)$$

que corresponde exactamente al oscilador armónico cuántico de la Ecuación 3.2.6, así como de su contraparte clásica de la Ecuación 2.2.5. Y que, como se mencionó en un principio, el Hamiltoniano es la suma de todas las contribuciones de los osciladores armónicos para cada modo.

Capítulo 4

Estado cuántico de un bifotón después de pasar a través de una rendija con N -aberturas

En este capítulo se hará el desarrollo detallado de un bifotón, también conocidos como fotones gemelos, que se originan a partir de un cristal birrefringente (cristal no lineal) bajo el proceso de la *SPDC*. La obtención del Hamiltoniano de interacción con el cristal será obtenido para luego ser utilizado en el cálculo del estado del bifotón justo en la fase de salida del cristal. Este estado será usado para describir al par de fotones después de haber recorrido alguna distancia en el espacio libre, justo antes de pasar a través de un dispositivo óptico lineal, que en el caso de este trabajo será una rendija con N -aberturas. Además, N determina la dimensión del espacio de Hilbert dónde están contenidos estos estados, llegando así a obtener qudits. Finalmente, se obtendrá el estado del bifotón después de haber interactuado con esta rendija para determinar su estado, que tendrá la forma de un estado separable. No obstante, se hará una modificación en el arreglo experimental para lograr obtener un estado entrelazado entre los fotones gemelos.

4.1. Estados entrelazados

Físicamente, lo que representa un estado entrelazado es que los elementos involucrados en el sistema no pueden ser descritos de forma individual, por lo que, todos y cada uno de los

elementos deben estar especificados bajo un mismo estado. Para describir a estos estados, de forma matemática, primeramente, se deben considerar dos sistemas cuánticos cualesquiera, A B , y que, además, deben estar asociados a un espacio de Hilbert de cualquier dimensión. A este sistema se le conoce como un sistema bipartido¹. Si se quiere hacer la descripción de un sistema compuesto con estos dos sistemas hipotéticos, entonces, este debe ser descrito en el espacio del producto tensorial de cada parte y cuya dimensión resultante será la multiplicación de cada una de estas. Las bases con las que pueden ser expandidos estos nuevos estados, pueden ser representados de igual forma por el producto tensorial de las bases cada uno de los estados. Con todo esto, un estado elegido de forma arbitraria se representa de la siguiente forma:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |A_i\rangle \otimes |B_j\rangle, \quad (4.1.1)$$

con $c_{ij} = \langle A_i B_j | \Psi \rangle$ que son los coeficientes complejos que satisfacen la condición de ortogonalidad de los vectores. A este tipo de estado se le conoce como estado puro. Si además, este coeficiente se puede expresar como la multiplicación de dos constantes, se tiene que ese sistema global será un estado producto dado de la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_i a_i |A_i\rangle \otimes \sum_j b_j |B_j\rangle \equiv |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B, \quad (4.1.2)$$

pero, si de cualquier forma, para estos dos subsistemas, el estado no puede expresarse en términos de un estado producto, entonces estaremos en la presencia de un estado entrelazado.

4.2. Generación de fotones gemelos bajo el proceso de la Conversión Paramétrica Descendente

La conversión paramétrica descendente espontánea tiene sus inicios teóricos en la década de 1960 [39] y experimentales en 1970 [40]. No obstante, no fue sino hasta finales de la década de 1980 y principios de 1990 cuando finalmente se le dio un uso práctico a los resultados de teóricos y experimentales sobre este fenómeno, ya que este proceso es utilizado para muchos experimentos en óptica cuántica, tales como, la criptografía cuántica, computación cuántica,

¹Algunos ejemplos de estos sistemas son: fotón-fotón, átomo-fotón o dos grados de libertad de un mismo sistema. En estos estados se pueden encontrar estados entrelazados.

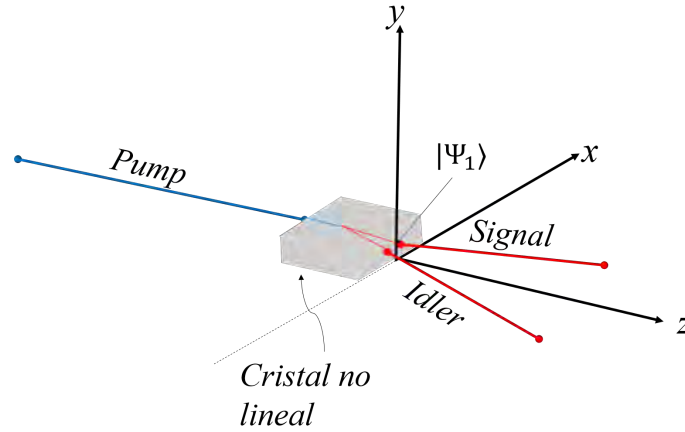


Figura 4.1: El haz *pump* incide sobre un cristal no lineal y bajo el proceso de la *SPDC* se genera un par de fotones, *signal* e *idler*.

metrología, teletransportación, como ya se había mencionado anteriormente.

La *SPDC* es un proceso óptico no lineal de segundo orden, en el cual un haz de alta potencia llamado haz de bombeo (*pump* en inglés), interactúa con un medio no lineal en donde se generan dos fotones únicos de menores frecuencias, a estos fotones se les conocen como señal (*signal*) y acompañante (*idler*) [19, 20]. Este tipo de proceso puede ser obtenido fácilmente a partir del arreglo experimental mostrado en la Figura 4.1. El proceso de la *SPDC* cumple con la conservación de energía y momento, esto quiere decir que la suma de las energías de los haces de salida tiene que ser igual a la energía del haz de entrada, análogamente para el momento. Este es un proceso de generación de una diferencia de frecuencias, esto es que, cuando uno de los fotones que constituye al haz de entrada, que en este caso es el *pump*, con frecuencia angular ω_1 , entonces, es convertido en un par de fotones, *signal* e *idler*, cuyas frecuencias angulares están dadas por ω_2 y ω_3 . El término espontáneo se refiere al hecho de que el proceso es estimulado en el vacío; el término paramétrico significa que la energía total se mantiene conservada durante el proceso, tal que

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad (4.2.1)$$

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3, \quad (4.2.2)$$

dónde \vec{k}_i es el vector de onda del fotón, y de hecho, este proceso también conserva momento.

Por esta razón, las circunstancias en donde las dos condiciones son satisfechas al mismo tiempo es llamado condiciones de empatamiento de fase (*phase-matching*) [41]. La manera por la cual se puede obtener el proceso de la SPDC, es a través del uso de un cristal birrefringente. Este tipo de cristales presentan el fenómeno de la birrefringencia (valga la redundancia), que es una propiedad óptica no lineal, la cual consiste en exhibir dos índices de refracción cuando se le hace incidir un haz. Este haz se divide en dos al momento de entrar en este cristal, creando dos haces con diferentes velocidades, siguiendo diferentes trayectorias, y a los cuales se les diferencia como haces ordinarios y extraordinarios [42].

4.3. Interacción del campo eléctrico con la materia

Dentro de la óptica, se sabe que cuando un campo electromagnético se propaga a través de un medio material, las ecuaciones de Maxwell 2.1.1b y 2.1.1c pueden ser reescritas como [36]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.3.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (4.3.1b)$$

dónde \vec{D} es el desplazamiento eléctrico y \vec{H} es el campo magnético dentro de un material, estos están definidos como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.3.2)$$

y

$$\vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B}, \quad (4.3.3)$$

respectivamente. Ahora, considerando un medio sin fuentes, es decir, dónde no haya cargas ni corrientes, las ecuaciones 4.3.1b y 4.3.1a se reescriben de la siguiente forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.3.4a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \quad (4.3.4b)$$

En la Ecuación 4.3.2, \vec{P} es la polarización eléctrica dentro del medio material. Esta polarización dependerá de las características físicas del medio interactuante, por lo que, la expresi-

sión para esta es la siguiente

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (4.3.5)$$

dónde $\chi^{(1)}$ es el tensor de susceptibilidad eléctrica de orden 1 adimensional. Sin embargo, este término solo es válido para cuando se tiene un material óptico lineal. De forma general, la polarización eléctrica se escribe como [43]

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(2)} \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \dots \quad (4.3.6)$$

De esta forma, se puede obtener la densidad total de energía, que es la energía de interacción del material con el haz, definida como [36]

$$H_I = \frac{1}{2} \int_V \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) d^3\vec{r}. \quad (4.3.7)$$

4.3.1. Hamiltoniano de interacción con el cristal no lineal

Como ya se mencionó, el haz *pump* interactuará con un medio no lineal de segundo orden, sin embargo, esta interacción es muy débil, por lo que se puede considerar como una perturbación. Teniendo esto en cuenta, el Hamiltoniano de interacción puede ser dividido en su parte lineal y no lineal,

$$\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{H}}_0 + \hat{\mathbb{H}}_I, \quad (4.3.8)$$

dónde $\hat{\mathbb{H}}_I$, que es la parte de la interacción no lineal, dado por la Ecuación 4.3.7. Si se sustituye la expresión del desplazamiento eléctrico de la Ecuación 4.3.1b, y utilizando la expresión de la polarización de la Ecuación 4.3.6, se llega a una expresión para el Hamiltoniano que dependerá de las formas vectoriales del campo eléctrico. No obstante, se buscó la forma de escribirlo en términos de los campos escalares para facilitar los cálculos que se harán posteriormente, con ello se llega a la siguiente expresión [44]

$$\hat{\mathbb{H}}_I = \frac{1}{2} \int_V \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} dt' dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') \hat{E}_p(\vec{r}, t) \hat{E}_s(\vec{r}, t - t') \hat{E}_i(\vec{r}, t - t''), \quad (4.3.9)$$

dónde V es el volumen de cuantización, es decir, el volumen hipotético dado por las fronteras que contienen a los modos del campo electromagnético (véase el Capítulo 3) y los subíndices p , s e i , hacen referencia a los campos del haz del *pump* y de los fotones *signal* e *idler*

respectivamente. Esta expresión puede ser obtenida tomando en consideración solo el segundo término de la Ecuación 4.3.6, debido a que, los efectos no lineales del material son de segundo orden y si se llegaran a considerar los demás términos se tendrían expresiones que describirían a tres o más fotones, dependiendo de la naturaleza no lineal del cristal, cambiando el grado del tensor de susceptibilidad eléctrica.

Dentro de la teoría cuántica, el operador Hamiltoniano debe ser descrito en términos de los operadores del campo eléctrico, tal y como se desarrolló en el Capítulo 3. Por lo que es necesario introducir los operadores del campo eléctrico para el haz *signal* y para los fotones correspondientes a *pump* e *idler*. No obstante, a pesar de que el operador del campo eléctrico de la Ecuación 3.2.12 puede utilizarse de la manera en la que fue escrito, este puede modificarse con la finalidad de facilitar los cálculos que serán hechos de aquí en adelante, por lo tanto el operador del campo queda de la siguiente manera:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, s} \vec{e}_{\vec{k}, s} \left[l_{\omega} \hat{a}_{\vec{k}, s} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) + l_{\omega}^* \hat{a}_{\vec{k}, s}^{\dagger} \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \right], \quad (4.3.10)$$

dónde \vec{k} es el vector de onda dentro del cristal, s es la polarización del campo, $\hat{a}_{\vec{k}, s}^{\dagger}$ y $\hat{a}_{\vec{k}, s}$ son los operadores de creación y aniquilación respectivamente, $\vec{e}_{\vec{k}, s}$ es el vector de polarización unitario, ω es la frecuencia y $l(\omega)$ está dado por

$$l(\omega) = i \left[\frac{\hbar \omega(\vec{k}, s)}{2\epsilon_0 n^2(\vec{k}, s)} \right]^{1/2}, \quad (4.3.11)$$

con $n(\vec{k}, s)$ siendo el índice de refracción del medio no lineal. Este operador también puede escribirse en términos de su parte positiva y negativa de su frecuencia

$$\hat{E}_j(\vec{r}, t) = \hat{E}_j^+(\vec{r}, t) + \hat{E}_j^-(\vec{r}, t), \quad (4.3.12)$$

aquí el subíndice j puede ser s , p o i . Si se sustituye la Ecuación 4.3.12 en 4.3.9, es fácil ver que saldrán en total ocho términos. Estos términos corresponden a todos los posibles procesos que pueden ocurrir dentro del cristal, ya sea la generación por suma de frecuencias, generación por diferencia de frecuencias, rectificación óptica, etc, dónde cada uno tiene su propia probabilidad de ocurrencia [4]. No obstante, dado que solo se comienza con un haz incidente, y, en un principio, no se tienen fotones para los campos del *signal* e *idler*, entonces

solo hay cabida para los términos que conservan energía² y estos son dónde los fotones del haz *pump* son aniquilados y los fotones gemelos son creados, *i.e.*, la generación por diferencia de frecuencias. Con estas consideraciones el Hamiltoniano de interacción, puede ser finalmente escrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{H}}_I &= \frac{1}{\sqrt{3/2}} \sum_{\vec{k}_s, s_s} \sum_{\vec{k}_i, s_i} \sum_{\vec{k}_p, s_p} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l(\omega_p) \hat{a}_{\vec{k}_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_i, s_i}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_p, s_p} \\ &\times \exp [i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t] [\tilde{\chi}_{i,j,k}^{(2)}(\vec{e}_{\vec{k}_p, s_p})_i (\vec{e}_{\vec{k}_s, s_s})_j^* (\vec{e}_{\vec{k}_i, s_i})_k^*] \\ &\times \int_V d\vec{r} \exp(-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}) + c.H. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

dónde s, i, p denotan los campos *signal*, *idler*, *pump* respectivamente y $c.H.$ el conjugado Hermitiano, mientras que el término $\tilde{\chi}_{i,j,k}^{(2)}$ se define como,

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{i,j,k}^{(2)} &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') [\exp(-i(\omega_s t' + \omega_i t'')) \\ &+ \exp(-i(\omega_p t' - \omega_i t'')) + \exp(-i(\omega_p t' - \omega_s t''))]. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

4.4. Estado cuántico de los fotones gemelos después de la salida del cristal

Por lo general, en cada sistema cuántico, lo que se desea obtener es la evolución del objeto de estudio (que en este caso es el estado cuántico de los fotones gemelos), a un tiempo posterior a su generación. Para ello se emplea el operador de evolución temporal. Este operador permite evolucionar el estado del sistema a través del tiempo desde el estado base. En este caso, el estado base, es llamado estado de vacío, denotado por el estado $|vac\rangle = |\Psi(0)\rangle$, y es llamado de esta forma porque, físicamente, el estado de vacío es cuando no existe ningún fotón.

El estado cuántico del bifotón en un tiempo posterior a su generación se representa de la siguiente manera,

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathbb{U}}(t, 0) |\Psi(0)\rangle = \hat{\mathbb{U}}(t, 0) |vac\rangle, \quad (4.4.1)$$

²De hecho, la generación de segundo armónico también conserva energía, pues es el proceso dónde dos haces entran al cristal y resulta en un solo fotón con el doble de frecuencia original, sin embargo, este proceso no se tomó en cuenta debido a que en el arreglo experimental solo incide un haz dentro del cristal no lineal.

dónde el operador de evolución temporal está dado por,

$$\hat{U}(t, 0) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{\mathbb{H}}_I(t')\right) = \mathbb{I} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{\mathbb{H}}_I(t') + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{\mathbb{H}}_I(t')\right)^2 + \dots \quad (4.4.2)$$

que puede ser expandido en serie de Taylor, dónde el primer término denota la identidad, el segundo término describe la generación de un par de fotones, el tercero la creación de cuatro fotones y así sucesivamente. En este caso, solo se considerarán los primeros dos términos, debido a la potencia del láser, pues a mayor potencia, mayor será el número de fotones generados. Para conocer el operador de evolución temporal, lo primero es determinar el Hamiltoniano de interacción, con ello, la integral sobre el volumen de la expresión 4.3.13 se puede resolver utilizando identidad de Euler

$$\exp(-ix) = \cos(x) - i \sin(x), \quad (4.4.3)$$

y las identidades trigonométricas

$$2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos(x), \quad (4.4.4a)$$

$$\sin(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad (4.4.4b)$$

para así poder llegar al siguiente resultado

$$\int_V d\vec{r} \exp(-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}) = \prod_{m=1}^3 \left(l_m \text{sinc}((\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m l_m / 2) \right) \times \exp(i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}_0), \quad (4.4.5)$$

dónde la función *sinc* está definida como: $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Con ello, se puede proseguir para resolver el segundo término del operador de evolución temporal 4.4.2, sin embargo, si se analiza este Hamiltoniano, el único término que depende del tiempo es $\exp(i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t)$, por lo que los demás términos permanecen constantes, de esta forma, el resultado sería el

siguiente

$$\begin{aligned}
\int_0^t dt' \mathbb{H}_I(t') &= \frac{1}{V^{3/2}} \sum_{\vec{k}_s, s_s} \sum_{\vec{k}_i, s_i} \sum_{\vec{k}_p, s_p} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l(\omega_p) \hat{a}_{\vec{k}_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_i, s_i}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_p, s_p} \\
&\times \exp(i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2) \text{sinc}((\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2) \\
&\times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\vec{e}_{\vec{k}_p, s_p})_i (\vec{e}_{\vec{k}_s, s_s})_j^* (\vec{e}_{\vec{k}_i, s_i})_k^*] \\
&\times \prod_{m=1}^3 \left(l_m \text{sinc}((\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m l_m / 2) \right) \exp(i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}_0) + c.H.
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Esta es una expresión generalizada, sin embargo, en este escrito se trabajará con aproximaciones físicas ligadas a argumentos que se puedan llevar a cabo dentro de un laboratorio, por lo que se pueden hacer una serie de asunciones que permitirán que la ecuación anterior 4.4.6 se pueda reducir considerablemente. Cabe mencionar, que todas y cada una de las aproximaciones deben cumplirse, ya que, de no hacerlo, el resultado al que se llegará mas adelante no será válido. Estas aproximaciones serán listadas a continuación:

1. Si bien es cierto que el caso monomodal es sencillo de analizar, y en muchas ocasiones es válido trabajarlo de esa manera, en este caso es necesario hacer un tratamiento multimodal, es decir que se tomarán en cuenta todos los modos inmediatamente después de salir del cristal, esto es debido a que, el área de estudio en este caso es la correlación espacial transversal, como ya se ha mencionado en reiteradas ocasiones. El haz *pump* y los fotones *signal* e *idler*, se pueden aproximar a haces monocromáticos con una polarización bien definida. Se hace de esta forma porque, dentro de un laboratorio, es normal que las fuentes de luz de alta potencia sean cuasi-monocromáticas. Además, se pueden colocar filtros de ancho de banda estrecha justo antes de los dos detectores para que los fotones incidentes tengan la misma frecuencia. En cuanto a la polarización, se considera que, tanto el haz *pump*, como los fotones resultantes, al tener una polarización bien definida, las sumas sobre s_j pueden ser omitidas. De esta manera, analizando la Ecuación 4.4.6, se puede ver que, como existe la conservación de energía dado por

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \tag{4.4.7}$$

entonces³,

$$\lim_{\omega_s + \omega_i - \omega_p \rightarrow 0} [\exp(i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2) \text{sinc}((\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2)] = 1. \quad (4.4.8)$$

2. Debido a que el haz *pump* tiene una alta potencia, este puede ser tratado de forma clásica, con ello, el operador de aniquilación $\hat{a}_{\vec{k},s}$, puede ser sustituido por una amplitud para un haz coherente $v(\vec{k}_p)$. También, se tomará en cuenta que el cristal este centrado en el origen del sistema coordenado tal que $r_0 = 0$ y que la dirección de propagación del haz *pump* será en z ⁴, con esto último,

$$\begin{aligned} & \prod_{m=1}^3 \left(l_m \text{sinc}((\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m l_m / 2) \right) \exp(i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}_0) \\ & \longrightarrow \text{sinc}((k_{sz} + k_{iz} - k_{pz})z/2). \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

3. Otra de las características que se tomarán en cuenta es, la aproximación paraxial [45], ya que los campos del haz *pump* y los fotones *signal* e *idler* solo se observan cerca del eje z , de forma que la componente transversal del vector de onda de cada campo sean mucho menor en magnitud que su mismo vector de propagación, tal que, $|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$, dónde $\vec{q} \equiv (k_x, k_y)$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{sinc}((k_{sz} + k_{iz} - k_{pz})z/2) &= \text{sinc} \left(\left(\sqrt{k_s^2 - q_s^2} + \sqrt{k_i^2 - q_i^2} - \sqrt{k_p^2 - (q_s + q_i)^2} \right) z/2 \right) \\ &= \text{sinc}((k_s + k_i - k_p)z/2), \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

pero como

$$k_p = k_s + k_i, \quad (4.4.11)$$

entonces,

$$\lim_{k_s + k_i - k_p \rightarrow 0} \text{sinc}((k_s + k_i - k_p)z/2) = 1. \quad (4.4.12)$$

³La t que multiplica a la función sinc, será omitida, ya que es una constante, y de hecho, todas las constantes que aparecerán en estos cálculos serán reducidos a una sola.

⁴Si bien cierto que la dirección de propagación del haz *pump* puede ser arbitrario, se escoge la propagación en el eje z ya que, esto facilita muchos cálculos.

Lo que también implica que los índices de refracción $n(k_p)$, $n(k_s)$ y $n(k_i)$ sean constantes [45], por lo que la expresión para $l(\omega_{s,i,p})$ (véase la expresión 4.3.11), que depende directamente de estos índices de refracción, es constante.

4. De igual forma, las sumas sobre \vec{k} se pueden aproximar como

$$\sum_{\vec{k}} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}, \quad (4.4.13)$$

debido a que, el cristal tiene un grosor mucho más grande que las longitudes de onda de cada fotón, por lo que la suma sobre los vectores de onda es infinitesimal.

5. Finalmente, la aproximación más importante, es que el grosor del cristal que se utiliza en el proceso de la *SPDC* es muy delgado, llegando a ser de la orden de milímetros, lo que permite asegurar que la distancia recorrida dentro del cristal sea mucho más pequeña que la magnitud de las componentes transversales de los dos fotones *signal* e *idler*, *i.e.* $z \ll |\vec{q}_s|$ y $z \ll |\vec{q}_i|$. Esta aproximación permite que el proceso de la obtención de fotones únicos sea posible, pues está directamente relacionada con la conservación de momento. Si el grosor no cumple con esta condición, no se podrían obtener los fotones gemelos.

Con lo descrito anteriormente, la expresión de la integral del Hamiltoniano de la Ecuación 4.4.6, llega a tener la siguiente forma:

$$\int_0^t dt' \hat{\mathbb{H}}_I(t') = \eta \int_{\Omega} d\vec{q}_s \int_{\Omega} d\vec{q}_i v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) \hat{a}_{\vec{k},s}^{\dagger}(\vec{q}_s) \hat{a}_{\vec{k},s}^{\dagger}(\vec{q}_i) + c.H. \quad (4.4.14)$$

dónde Ω es la región de integración, η son todas las constantes obtenidas en el cálculo, la cual normaliza la expresión y $v(\vec{q}_p) \propto v(\vec{q}_s + \vec{q}_i)$ (por conservación de energía) describe el espectro angular del haz *pump* en la fase de salida del cristal *i.e.* en $z = 0$ (se hará un análisis más detallado de esta parte en la siguiente sección).

Finalmente, sustituyendo la expresión de la Ecuación 4.4.14, en la Ecuación de la evolución temporal 4.4.2 y este a su vez en el estado de la Ecuación 4.4.1, se tiene como resultado

$$|\Psi_1\rangle = |vac\rangle + \eta \int_{\Omega} d\vec{q}_s \int_{\Omega} d\vec{q}_i v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) |1\vec{q}_s\rangle |1\vec{q}_i\rangle, \quad (4.4.15)$$

dónde $|\vec{q}_s\rangle |\vec{q}_i\rangle$ son los estados que representan la existencia de un fotón para *signal* e *idler* respectivamente con vectores de onda transversal \vec{q}_s y \vec{q}_i . Lo que describe este estado cuántico, es la generación del bifotón después de la interacción con el cristal no lineal y dónde este describe al bifotón tanto en el plano de salida del cristal, así como, después de haber recorrido alguna distancia en el espacio libre. Dado este estado, ahora, lo que se pretende es encontrar la forma del espectro angular del haz *pump* para poder tener la forma completa de este estado cuántico. Sabiendo que la expresión del espectro angular del haz *pump* se pudo escribir en términos de q_s y q_i , implica que, éste es transferido al estado del bifotón, es decir, que la información del haz *pump* es transferida a los dos fotones generados, y en consecuencia, surge la correlación transversal entre los fotones gemelos.

Después de encontrar la expresión general para el estado en la fase de salida del cristal, lo que se desea saber ahora, es la expresión que describa el estado de estos dos fotones cuando se propagan por el espacio libre, ya que en el arreglo que se está estudiando, inmediatamente después de la salida del bifotón del cristal, este se propaga por un espacio sin fuentes ni corrientes antes de llegar a interactuar con un elemento óptico lineal, como se aprecia en la Figura 4.2.

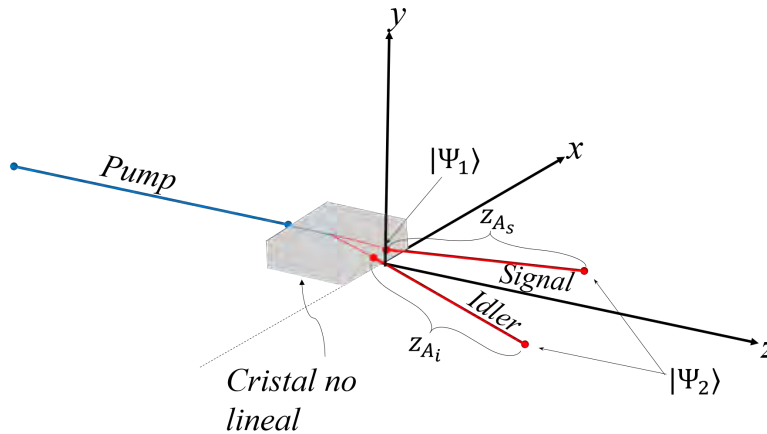


Figura 4.2: El haz *pump* incide sobre un cristal no lineal y bajo el proceso de la *SPDC* se genera un par de fotones, *signal* e *idler*. En la fase de salida del cristal se encuentra el estado $|\Psi_1\rangle$. Después recorren una distancia z_{A_s} y z_{A_i} respectivamente, dónde el estado en este punto está dado por $|\Psi_2\rangle$.

4.4.1. Cálculo del espectro angular del *pump* transmitido al bifotón

Para esta parte, se hará uso de la óptica de Fourier, que es la propagación del espectro angular de un campo, lo que implica expandir este campo de ondas complejas en la suma de un número infinito de ondas planas [46]. Esta herramienta nos sirve para describir campos ópticos en un medio homogéneo, dónde estos campos son descritos como una superposición de ondas planas y evanescentes, y que de hecho, en el límite paraxial, la representación del espectro angular se vuelve idéntico a la óptica de Fourier. Y como estamos dentro del límite paraxial, dado por las aproximaciones antes mencionadas, entonces, es válido trabajar bajo este formalismo sin ningún problema.

Sea $U(\vec{r}, t)$ un campo eléctrico monocromático, escalar, con una dependencia temporal armónica bien definida,

$$U(\vec{r}, t) = u(\vec{r})\exp(-i\omega t), \quad (4.4.16)$$

éste se propagará en un medio lineal, isotrópico y homogéneo. Sustituyendo este campo en la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \nabla^2 U = 0, \quad (4.4.17)$$

y haciendo los debidos cálculos se llega a la siguiente ecuación diferencial,

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0, \quad (4.4.18)$$

conocida como la ecuación de Helmholtz [36], con $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ dónde μ y ϵ son la permeabilidad y permisividad relativa del medio. Sin embargo, la distribución a través de un plano z constante se puede escribir en los siguientes términos

$$u(\vec{r}) \equiv W(\vec{\rho}, z), \quad (4.4.19)$$

dónde $\vec{\rho}$ son las componentes transversales de la posición, *i.e.* (x, y) . Esta expresión, a su vez puede ser descompuesto en sus componentes espaciales

$$W(\vec{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\vec{q} v(\vec{q}, z) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{q}), \quad (4.4.20)$$

que es la transformada de Fourier, con \vec{p} la componente transversal del momento y \vec{q} la componente transversal del vector de onda. Tomando la transformada inversa se tiene justamente

el espectro angular del campo

$$v(\vec{q}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\vec{p} W(\vec{\rho}, z) \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{q}). \quad (4.4.21)$$

Entonces $W(\vec{\rho}, z)$ dado por la Ecuación 4.4.20 debe satisfacer la ecuación de Helmholtz, de forma que⁵

$$\frac{d^2}{dz^2} v(\vec{q}, z) + (k^2 - q^2) v(\vec{q}, z) = 0, \quad (4.4.22)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, que se puede resolver por polinomio característico, teniendo como resultado

$$v(\vec{q}, z) = v(\vec{q}, 0) \exp(\pm i(k^2 - q^2)z); \quad (4.4.23)$$

sustituyendo esta expresión en la Ecuación 4.4.15, se llega al siguiente estado

$$|\Psi_2\rangle = |vac\rangle + \eta \int_{\Omega} d\vec{q}_s \int_{\Omega} d\vec{q}_i v(\vec{q}_j, 0) \exp(\pm i(k^2 - q^2)z) |1\vec{q}_s\rangle |1\vec{q}_i\rangle, \quad (4.4.24)$$

dónde $j = s, i$. Lo que nos dice este resultado es que, este es el estado del bifotón después de desplazarse por un medio lineal sin fuentes ni corrientes una distancia z después de haber salido por el cristal. Entonces, en la fase de salida del cristal cuando $z = 0$, el estado está dado por

$$|\Psi_1\rangle = |vac\rangle + \eta \int_{\Omega} d\vec{q}_s \int_{\Omega} d\vec{q}_i v(\vec{q}_j, 0) |1\vec{q}_s\rangle |1\vec{q}_i\rangle, \quad (4.4.25)$$

representado, de igual forma, en la Figura 4.2

4.4.2. Transmisión del bifotón a través de objetos ópticos lineales

Consideremos un objeto óptico dónde, la relación entre los campos de entrada y de salida sean tal que, la suma de los campos de entrada sea igual a la suma de los campos de salida. Ahora, supongamos que se introduce un campo a través de este sistema, y que, además, se propaga en el eje z , lo que se obtendrá será una relación de proporcionalidad entre ambos

⁵Aquí se omite el símbolo de la integral, ya que como se había visto en un caso parecido, la derivada de la integral, es la integral de las derivadas

campos, dónde la proporcionalidad viene dada por la función de transmisión, dado por

$$W_{trans}(\vec{\rho}, z) = t(\vec{\rho})W_{inc}(\vec{\rho}, z), \quad (4.4.26)$$

dónde $t(\vec{\rho})$ es el coeficiente de transmisión. Si tomamos la transformada de Fourier de ambos lados, y además, se hace uso del teorema de convolución se tiene que

$$v_{trans}(\vec{q}, z) = v_{inc}(\vec{q}, z) \star T(\vec{q}). \quad (4.4.27)$$

Ahora consideremos el arreglo experimental mostrado en la Figura 4.3, dónde un haz (*pump*) incide en el cristal no lineal, e inmediatamente después de atravesarlo, los dos fotones generados tienen un estado $|\Psi_1\rangle$, estos fotones se propagarán en un espacio libre una distancia z_{A_s} y z_{A_i} , respectivamente, para luego interactuar con un sistema óptico lineal cuyo estado, después de pasar por este elemento, está dado por $|\Psi_3\rangle$. Esta ilustración permite entender el objetivo de este capítulo, pues es el estado $|\Psi_3\rangle$ el que va a describir la parte de interés de este trabajo.

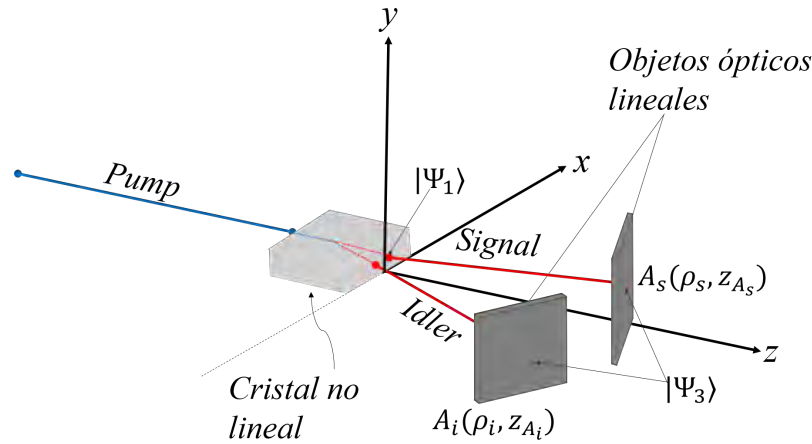


Figura 4.3: El haz *pump* incide sobre un cristal no lineal y bajo el proceso de la SPDC se genera un par de fotones, *signal* e *idler* que recorren una distancia z_{A_s} y z_{A_i} respectivamente. Después pasan a través de objetos ópticos lineales arbitrarios, A_s y A_i , cuyo estado está dado por $|\Psi_3\rangle$.

El estado $|\Psi_1\rangle$ fue obtenido en la Sección 4.4 y está dado por la expresión 4.4.25. En cuanto a la obtención del estado $|\Psi_3\rangle$, se puede decir que el término del vacío se cancela

debido a la fotodetección en coincidencia [44, 47]. Con ello, el estado se puede escribir de la siguiente manera:

$$|\Psi_3\rangle = \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_i F(\vec{q}_s, \vec{q}_i) |1\vec{q}_s\rangle |1\vec{q}_i\rangle, \quad (4.4.28)$$

dónde $F(\vec{q}_s, \vec{q}_i)$ es la amplitud del bifotón después de pasar por dicho elemento óptico. Anteriormente se vio que la amplitud del bifotón, justo después de salir del cristal, cuando $z = 0$, estaba dado por el espectro angular transferido por el haz incidente. En este caso, el cálculo de $F(\vec{q}_s, \vec{q}_i)$ será hecho de forma similar y este describirá el espectro angular propagado hasta la salida de los elemento ópticos. La razón por la cual el análisis será hecho de igual manera (por medio de Transformadas de Fourier), es porque, en la Sección 4.4.1, se hizo la aproximación de que el haz *pump* y los fotones *signal* e *idler* son considerados cuasi-monocromáticos (la justificación se puede encontrar en dicha sección).

Entonces, el espectro angular, en un plano dado z_s para *signal* y z_i para *idler* es:

$$V(\vec{q}_s, \vec{q}_i; z_s, z_i) = \mathcal{T}_2[W(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i; z_s, z_i)], \quad (4.4.29)$$

dónde, \mathcal{T}_2 es la transformada de Fourier en dos variables, $\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i$ son los vectores de posición \vec{r}_s, \vec{r}_i respectivamente, y W es el perfil transversal del campo del haz *pump* transferido por el espectro angular para el estado del bifotón. Si, a la expresión anterior se le aplica la transformada inversa por ambos lados, se tendrá la expresión para $W(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i; z_s, z_i)$ que, de igual forma, satisface la ecuación de Helmholtz, y que, además, al sustituirla, se reduce a una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2}{dz_j^2} v(\vec{q}_s, \vec{q}_i; z_s, z_i) + (k_j^2 - q_j^2)^{1/2} v(\vec{q}_s, \vec{q}_i; z_s, z_i) = 0, \quad (4.4.30)$$

cuya solución también es fácil de obtener, siendo esta

$$v(\vec{q}_s, \vec{q}_i; z_{A_s}, z_{A_i}) = v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) \exp(ik_{z_i} z_i) \exp(ik_{z_s} z_s). \quad (4.4.31)$$

Ahora, para los fotones gemelos, el perfil transversal transmitido puede ser escrito en términos del perfil transversal incidente multiplicado por las funciones de transmisión respectivos, así como el que se expresó en la Ecuación 4.4.26, y cuya expresión está dada por

$$W_{trans}(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i; z_{A_s}, z_{A_i}) = A_s(\vec{\rho}_s) A_i(\vec{\rho}_i) W_{inc}(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i; z_{A_s}, z_{A_i}), \quad (4.4.32)$$

si a este se le aplica la transformada de Fourier de ambos lados, utilizando el teorema de convolución y la aproximación paraxial $\left(k_z = k - \frac{q^2}{2k}\right)$ se tiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2[W_{trans}(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i; z_{A_s}, z_{A_i})] &= \mathcal{T}_1[A_s(\vec{\rho}_s)]\mathcal{T}_1[A_i(\vec{\rho}_i)] \star v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) \\ &\times \exp\left(i\left(k_s - \frac{q_s^2}{2k_s}\right)z_s\right) \\ &\times \exp\left(i\left(k_i - \frac{q_i^2}{2k_i}\right)z_i\right); \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

pero, $F(\vec{q}_s, \vec{q}_i)$ se puede reescribir de la siguiente manera ⁶

$$F(\vec{q}_s, \vec{q}_i) = \mathcal{T}_2[A_s(\vec{\rho}_s)A_i(\vec{\rho}_i)G(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i)], \quad (4.4.34)$$

dónde

$$\begin{aligned} G(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i) &= \mathcal{T}_2^{-1}\left[v(\vec{q}_s + \vec{q}_i)\exp\left[i\left(k_s - \frac{q_s^2}{2k_s}\right)z_s\right]\exp\left(i\left(k_i - \frac{q_i^2}{2k_i}\right)z_i\right)\right] \\ &= \mathcal{T}_2^{-1}\left[v(\vec{q}_s + \vec{q}_i)\right] \star \mathcal{T}_2^{-1}\left[\exp\left(i\left(k_s - \frac{q_s^2}{2k_s}\right)z_s\right)\exp\left(i\left(k_i - \frac{q_i^2}{2k_i}\right)z_i\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

Para resolver la segunda transformada inversa de Fourier de la expresión anterior 4.4.35, lo que se utiliza es la propiedad de traslación de la transformada, dado por

$$\mathcal{T}[f(x+a)] = \mathcal{T}[f(x)]\exp(ika), \quad (4.4.36)$$

de esa manera, la integral de la transformada se le puede dar la forma de una integral Gaussiana, y después de hacer manipulaciones algebraicas, se llega al resultado

$$G(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i) \propto \int d\xi W(\xi)\exp\left(i\left(\frac{k_s}{2z_{A_s}}|\vec{\rho}_s - \xi|^2 + \frac{k_i}{2z_{A_i}}|\vec{\rho}_i - \xi|^2\right)\right). \quad (4.4.37)$$

Para simplificar aún más lo anterior se va a seguir el mismo procedimiento hecho por

⁶Utilizando el hecho de que $\mathcal{T}_2[\mathcal{T}_2^{-1}[F]] = F$

Monken, Ribeiro y Pádula [45, 47], haciendo uso de las siguientes relaciones:

$$\frac{k}{z_A} \equiv \frac{k_s}{z_{A_s}} + \frac{k_i}{z_{A_i}} \quad (4.4.38)$$

y de

$$\mu_j \equiv \frac{k}{z_A} \frac{z_{A_j}}{k_j} \longrightarrow \frac{k_j}{z_{A_j}} = \frac{k}{\mu_j z_A}, \quad (4.4.39)$$

dónde, utilizando las dos ecuaciones anteriores se puede demostrar que

$$\frac{1}{\mu_s} + \frac{1}{\mu_i} = 1, \quad (4.4.40)$$

y haciendo uso de estas últimas relaciones en la Ecuación 4.4.37, se puede llegar a demostrar que $G(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i)$ se reescribe de la siguiente manera

$$G(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i) \propto \exp\left(i \frac{k}{2z_A} \frac{|\vec{\rho}_s - \vec{\rho}_i|^2}{\mu_s \mu_i}\right) W\left(\frac{\vec{\rho}_s}{\mu_s} + \frac{\vec{\rho}_i}{\mu_i}; z_A\right). \quad (4.4.41)$$

Finalmente, se sustituye en 4.4.34, y poder reescribir la amplitud de la siguiente forma

$$\begin{aligned} F(\vec{q}_s, \vec{q}_i) = & \gamma \int d\vec{\rho}_s \int d\vec{\rho}_i A_s(\vec{\rho}_s) A_i(\vec{\rho}_i) \exp\left(i \frac{k}{2z_A} \frac{|\vec{\rho}_s - \vec{\rho}_i|^2}{\mu_s \mu_i}\right) \\ & \times W\left(\frac{\vec{\rho}_s}{\mu_s} + \frac{\vec{\rho}_i}{\mu_i}; z_A\right) \exp(-i(\vec{q}_s \cdot \vec{p}_s + \vec{q}_i \cdot \vec{p}_i)), \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

y dónde γ es una constante de normalización en el que se encuentran todas las constantes del cálculo. Es esta la amplitud que aparece en la Ecuación 4.4.28, pudiendo así reescribirlo como:

$$\begin{aligned} |\Psi_3\rangle = & \gamma \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_i \int d\vec{\rho}_s \int d\vec{\rho}_i A_s(\vec{\rho}_s) A_i(\vec{\rho}_i) \exp\left(i \frac{k}{2z_A} \frac{|\vec{\rho}_s - \vec{\rho}_i|^2}{\mu_s \mu_i}\right) \\ & \times W\left(\frac{\vec{\rho}_s}{\mu_s} + \frac{\vec{\rho}_i}{\mu_i}; z_A\right) \exp(-i(\vec{q}_s \cdot \vec{p}_s + \vec{q}_i \cdot \vec{p}_i)) |1\vec{q}_s\rangle |1\vec{q}_i\rangle. \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

Físicamente, lo que representa este estado, es que dada la función de transmisión del elemento óptico en cuestión, de la distancia recorrida de los fotones gemelos desde la fase de salida del cristal hasta donde se encuentra el elemento óptico, así como del perfil transversal

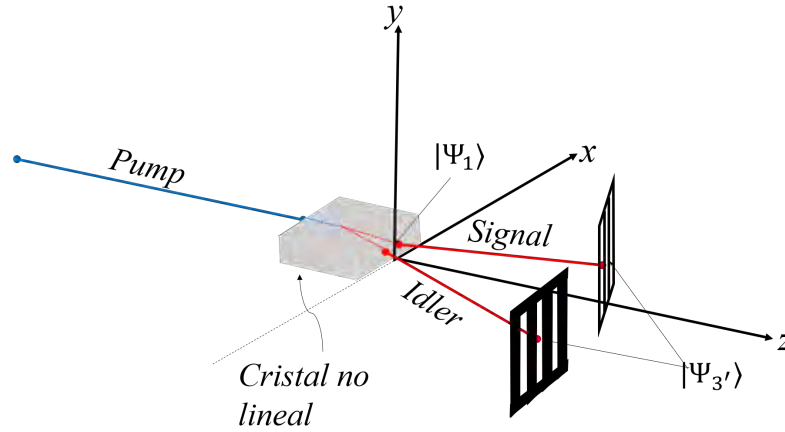


Figura 4.4: El haz *pump* incide sobre un cristal no lineal y bajo el proceso de la SPDC se genera un par de fotones, *signal* e *idler* que recorren una distancia z_{A_s} y z_{A_i} respectivamente. Después pasan a través de una rendija con N -aperturas, A_s y A_i , y cuyo estado está dado por $|\Psi_{3'}\rangle$

del láser en el plano z_A , lo que se obtienen son los dos fotones, *signal* e *idler* que salen de este objeto óptico, con \vec{q}_s y \vec{q}_i siendo la componente transversal del vector de onda de los fotones.

4.4.3. Cálculo del estado de fotones gemelos después de una rendija con N aperturas

Tomemos en cuenta la Figura 4.4, nótese ahora que, el objeto óptico con el que interactuarán los fotones es una rendija con N aperturas siendo $N \geq 2$. Estas aperturas son idénticas para los fotones de *signal* e *idler*, lo que implica que las rendijas tienen las mismas dimensiones y están separadas a la misma distancia centro a centro. De igual forma que en la Sección 4.4, se harán otra serie de asunciones que permitirán que el problema se aproxime a la realidad y este se reduzca en dificultad. Primeramente, se tomará en cuenta el caso degenerado, es decir, que la magnitud de los vectores de onda de cada uno de los fotones sean iguales, tal que $k_s = k_i = k/2$. Esto se puede lograr a través de, por ejemplo, un filtro Gaussiano [48]. Este filtro es de suma importancia, ya que, en un principio, se hizo la aproximación de que tanto el haz *pump* como los fotones *signal* e *idler* son cuasi-monocromáticos, por lo que es necesario el uso de este. Por ejemplo, Neves et.al. de hecho, utilizaron un filtro Gaussiano de $5,0nm$ de ancho de banda [47]. Las N -rendijas estarán a la misma distancia del cristal, de esta forma,

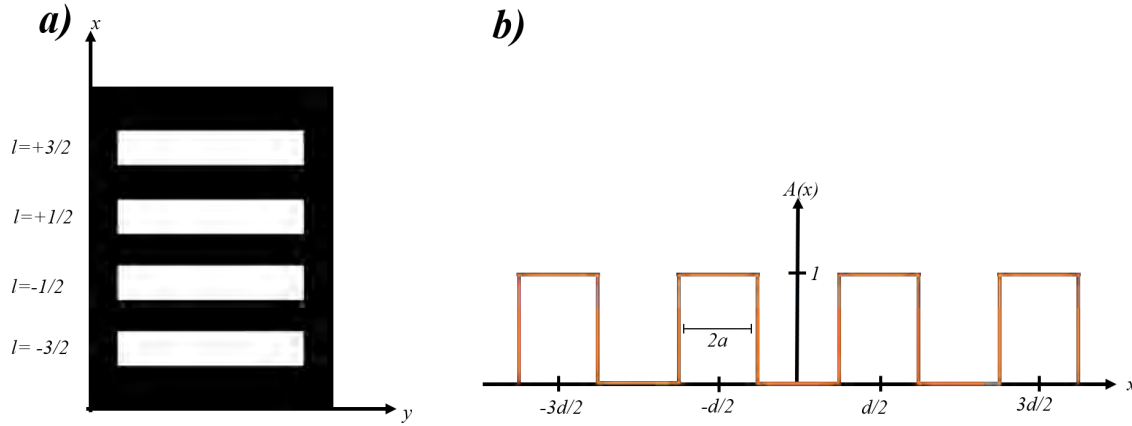


Figura 4.5: a) La función de transmisión de una rendija con 4 aperturas está dada por la función rectángulo. b) Cada una de las aperturas de la rendija dadas por l están en semienteros. Dónde el largo de cada una de ellas está sobre el eje y .

el camino libre recorrido por los dos fotones sería la misma. La razón por la cual se colocan las rendijas a la misma distancia, es porque de esta forma, los cálculos que serán realizados a continuación se reducirán considerablemente. Finalmente, la dimensión de la rendija en y será mucho más grande que en x por lo que las ecuaciones se reducirían al caso de una sola dimensión. Con estas aproximaciones, estado de la Ecuación 4.4.28 se reescribe como

$$|\Psi_{3'}\rangle = \int dq_s \int dq_i F(q_s, q_i) |1q_s\rangle |q_i\rangle, \quad (4.4.44)$$

siendo la amplitud del bifotón descrita por la siguiente ecuación,

$$F(q_s, q_i) = \gamma \int dx_s \int dx_i A_s(x_s) A_i(x_i) \exp\left(i \frac{k}{2z_A} \frac{(x_s - x_i)^2}{4}\right) \times W\left(\frac{x_s}{2} + \frac{x_i}{2}; z_A\right) \exp(-i(q_s x_s + q_i x_i)). \quad (4.4.45)$$

La función de transmisión de las N -rendijas está representada gráficamente por la Figura 4.5, y descrita matemáticamente como

$$A(x) = \sum_{l=-l_N}^{l_N} \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right), \quad (4.4.46)$$

dónde $l_N = \frac{N-1}{2}$ que representa a todas las aperturas, $2a$ es el ancho de las rendijas y $\Pi(\xi)$ es la función rectángulo, dada por

$$\Pi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \xi > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.4.47)$$

Haciendo un cambio de variables, de $x_s \rightarrow x_s - ld$ y $x_i \rightarrow x_i - md$, se llega a la siguiente expresión para la amplitud del bifotón

$$\begin{aligned} F(q_s, q_i) = & \gamma \sum_{l=-l_N}^{l_N} \sum_{m=-l_N}^{l_N} \exp(i(q_s l + q_i m)d) \int_{-a}^a dx_s \int_{-a}^a dx_i \\ & \times W\left(\frac{x_s + ld}{2} + \frac{x_i + md}{2}; z_A\right) \\ & \times \exp\left(i\frac{k}{8z_A}((x_s - x_i) + (m - l)d)^2 - i(q_s x_s + q_i x_i)\right), \end{aligned} \quad (4.4.48)$$

dónde a es el largo de las rendijas, y que, además, es un parámetro que puede ser manipulado, por lo tanto, si se apega a condiciones experimentales, se puede realizar una aproximación del término de la ecuación anterior, el cual es

$$\exp\left(i\frac{k}{8z_A}((x_s - x_i) + (m - l)d)^2\right) \approx \exp\left(i\frac{k}{8z_A}(m - l)^2 d^2\right). \quad (4.4.49)$$

Debido a que, la región de integración, en un caso real, es muy pequeña, entonces, se puede considerar que el perfil transversal del haz *pump* es constante en esta región. De esta manera, el perfil W será independiente de las variables de integración, con ello

$$W\left(\frac{x_s + ld}{2} + \frac{x_i + md}{2}; z_A\right) \approx W\left(\frac{(m + l)d}{2}; z_A\right). \quad (4.4.50)$$

Con estas dos aproximaciones, se llega a que la amplitud del bifotón está dada por

$$\begin{aligned} F(q_s, q_i) = & \sum_{l=-l_N}^{l_N} \sum_{m=-l_N}^{l_N} \gamma W\left(\frac{(m + l)d}{2}; z_A\right) \exp\left(i\frac{k}{8z_A}(m - l)^2 d^2\right) \\ & \times \exp(-iq_s ld) \text{sinc}(q_s a) \exp(-iq_i md) \text{sinc}(q_i a), \end{aligned} \quad (4.4.51)$$

y que, sustituyendo en el estado dado en la expresión de la Ecuación 4.4.44, se tiene

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{3'}\rangle &= \sum_{l=l_N}^{l_N} \sum_{m=l_N}^{l_N} \gamma W \left(\frac{(m+l)d}{2}; z_A \right) \exp \left(i \frac{k}{8z_A} (m-l)^2 d^2 \right) \\
 &\quad \times \int dq_s \exp(-iq_s l d) \text{sinc}(q_s a) |1q_s\rangle \\
 &\quad \times \int dq_i \exp(-iq_i m d) \text{sinc}(q_i a) |1q_i\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.4.52}$$

que finalmente, se puede reescribir como

$$|\Psi_{3'}\rangle = \sum_{l=l_N}^{l_N} \sum_{m=l_N}^{l_N} \gamma W \left(\frac{(m+l)d}{2}; z_A \right) \exp \left(i \frac{k}{8z_A} (m-l)^2 d^2 \right) |l\rangle_s \otimes |m\rangle_i \tag{4.4.53}$$

dónde $|l\rangle_s$ y $|m\rangle_i$ son los estados ya normalizados,

$$|l\rangle_s \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_s \exp(-iq_s l d) \text{sinc}(q_s a) |1q_s\rangle, \tag{4.4.54a}$$

$$|m\rangle_i \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_i \exp(-iq_i m d) \text{sinc}(q_i a) |1q_i\rangle. \tag{4.4.54b}$$

El resultado de la Ecuación 4.4.53 nos dice que, este es un estado separable, pues lo que describe es que, cuando un fotón pasa por alguna de las rendijas, el otro puede pasar por cualquiera de las otras así como se aprecia en la Figura 4.6, y este estado representa un estado producto, dado por la Ecuación 4.1.2 y dónde la dimensión del espacio de Hilbert en donde están contenidos estos estados, está dada por N, que es el número de aperturas de la rendija, llegando a generar así qudits. No obstante, se puede llegar a presentar el caso de un estado entrelazado si se toman en cuenta algunas consideraciones.

Ahora, consideremos que para las N-rendijas, $d = 4a^7$, dónde d es la separación centro a centro de las rendijas y también que el perfil transversal del haz *pump* en el plano de las N-rendijas estaría dado por:

$$W \left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A \right) = W_0 \Pi \left(\frac{(l+m)d}{4a} \right). \tag{4.4.55}$$

⁷De forma general se puede escoger cualquier valor de d , siempre y cuando sea mayor a $2a$, ya que, de otra forma, se seguirán obteniendo estados separables.

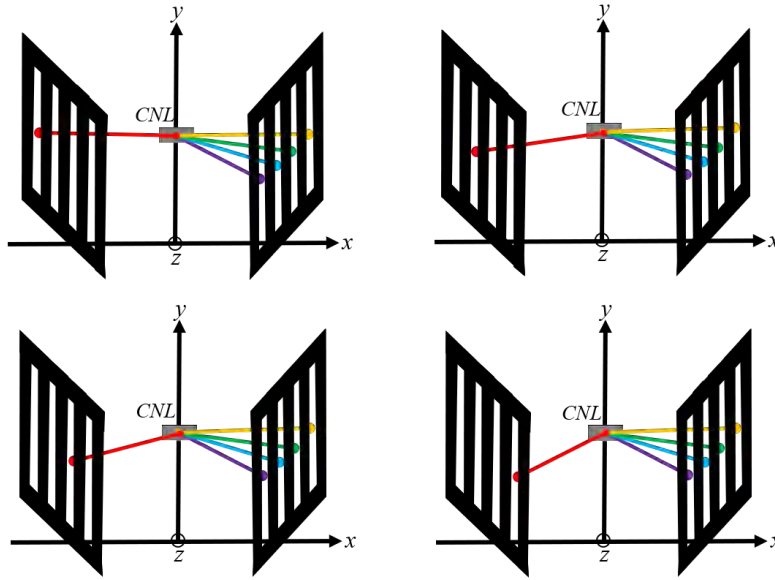


Figura 4.6: Físicamente la representación del estado de la Ecuación 4.4.53 es como se muestra en esta imagen, si un fotón pasa a través de una de las rendijas, entonces el otro fotón pasará a través de cualquiera de las rendijas. CNL denota cristal no lineal. En este caso, los colores son ilustrativos y no representan las longitudes de onda de los fotones

Como se consideró que $d = 4a$ entonces la función rectángulo de la Ecuación 4.4.47, se vería de la siguiente manera:

$$\Pi(l + m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m + l = 0 \\ 0 & \text{si } m + l \neq 0, \end{cases} \quad (4.4.56)$$

que corresponde a la función rectángulo definida anteriormente, ya que m y l son números enteros, por lo que solamente toma el valor de 1 cuándo la suma es igual a cero y cero si la suma es distinta de cero. De la Ecuación 4.4.47, se ve que, $\xi = m + l$ que corresponde a las condiciones de ξ antes planteadas. Experimentalmente, este resultado se puede obtener proyectando la imagen de una rendija de grosor $2a$ hacia el centro del plano de las N -rendijas. Pero otra manera de hacerlo, es colocando una lente que focalice el perfil transversal del haz *pump* en una región de grosor menor a $2a$ en el centro del plano de las N -rendijas (véase la Figura 4.7).

De hecho el perfil transversal del haz de bombeo se puede llegar a expresar como: $W_{lm} \propto$

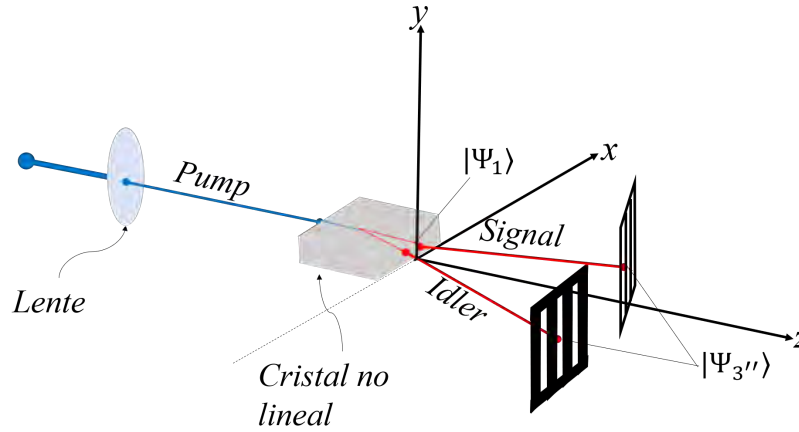


Figura 4.7: El haz *pump* incide sobre una lente, para luego pasar por un cristal no lineal y bajo el proceso de la SPDC se genera un par de fotones, *signal* e *idler* que recorren una distancia z_{A_s} y z_{A_i} respectivamente. Después pasan a través de rendijas con N -aperturas, A_s y A_i , y cuyo estado está dado por $|\Psi_{3''}\rangle$. En este caso, los colores son ilustrativos y no representan las longitudes de onda de los fotones

$\delta_{m,-l}$, por lo tanto, si se sustituye este resultado en el estado de la Ecuación 4.4.53 y solo se toman los casos en que el estado no sea cero, se llega a la siguiente expresión,

$$|\Psi_{3''}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=-l_N}^{l_N} \exp\left(ik \frac{d^2 l^2}{2z_A}\right) |l\rangle_s \otimes |-l\rangle_i. \quad (4.4.57)$$

De este estado se puede leer que el fotón *signal* e *idler* están correlacionados espacialmente, de tal forma que, si se puede detectar que un fotón pasa por una rendija, se tendrá la completa certidumbre que el otro pasará por la rendija simétricamente opuesta y dónde la probabilidad de que pasen por dichas rendijas está dada por $1/N$. Dicho de otra forma, si el fotón *pump*, representado por el color morado en la Figura 4.8, pasa a través de la rendija $l = 3/2$, entonces el fotón *idler* pasará por la rendija $l = -3/2$, y así sucesivamente. A este tipo de estado se le conoce como estado entrelazado y puede ser representado por la Figura 4.8. Como ya se había hablado en la Sección 4.1, matemáticamente, un estado entrelazado es aquel que no puede expresarse como el producto tensorial de dos estados arbitrarios, dado por la Ecuación 4.1.2. Entonces, observando el estado 4.4.57, efectivamente se puede ver que los dos fotones dependen uno del otro, ya que uno no puede describirse sin el otro.

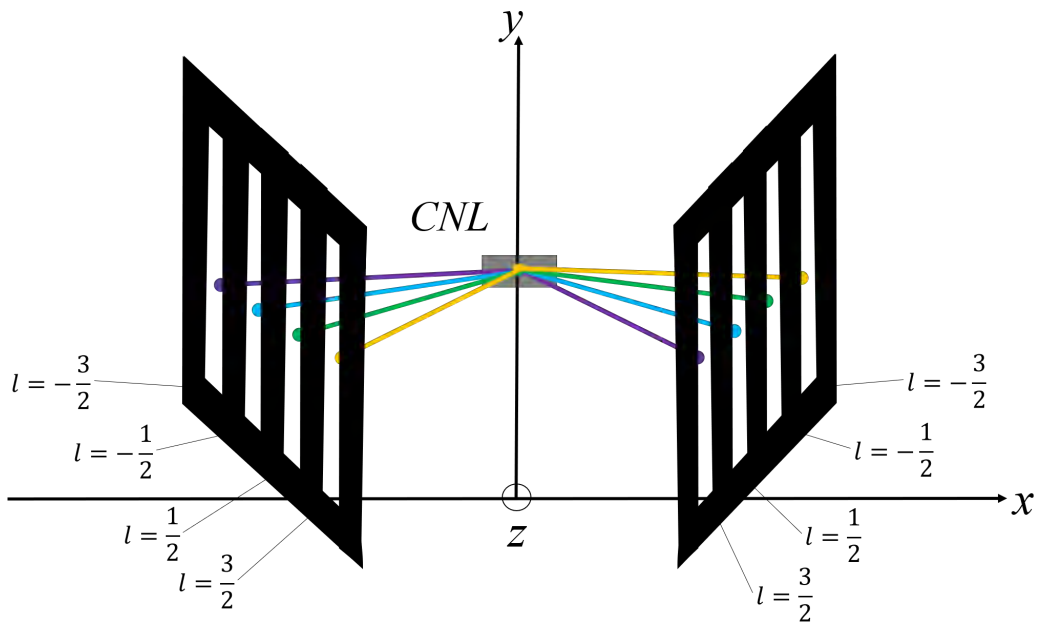


Figura 4.8: Físicamente la representación del estado de la Ecuación 4.4.57 es como se muestra en esta imagen, si un fotón pasa a través de una de las rendijas, entonces el otro fotón pasará automáticamente por la rendija simétricamente opuesta. CNL denota cristal no lineal

Capítulo 5

Conclusiones

Todo el desarrollo que se hizo a lo largo de esta tesis, fue para lo obtención del estado de N-dimensiones entrelazados en el grado de libertad de camino transversal de los fotones gemelos, generados bajo el proceso de la *SPDC*. A partir de la cuantización del campo electromagnético, se utilizó para la descripción del Hamiltoniano de interacción con el cristal. Dado este Hamiltoniano, y después de una serie de aproximaciones, se llegó a la expresión del estado cuántico del bifotón a la salida del cristal. Además, utilizando la óptica de Fourier, se obtuvo el espectro angular transferido del haz *pump* a los fotones gemelos generados, que estaba implícito en este estado. Posteriormente, se analizó el estado cuántico de los fotones gemelos después de atravesar algún objeto óptico lineal arbitrario, que, de igual forma, se utilizó el análisis de la óptica de Fourier. Ya teniendo este estado, y utilizando la función de transmisión de una rendija de N-aberturas, lo que se calculó fue el estado cuántico de estos fotones después de atravesarla, llegando así a obtener un estado producto. No obstante, el hecho de saber que se puede manipular el espectro angular del haz *pump*, y que esto repercute directamente en los fotones *signal* e *idler*, se utilizó a favor, para hacer que el espectro angular del haz entrante sea más estrecho que la separación entre rendijas, y de forma matemática, obtener un estado entrelazado. Con ello, al arreglo experimental se le agregó una lente, para así, obtener experimentalmente un estado entrelazado. Además, al trabajar con una rendija de N-aperturas, entonces estamos bajo un sistema N-dimensional, lo que se traduce en la obtención de qudits.

De esta forma, se concluye este trabajo, con la completa deducción del estado entrelazado de N-dimensiones de fotones gemelos de forma espacial. Es necesario el estudio, tanto

matemático como físico, del fenómeno que engloba el entrelazamiento, ya que las aplicaciones que han sabido utilizar este hecho, han sido de gran ayuda en el desarrollo tecnológico y de procesamiento de la información. De igual forma, la ventaja de la utilización del arreglo experimental, utilizado en este trabajo, es que de aquí se pueden generar qubits, pero también qudits, esto, llegándolo a lograr, simplemente aumentando el número de rendijas que se tienen. El interés por generar qudits en vez de qubits, es porque se ha demostrado que los qudits son más resistentes al ruido que los qubits. Además, es necesario mencionar que, el proceso bajo la *SPDC*, es realmente fácil y barato, a comparación de otros procesos que, de igual forma, generan fotones únicos.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [2] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1:195–200, Nov 1964.
- [3] David J Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition)*. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [4] Mark Fox. *Quantum Optics: An Introduction*. OUP Oxford, 2006.
- [5] Dagomir Kaszlikowski, Piotr Gnaciński, Marek Żukowski, Wiesław Miklaszewski, and Anton Zeilinger. Violations of local realism by two entangledn-dimensional systems are stronger than for two qubits. *Physical Review Letters*, 85(21):4418–4421, Nov 2000.
- [6] T. Durt, D. Kaszlikowski, and M. Żukowski. Violations of local realism with quantum systems described by n-dimensional hilbert spaces up to $n = 16$. *Phys. Rev. A*, 64:024101, Jul 2001.
- [7] Daniel Collins, Nicolas Gisin, Noah Linden, Serge Massar, and Sandu Popescu. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, 88:040404, Jan 2002.
- [8] Yuchen Wang, Zixuan Hu, Barry C. Sanders, and Sabre Kais. Qudits and high-dimensional quantum computing. *Frontiers in Physics*, 8, Nov 2020.
- [9] D Bouwmeester, JW Pan, K Mattle, and et al. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390:575–579, 1997.

-
- [10] Chenyu Zhang, J. F. Chen, Chaohan Cui, Jonathan P. Dowling, Z. Y. Ou, and Tim Byrnes. Quantum teleportation of photonic qudits using linear optics. *Phys. Rev. A*, 100:032330, Sep 2019.
- [11] S. Wiesner. Conjugate coding. *Sigact News*, 15:78–88, 1983.
- [12] Charles H. Bennett and Gilles Brassard. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. *Theoretical Computer Science*, 560:7–11, Dec 2014.
- [13] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum metrology. *Phys. Rev. Lett.*, 96:010401, Jan 2006.
- [14] A. R. Shlyakhov, V. V. Zemlyanov, M. V. Suslov, A. V. Lebedev, G. S. Paraoanu, G. B. Lesovik, and G. Blatter. Quantum metrology with a transmon qutrit. *Phys. Rev. A*, 97:022115, Feb 2018.
- [15] Zixin Huang, Chiara Macchiavello, and Lorenzo Maccone. Usefulness of entanglement-assisted quantum metrology. *Phys. Rev. A*, 94:012101, Jul 2016.
- [16] Charles H. Bennett and Stephen J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2881–2884, Nov 1992.
- [17] Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Paul G. Kwiat, and Anton Zeilinger. Dense coding in experimental quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, 76:4656–4659, Jun 1996.
- [18] Shin D.K., Henson B.M., Hodgman S.S., and et al. Bell correlations between spatially separated pairs of atoms. *Nat Commun*, 10:4447, 2019.
- [19] Christophe Couteau. Spontaneous parametric down-conversion. *Contemporary Physics*, 59(3):291–304, Jul 2018.
- [20] Suman Karan, Shaurya Aarav, Homanga Bharadhwaj, Lavanya Taneja, Arinjoy De, Girish Kulkarni, Nilakantha Meher, and Anand K. Jha. Phase matching in β -barium borate crystals for spontaneous parametric down-conversion. *Journal of Optics*, 22:083501, Jun 2020.
- [21] Stuti Joshi and Kanseri Kanseri. Spatial coherence properties of down converted biphoton field generated using partially coherent pump beam. *Optik*, 217:164941, 2020.

-
- [22] Sheng-Jun Yang, Xu-Jie Wang, Jun Li, Jun Rui, Xiao-Hui Bao, and Jian-Wei Pan. Highly retrievable spin-wave–photon entanglement source. *Phys. Rev. Lett.*, 114:210501, May 2015.
- [23] A. Dousse, J. Suffczyński, A. Beveratos, and et al. Ultrabright source of entangled photon pairs. *Nature*, 466:217–220, July 2010.
- [24] M. Müller, H. Vural, C. Schneider, A. Rastelli, O. G. Schmidt, S. Höfling, and P. Michler. Quantum-dot single-photon sources for entanglement enhanced interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 118:257402, Jun 2017.
- [25] C. K. Law and J. H. Eberly. Analysis and interpretation of high transverse entanglement in optical parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 92:127903, Mar 2004.
- [26] S. P. Walborn and C. H. Monken. Transverse spatial entanglement in parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 76:062305, Dec 2007.
- [27] Stuti Joshi and Bhaskar Kanseri. Spatial coherence properties of down converted biphoton field generated using partially coherent pump beam. *Optik*, 217, Sep 2020.
- [28] John C. Howell, Ryan S. Bennink, Sean J. Bentley, and R. W. Boyd. Realization of the einstein-podolsky-rosen paradox using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 92:210403, May 2004.
- [29] D. V. Strekalov, T. B. Pittman, A. V. Sergienko, Y. H. Shih, and P. G. Kwiat. Postselection-free energy-time entanglement. *Phys. Rev. A*, 54:R1–R4, Jul 1996.
- [30] Irfan Ali Khan and John C. Howell. Experimental demonstration of high two-photon time-energy entanglement. *Phys. Rev. A*, 73:031801, Mar 2006.
- [31] P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, and R. Y. Chiao. High-visibility interference in a bell-inequality experiment for energy and time. *Phys. Rev. A*, 47:R2472–R2475, Apr 1993.
- [32] Paul G. Kwiat, Philippe H. Eberhard, Aephraim M. Steinberg, and Raymond Y. Chiao. Proposal for a loophole-free bell inequality experiment. *Phys. Rev. A*, 49:3209–3220, May 1994.

-
- [33] S. P. Walborn, S. Pádua, and C. H. Monken. Hyperentanglement-assisted bell-state analysis. *Phys. Rev. A*, 68:042313, Oct 2003.
- [34] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, and Philippe H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60:R773–R776, Aug 1999.
- [35] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and et al. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 412:313–316, July 2017.
- [36] David J Griffiths. *Introduction To Electrodynamics*. Boston:Pearson, 2013.
- [37] Rodney Loudon. *The Quantum Theory of Light*. OUP Oxford, 2000.
- [38] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2017.
- [39] W. H. Louisell, A. Yariv, and A. E. Siegman. Quantum fluctuations and noise in parametric processes. i. *Phys. Rev.*, 124:1646–1654, Dec 1961.
- [40] David C. Burnham and Donald L. Weinberg. Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 25:84–87, Jul 1970.
- [41] James Schneeloch and John C Howell. Introduction to the transverse spatial correlations in spontaneous parametric down-conversion through the biphoton birth zone. *Journal of Optics*, 18(5):053501, Apr 2016.
- [42] Eugene Hecht. *Optics*. Pearson, 2012.
- [43] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics, Third Edition*. Academic Press, Inc., USA, 3rd edition, 2008.
- [44] Leonardo Teixeira Neves. *Estados emaranhados de Qubits e Qudits criados com pares de fótons produzidos na conversão paramétrica descendente*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Sept 2006.
- [45] C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57:3123–3126, Apr 1998.

-
- [46] Joseph W. Goodman. Introduction to fourier optics. *Introduction to Fourier optics, 3rd ed.*, by JW Goodman. Englewood, CO: Roberts & Co. Publishers, 2005, 1, 2005.
- [47] Leonardo Neves, S. Pádua, and Carlos Saavedra. Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons. *Phys. Rev. A*, 69:042305, Apr 2004.
- [48] Bala MuralikrishnanJay Raja. *Gaussian Filter. In: Computational Surface and Roundness Metrology*. Springer, London, 2009.