

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ACTUARÍA, FÍSICA Y MATEMÁTICAS

UDLAP®

Geometría Diferencial y Física: Relatividad más allá de Einstein

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE

JOSÉ MANUEL INFANTE CASTAÑEDA

169180

LICENCIATURA EN FÍSICA

DIRECTOR

DR. GERARDO ARIZMENDI ECHEGARAY

SAN ANDRÉS CHOLULA, PUEBLA.

Otoño, 2024

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA
DE HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE JOSÉ MANUEL
INFANTE CASTAÑEDA, 169180

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gerardo Arizmendi Echegaray

PRESIDENTE DE TESIS

Dr. Marco Antonio Pérez de la Rosa

SECRETARIA DE TESIS

Dra. Milagros Zeballos Rebaza

Contents

1	Preliminares	6
1.1	Álgebra lineal	6
1.1.1	Espacios vectoriales	6
1.1.2	Espacio generado, dependencia lineal y bases	8
1.1.3	El espacio dual	9
1.2	Tensores	10
1.3	Variedades	13
1.3.1	Variedades topológicas	13
1.3.2	Variedades diferenciables.	14
1.3.3	Espacio tangente	16
1.3.4	Campos vectoriales	18
1.4	Formas diferenciales	19
1.4.1	Integración en variedades	20
2	Geometría Riemanniana	23
2.1	Métricas	23
2.2	Conexiones y derivada covariante	27
2.3	Geodésicas	30
2.4	Curvatura	32
2.4.1	Curvatura Gaussiana	32
2.4.2	Tensor de curvatura	33
2.4.3	Tensor de Ricci y curvatura escalar	34
2.5	Campos de Jacobi	37
2.6	Ecuaciones de Maxwell usando formas	38
3	Solución de Schwarzschild	40
3.1	Preliminares	40
3.2	Métrica de Schwarzschild	42
3.3	Implicaciones	46
3.3.1	Órbitas planetarias	46
4	Teoría de Brans-Dicke	48
4.1	Principio de Mach	48
4.2	Características principales de la teoría de Brans-Dicke	49

4.3	Construcción de la teoría	50
4.4	Poniendo a prueba la teoría	53
4.4.1	Agujeros negros	53
4.4.2	Deflexión de la luz	53
4.4.3	Achatamiento del Sol	54
4.4.4	Veredicto final	55

Introducción

La historia de las matemáticas y la física está llena de grandes figuras que, apoyándose en sus antecesores, avanzaron con cada generación. Podemos datar avances significativos en astronomía, geometría o aritmética a sociedades de la antigüedad. Cada uno de los genios que pusieron un ladrillo en nuestra pared de conocimiento merece ser recordado. Indudablemente, una de las teorías más importantes que hemos construido como humanidad es el entendimiento de la gravedad.

Al hablar de gravedad, podemos retroceder hasta la antigua Grecia, en donde Aristóteles aseguraba que la velocidad a la que los objetos caen es dada por su masa. Galileo desafió esta idea al experimentar con sus planos empinados. Por aquella época, Kepler enunciaba sus leyes de movimiento planetario. No transcurrió mucho tiempo para que Newton formulara sus leyes del movimiento, dando al fin un fundamento matemático sólido a la mecánica. Poco a poco, nuestra comprensión de la gravedad se completaba.

A pesar de que las leyes de Newton fueron extraordinarias para explicar el movimiento de los astros, al punto de predecir la existencia de Neptuno por las perturbaciones de la órbita de Urano, resultaron insuficientes para dar respuesta al anómalo movimiento de precesión del perihelio de Mercurio. Las discrepancias entre los modelos newtonianos y las observaciones se resolvieron cuando Einstein propuso su teoría de la relatividad. En esta nueva teoría, se entiende a la gravedad como un efecto de la geometría del espacio-tiempo en lugar de una fuerza.

No obstante, este es solo un lado de la historia. También podemos trazar esta historia desde un punto de vista matemático. Desde los 5 axiomas de Euclides, pasando por la negación del quinto por parte de Lobachevsky, hasta el gran desarrollo de la geometría no euclidiana por parte de Riemann. Incluso, paralelamente a Einstein, David Hilbert llegó a una formulación equivalente a la relatividad de Einstein usando principios variacionales, meramente matemáticos.

Los avances en geometría y relatividad no terminan con Einstein. A pesar de que es la teoría más aceptada, ha habido incontables científicos que la han querido mejorar. En un intento de generalizar la relatividad general, Brans y Dicke señalaron que los efectos gravitacionales no son solamente ocasionados por la geometría del espacio-tiempo, sino que también influye un campo escalar. Bajo este nuevo enfoque, obtenemos nuevas implicaciones de cómo se comporta

el universo.

En esta tesis el objetivo principal es explicar de dónde se deduce la solución de Schwarzschild y después mostrar algunas de sus consecuencias. Posteriormente, expondremos una teoría alterna a la relatividad general: La teoría de Brans-Dicke. Para ello, primero construiremos las matemáticas necesarias para entenderlas. En el Capítulo 1, definiremos conceptos claves del álgebra lineal, así como tensores, variedades y formas diferenciables. Ya que tengamos las herramientas necesarias, podremos empezar a hablar de *Geometría Riemanniana*.

En el Capítulo 2, hablaremos de todo lo que hace la relatividad cobrar vida. Conoceremos a nivel más abstracto cómo medimos distancias y transformaciones en superficies no necesariamente planas. A través de las métricas, las isometrías y las conexiones, llegaremos a una generalización del *camino más recto*: La geodésica. Luego, extenderemos nuestra intuición sobre qué es lo que significa que algo sea curvo gracias a los tensores de curvatura (Riemman, Ricci y escalar). Para finalizar, describiremos cómo podemos dimensionar qué tan cercanas están las geodésicas entre sí en una superficie con los *Campos de Jacobi*. Finalizaremos la sección con un ejemplo clásico pero elegante de cómo reescribir las ecuaciones de Maxwell usando formas diferenciales.

En el Capítulo 3, entramos de lleno al corazón de la teoría de la relatividad y desglosamos una de las soluciones más útiles a las ecuaciones de campo de Einstein: la *métrica de Schwarzschild*. Iniciaremos con algunas consideraciones físicas y definiciones de objetos matemáticos que usaremos. Posteriormente, desarrollaremos extensivamente la solución de Schwarzschild paso a paso. Por último, descubriremos cómo esta solución tiene usos en astronomía.

Finalmente, en el capítulo 4, presentamos una teoría alternativa a la relatividad general: la *teoría de Brans-Dicke*. Empezamos con el principio de Mach, una idea que relaciona la masa inercial de una partícula y la distribución de masa-energía en el resto del universo. De ahí, se puede definir un campo escalar que será introducido en las ecuaciones de campo. Para saber qué tan congruente es este acercamiento con la realidad, mencionaremos algunos experimentos.

Espero que este texto sea útil para cualquier estudiante de física que quiera empezar a adentrarse en relatividad mientras ofrece un vistazo a otras teorías no tan conocidas.

Chapter 1

Preliminares

Antes de empezar de lleno con la geometría diferencial y sus fascinantes aplicaciones como relatividad o electromagnetismo, tenemos que detenernos un poco en los conceptos fundamentales que se mencionarán a lo largo de la tesis. Las herramientas matemáticas que nos permiten hablar de transformaciones de un espacio (que luego extenderemos al espacio tiempo, por ejemplo) tienen origen en el álgebra lineal.

En la sección 1.1 describiremos lo esencial de esta área y cómo esta nos permite definir objetos más complejos como los descritos en la sección 1.2: los tensores. Posteriormente, en la sección 1.3, introduciremos el objeto de estudio fundamental de la geometría Riemanniana: las variedades. Finalmente, en la sección 1.4 definiremos unos objetos matemáticos muy particulares que nos permiten generalizar los resultados más clásicos del cálculo vectorial. Con todos estos antecedentes, tendremos lo necesario para atacar problemas y entender de forma más completa el funcionamiento del universo.

1.1 Álgebra lineal

El álgebra lineal es una de las maquinarias matemáticas más poderosas que tenemos. Con ella, estudiamos los espacios vectoriales (Definición 1.1.1), que son fundamentales para describir transformaciones en el espacio. Las construcciones que cumplen con las condiciones para ser espacios vectoriales son de particular interés para matemáticos y físicos porque son útiles para describir transformaciones, por ejemplo, rotaciones o traslaciones.

1.1.1 Espacios vectoriales

Para tener un espacio vectorial (cuyos elementos llamamos *vectores*) necesitamos un campo (cuyos elementos llamamos *escalares*).

Definición 1.1.1. (Espacio vectorial) Sea A un campo y sea V un conjunto no vacío. El conjunto V tiene una estructura de espacio vectorial si tiene dos

operaciones

- **Suma de vectores:** Si $u, v \in V$, se cumple $(u+v) \in V$ para cualesquiera dos vectores.
- **Multiplicación por escalar:** Para todo $a \in A, v \in V$, se cumple que $av \in V$.

Además, estas operaciones deben cumplir con los siguientes axiomas para todo $u, v, w \in V$ y $a, b \in A$:

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. \exists un vector en V , denominado por 0 , llamado *vector cero* o *neutro* que cumple:

$$v + 0 = 0 + v = v.$$

3. $\forall v, \exists$ otro vector en V denominado $-v$, tal que:

$$v + (-v) = (-v) + v = 0.$$

4. $u + v = v + u$.
5. $a(u + v) = av + au$.
6. $(a + b)v = av + bv$.
7. $(ab)v = a(bv)$.
8. $1v = v$.

Podemos dividir estos axiomas en dos partes: Los axiomas 1-4 definen las acciones que tiene la suma entre vectores. El lector perspicaz notará que son las mismas condiciones para un *grupo conmutativo*, también conocido como *grupo Abelian*. Los axiomas 5-8 son la acción de los escalares en los vectores.

Algunos ejemplos de espacios vectoriales son los siguientes:

Ejemplo 1.1.1. (Espacio de polinomios $P(t)$)

Sea $P(t)$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales, es decir:

$$P(t) = \{p(t) \mid p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ y } a_i \in \mathbb{R}\}$$

$P(t)$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar dadas por:

- 1.

$$+ : P(t) \times P(t) \longrightarrow P(t)$$

$$(f, g) \longmapsto f + g,$$

donde si $f = a_0 + b_1t \cdots + a_nt^n$ y $g = b_0 + b_1t \cdots + b_nt^n$ entonces $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t \cdots + (a_n + b_n)t^n$.

2.

$$\cdot : \mathbb{R} \times P(t) \longrightarrow P(t).$$

$$(b, f) \longmapsto b \cdot f,$$

donde si $f = a_0 + b_1 t \cdots + a_n t^n$ y $b \in \mathbf{R}$, entonces, $b \cdot f = b \cdot (a_0 + a_1 t \cdots + a_n t^n) = b \cdot a_0 + b \cdot a_1 t \cdots + b \cdot a_n t^n$.

Ejemplo 1.1.2. (Matrices $m \times n$)

Sea $M_{m \times n}$ el espacio de matrices con entradas reales $m \times n$, donde m es el número de filas y n es el número de columnas. Este espacio es un espacio vectorial (Definición 1.1.1) con las siguientes operaciones definidas:

1. Suma de matrices:

$$+ : M_{m \times n} \rightarrow M_{m \times n}$$

$$(A, B) \longmapsto A + B$$

donde A, B son matrices $M_{m \times n}$. Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, entonces, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

2. Multiplicación por escalar:

$$\cdot : \mathbb{R} \times M_{m \times n} \longrightarrow M_{m \times n}$$

$$(c, A) \longmapsto c \cdot A$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y A es una matriz $m \times n$. Si $A = [a_{ij}]$ y c es un escalar, entonces $c \cdot A = [c \cdot a_{ij}]$.

3. Multiplicación de matrices:

$$\cdot : M_{m \times p} \times M_{p \times n} \longrightarrow M_{m \times n}$$

$$(A, B) \longmapsto A \cdot B$$

donde A es una matriz $m \times p$ y B es una matriz $p \times n$. Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, entonces $(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$.

1.1.2 Espacio generado, dependencia lineal y bases

Definición 1.1.2. (Combinación lineal) Sea V un espacio vectorial. Un vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores $u_0, u_1, \dots, u_n \in V$ si existen escalares a_0, a_1, \dots, a_n tal que

$$v = a_0 u_0 + \dots + a_n u_n.$$

Al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores v_0, \dots, v_n se le llama *espacio generado* y se denota por

$$\text{span}(v_0, \dots, v_n) = \text{span}(v_i).$$

Definición 1.1.3. (Dependencia lineal) Sean $v_0, \dots, v_n \in V$. Los vectores son linealmente dependientes si existen escalares a_0, \dots, a_n , no todos cero, tal que:

$$a_0v_0 + \dots + a_nv_n = 0.$$

En caso contrario, los vectores son linealmente independientes.

Una forma alternativa de enunciar la Definición 1.1.3 es que dos vectores son linealmente dependientes si uno se puede escribir como combinación lineal del otro.

Definición 1.1.4. (Base) Un conjunto de vectores $B = \{v_0, \dots, v_n\}$, donde $v_0, \dots, v_n \in V$ es una base si cumple que:

1. B es linealmente independiente.
2. B genera a V .

Ejemplo 1.1.3. (Base para matrices 2×2)

Las siguientes matrices son una base para el espacio vectorial de matrices 2×2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Estas matrices generan todo el espacio de matrices 2×2 y son linealmente independientes. Por lo tanto, son una base para dicho espacio.

Definición 1.1.5. (Dimensión) Sea B una base para V . Si $B = \{v_0, \dots, v_n\}$, entonces la dimensión de V es el número de elementos de B . Es decir,

$$\dim V = n + 1.$$

1.1.3 El espacio dual

Definición 1.1.6. (Funcional lineal) Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una aplicación $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal si para todo $v, u \in V$ y para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\Phi(av + bu) = a\Phi(v) + b\Phi(u).$$

Es decir, es una aplicación lineal de V a \mathbb{R} .

Definición 1.1.7. (Espacio Dual) El conjunto de los funcionales lineales sobre un campo vectorial V es un espacio vectorial. Definimos las operaciones de suma y multiplicación como:

- $(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v)$.
- $(a\phi)(v) = a\phi(v)$.

Donde ϕ, ψ son funcionales lineales sobre V y a es un elemento del campo. A este espacio se le llama *espacio dual de V* y se denota como V^* .

Dado un espacio vectorial de dimensión finita V y una base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V , definimos la base dual de V^* como $\beta^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ como

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Nótese que $\dim(V) = \dim(V^*) = n$. Los elementos del espacio dual son funcionales lineales.

Ejemplo 1.1.4. (Ejemplo de base dual)

Consideremos la base $\{v_1 = (1, 2), v_2 = (-3, 4)\}$ en \mathbb{R}^2 . Encontrar la base dual $\{\phi_1, \phi_2\}$.

Para hallar la base dual, debemos encontrar los funcionales lineales $\phi_1(x, y) = ax + by$ y $\phi_2(x, y) = cx + dy$ tal que cumplan la definición 1.1.7, es decir, que cumplan que

$$\phi_1(v_1) = 1, \phi_1(v_2) = 0, \phi_2(v_1) = 0, \phi_2(v_2) = 1$$

Estas condiciones nos llevan a estos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \phi_1(v_1) = \phi_1(1, 2) = a + 2b = 1 \\ \phi_1(v_2) = \phi_1(-3, 4) = -3a + 4b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_2(v_1) = \phi_2(1, 2) = c + 2d = 0 \\ \phi_2(v_2) = \phi_2(-3, 4) = -3c + 4d = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de estos sistemas son $a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{10}, c = \frac{-1}{5}, d = \frac{1}{10}$. Por lo tanto, la base dual es $\{\phi_1 = \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y, \phi_2 = \frac{-1}{5}x + \frac{1}{10}y\}$.

1.2 Tensores

Otro objeto con el que se trabaja constantemente en geometría diferencial es el tensor. En esta sección se explicará lo esencial que hay que saber de este objeto.

Definición 1.2.1. (Tensor) Sean V_1, \dots, V_k espacios vectoriales sobre \mathbb{R}^n . Se define un tensor de orden k (k -tensor) como una transformación multilineal (k lineal) $T : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$. Estas transformaciones cumplen que si para cualesquiera vectores $v_i, w_i \in V_i$ (con $i = 1, \dots, k$) y $\lambda \in \mathbb{R}^n$

$$T(v_1, \dots, \lambda v_i + w_i, \dots, v_k) = \lambda T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k).$$

Es decir, es lineal en cada una de sus entradas. Cabe destacar que los tensores de orden 1 son el espacio dual V^* .

Definición 1.2.2. (Producto tensorial) El espacio vectorial de los tensores de orden k en $V_1 \times \dots \times V_k$ se denomina por $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$.

Si tenemos $T \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ y $S \in V_{k+1}^* \otimes \dots \otimes V_m^*$, entonces el producto tensorial de T y S está dado por

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_{k+m}) = T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+m}).$$

Hay tensores con los que ya estamos familiarizados, por ejemplo, el producto interno.

Ejemplo 1.2.1. (Producto interno)

Definimos el producto interno \langle, \rangle en un campo vectorial V como un 2 -tensor T tal que T :

1. Es simétrico, es decir, para todo $v, w \in V$

$$T(v, w) = T(w, v)$$

2. Es positivo definido

$$T(v, v) = 0 \iff v = 0$$

La tercera propiedad que siempre se menciona del producto interno, lineal en cada una de sus entradas, es decir, $\langle av, w \rangle = \langle v, aw \rangle = a\langle v, w \rangle$ viene implícita del hecho que es un tensor.

Otra operación que quisiéramos generalizar es el determinante. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.3. (Tensor alternante) Si tenemos un espacio vectorial V , un k -tensor T se llama alternante si cumple que

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para todo $v_1, \dots, v_k \in V$. En otras palabras, cambia de signo si intercambiamos dos vectores en nuestro tensor y dejamos los demás fijos. Al conjunto de todos los k -tensores alternantes se le denomina $\Lambda^k(V)$. Una manera de expresarlos es usando el signo de permutación σ ($sgn\sigma$). Recordemos que $sgn\sigma$ es 1 si σ es par y -1 si σ es impar. Si T es un k -tensor, definimos $Alt(T)$ como

$$Alt(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn\sigma T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

en donde S_k es el conjunto de todas las permutaciones de los números de 1 a k .

Teorema 1.2.1. (Propiedades de los tensores alternantes)

1. Si T es un k -tensor, entonces $Alt(T) \in \Lambda^k(V)$.
2. Si $\omega \in \Lambda^k(V)$, entonces $Alt(\omega) = \omega$.
3. Si T es un k -tensor, entonces $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$.

Las demostraciones pueden encontrarse en el libro *Calculus on Manifolds de Michael Spivak [31]*.

Ejemplo 1.2.2. (Determinante)

Sean $\{v_1, \dots, v_n\} \in \mathbb{R}^n$. Definimos

$$P(v_1, \dots, v_n) := \det\{v_1, \dots, v_n\}.$$

El determinante es una función multilineal definida como $\det : Mat_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ y cuenta con las siguientes propiedades:

1. $\det(Id) = 1$.

2. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

3. $\det \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

4. $\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

5. $\det \begin{pmatrix} v_1 + v_1' \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Las propiedades 3 y 5 hacen que el determinante sea tensor, pues es lineal en cada una de sus entradas (en este caso, vectores). Más aún, la propiedad 4 hace del determinante un tensor alternante.

Para determinar la dimensión de $\Lambda^k(V)$ necesitamos definir un producto conocido como el *producto cuña*.

Definición 1.2.4. (Producto cuña) Sean $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^l(V)$, entonces definimos el producto cuña $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(V)$ como

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

Teorema 1.2.2. (Propiedades del producto cuña)

Sean $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^l(V), \gamma \in \Lambda^m(V)$ y sean c, d constantes. Entonces, se cumple que:

1. $(\alpha \wedge \beta)\gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$.

2. $c\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge c\beta = c(\alpha \wedge \beta)$.
3. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\beta \wedge \alpha$.
4. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.
5. $\alpha(c\beta \wedge d\gamma) = c\alpha \wedge \beta + d\alpha \wedge \gamma$.
6. $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Teorema 1.2.3. (Dimensión de $\Lambda^k(V)$)

Sea V un espacio vectorial de dimensión n , entonces,

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.3 Variedades

Uno de los objetos que necesitamos entender en geometría diferencial son las variedades (topológicas y diferenciables). Una variedad es un espacio que localmente se parece a algún \mathbb{R}^n . Una definición más precisa se da más adelante. Sin embargo, antes tenemos que definir algunos otros conceptos.

1.3.1 Variedades topológicas

Definición 1.3.1. (Espacio topológico) Sea X un conjunto no vacío. Si tomamos una colección \mathcal{T} de subconjuntos de X , tenemos una *topología* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El conjunto vacío \emptyset y el conjunto mismo X pertenecen a la topología, es decir, $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. Es decir, si U_1, U_2, \dots, U_n son conjuntos abiertos en X , entonces su intersección $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ también es un conjunto abierto en X .
3. La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. Es decir, si $\{U_\alpha\}$ es una colección de conjuntos abiertos en X , entonces su unión $\bigcup_\alpha U_\alpha$ también es un conjunto abierto en X .

El par (X, \mathcal{T}) se llama *espacio topológico*. A los elementos de la topología los denominamos *abiertos*.

Ejemplo 1.3.1. (Espacio topológico)

Sean $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $\mathcal{T} = \{A, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$. La colección \mathcal{T} cumple con los axiomas de una topología, por lo tanto, el par (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico.

Definición 1.3.2. (Espacio topológico de Hausdorff) Un espacio topológico es Hausdorff si para cualquier pareja de puntos $a, b \in X$ con $a \neq b$, existen U_a, U_b vecindades de a y b , respectivamente, tal que $U_a \cap U_b = \emptyset$. (figura 1.1).

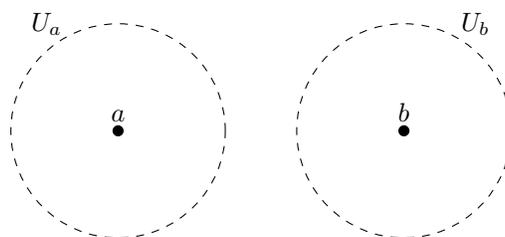


Figure 1.1: Espacio topológico de Hausdorff.

Definición 1.3.3. (Función continua) Sean (X_1, \mathcal{T}_1) y (X_2, \mathcal{T}_2) dos espacios topológicos. Una función $f : X_1 \rightarrow X_2$ es continua si la preimagen de abiertos es abierta. En otras palabras, para todo $A \in \mathcal{T}_2$, tenemos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$.

Definición 1.3.4. (Homeomorfismo) Sean X, Y dos conjuntos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es homeomorfa si es continua y además, su inversa es continua. En otras palabras, f manda abiertos en abiertos y es biyectiva. Esto se denota como $X \cong Y$.

Definición 1.3.5. (Variedad Topológica) Es un espacio topológico de Hausdorff M tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n . Una *carta de coordenadas* es una pareja (U, ϕ) si $U \subset M$ es un conjunto abierto y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre un abierto de \mathbb{R}^n .

El primer ejemplo de variedad topológica no trivial es la esfera S^n . La estructura de variedad diferenciable nos da naturalmente una estructura de variedad topológica, debido a que una función diferenciable es continua. La estructura de variedad diferenciable en la esfera a través de la proyección estereográfica se desarrolla en el ejemplo 1.3.4

1.3.2 Variedades diferenciables.

Si consideramos un par de cartas, $(U, \phi), (V, \psi)$ y suponemos que sus dominios se traslapan, $U \cap V \neq \emptyset$, entonces podemos construir las transformaciones $\phi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \phi^{-1}$. Sus dominios y codominios están dados por abiertos de \mathbb{R}^n . Estas transformaciones son conocidas como *transformaciones de cambio de coordenadas*.

Definición 1.3.6. (Compatibilidad) Dos cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ son C^k compatibles ($k = 0, 1, 2, \dots, \infty$) si y solo si las transformaciones de cambio de coordenadas $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son de clase C^k (Figura 1.3.2).

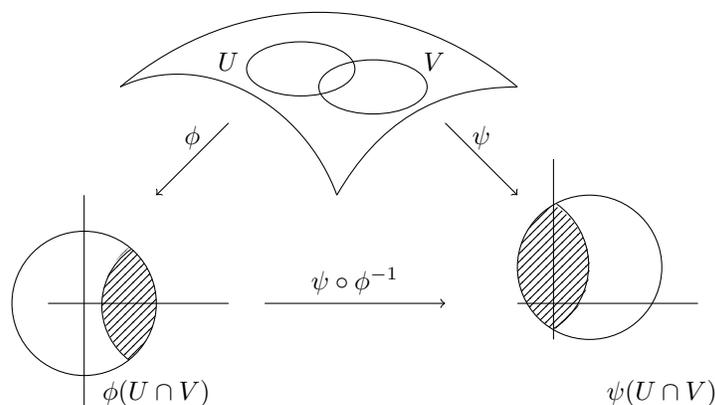


Figure 1.2: Compatibilidad de cartas en una variedad diferenciable.

Definición 1.3.7. (Atlas) Colección de cartas cuyos dominios cubren a M^n y son compatibles entre ellas. Un atlas A es de clase C^k si sus cartas son C^k compatibles.

Definición 1.3.8. (Estructura diferenciable) Atlas A en el que si la carta (U, ϕ) es C^k compatible con todas las cartas de A , entonces $(U, \phi) \in A$ (también es llamado *Atlas maximal*).

Definición 1.3.9 (Variedad diferenciable). Una pareja (M^n, A) donde M^n es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n con base numerable y A es una estructura diferenciable de clase C^K en M^n se llama variedad diferenciable.

Ejemplo 1.3.2. (Abierto de \mathbb{R}^n)

Un abierto de \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable. Suponga que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Ahora, suponga la estructura diferenciable (U, I) , donde I es la transformación identidad. Evidentemente, U es homeomorfo a \mathbb{R}^n y I es una estructura diferenciable, por lo tanto, la pareja (U, I) es una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.3.3. (Matrices)

El conjunto de matrices $m \times n$ con entradas reales pueden identificarse con \mathbb{R}^{nm} . Con esta identificación, las matrices son una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.3.4. (Estructura diferenciable de \mathbb{S}^n)

Sean el conjunto $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Consideremos las proyecciones estereográficas desde los polos $\alpha_{\pm} : \mathbb{S}^n - \{p_{\pm}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $p_{\pm} = (0, \dots, 0, \pm 1)$, entonces el atlas dado por

$$\{(\mathbb{S}^n - \{p_+\}, \alpha_+), (\mathbb{S}^n - \{p_-\}, \alpha_-)\}$$

determina una estructura diferenciable en \mathbb{S}^n . (Figura 1.3).

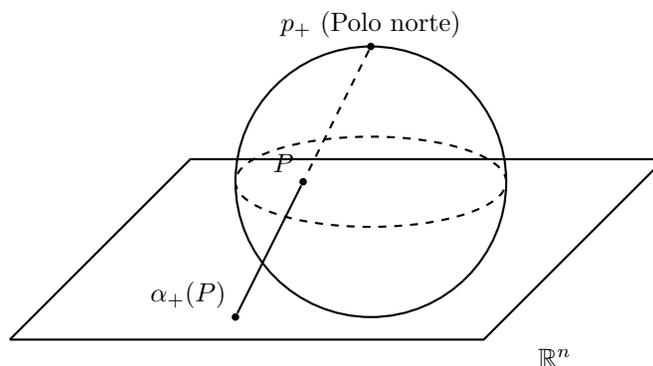


Figure 1.3: Proyección estereográfica.

1.3.3 Espacio tangente

Definición 1.3.10. (Curvas equivalentes) Sea M una variedad, $p \in M$ y sean $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ dos curvas diferenciables en M tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p$, entonces, α y β son compatibles si y solo si para alguna carta (U, ϕ) de una vecindad de p se tiene que $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.

Este concepto no depende de la carta que elijamos y es útil porque define una relación de equivalencia entre curvas. A partir de aquí, podemos construir una primera definición de *vector tangente*. Denotamos como $[\alpha]$ a la clase de equivalencia de una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, y la llamamos *vector tangente* a α en p . Con este concepto, podemos dar una primera definición de *espacio tangente*. El *espacio tangente* a una variedad en el punto p , denotado como T_pM , es el conjunto de clases de equivalencias de curvas

$$T_pM = \{[\alpha] \mid \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \alpha(0) = p\}.$$

Esta definición tiene mucho sentido geoméricamente. No obstante, a pesar de ser posible, es bastante complicado darle estructura de espacio vectorial. Otro enfoque para la definición de espacio tangente T_pM usa el hecho que podemos calcular la derivada direccional de una función f en dirección de un vector v . Más precisamente, si $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $p \in U$ y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$v(f) := df_p(v) = \langle \text{grad}f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n D_i f(p) v_i.$$

De la teoría del cálculo, esta derivada direccional es un operador lineal y cumple la regla del producto de Leibnitz. Con esto, ya podemos definir *vector tangente* y *espacio tangente*.

Definición 1.3.11. (Vector y espacio tangente) Sea M una variedad y $p \in M$. Un *vector tangente* a M en p es un operador lineal $v : G_p M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibnitz. En otras palabras, para todo $f, g \in C^\infty$ y $c \in \mathbb{R}$ se cumplen

1. Linealidad

$$v([f + cg]) = v([f]) + cv([g])$$

2. Regla de Leibniz

$$v([fg]) = f(p)v([g]) + g(p)v([f]).$$

El *espacio tangente* a M en p se denomina $T_p M$ y es el conjunto de vectores tangentes a M en p . En palabras simples, nuestra definición de espacio tangente nos dice que a cada punto $p \in M$ le asociamos un espacio vectorial. La ventaja de esta definición es que $T_p M$ tiene estructura de espacio vectorial.

Al tener $T_p M$ estructura de espacio vectorial, es natural preguntarnos por su dimensión y cuál podría ser una base para dicho espacio. Sobre este aspecto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.3.1. *Considerando una carta (U, ϕ) con $p \in U$ y siendo u_i las funciones de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^n , escribimos $x_i = u_i \circ \phi$. Definimos*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : G_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([f]) = \frac{\partial}{\partial u_i} (f \circ \phi^{-1})(\phi(p))$$

donde $\partial/\partial u_i$ es la derivada parcial de una función con respecto a la i -ésima variable en \mathbb{R}^n . Entonces,

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$$

es una base de $T_p M$.

Como corolario, sabemos que si $p \in M$ con M una variedad diferenciable, entonces la dimensión de $T_p M$ es la misma que la de M .

Definición 1.3.12. (Haz tangente) Si tenemos una variedad M^n , el *haz tangente* a M es la unión de todos los espacios tangentes a M en cada punto $p \in M$ y lo denotamos como TM . Matemáticamente,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

El haz tangente es una variedad y su dimensión es $2n$

Definición 1.3.13. (Diferencial) Sean M, N variedades y sea $f \in C^\infty(M, N)$. La *diferencial* de f en un punto $p \in M$ se denota con un asterisco $*$. Esta se define como

$$\begin{aligned} f_*p &: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N \\ f_*p(v)([g]) &= v([g \circ f]) \end{aligned}$$

donde $v \in T_pM, [g] \in G_{f(p)}N$.

1.3.4 Campos vectoriales

Ahora, podemos definir de manera más certera los campos vectoriales. Es vital tener este concepto claro ya que de ahí podemos empezar a construir herramientas para hacer cálculo en nuestras variedades.

Definición 1.3.14. (Campo vectorial) Sea M una variedad diferenciable, TM su haz tangente, $p \in M, v \in T : pM$ y π la transformación de proyección, es decir, $\pi : TM \rightarrow M$ y $\pi(v) = p$. Un *campo vectorial* en M es una transformación $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X$ es la identidad en M , es decir, $X(p) \in T_pM$ para todo $p \in M$.

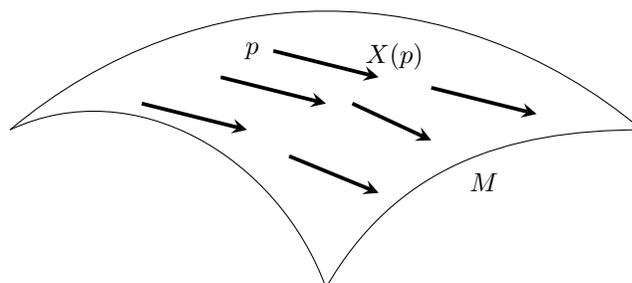


Figure 1.4: Un campo vectorial en M .

Si tenemos una carta (U, ϕ) con $U \subset M$, llamamos u_i a las funciones coordenadas en \mathbb{R}^n y, además, $x_i = u_i \circ \phi$, entonces, usando el teorema 1.3.11, podemos escribir X como

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X([x_i])(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, p \in U$$

Sea $X : M \rightarrow TM$ una transformación tal que $\pi \circ X$ es la identidad en M y consideramos la expresión anterior para $X(p)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es diferenciable.
2. Las funciones $X([x_i])$ son diferenciables.

3. Para cada función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, la función $X(f)$ dada por $X(f)(p) = X(p)(f)$ es diferenciable.

1.4 Formas diferenciales

Las formas diferenciales son una de las herramientas clave para construir todo el cálculo en variedades. Gracias a ellas, podremos escribir de manera muy conveniente teoremas importantes del cálculo vectorial e, incluso, reescribir de forma más compacta las ecuaciones de Maxwell.

Definición 1.4.1. (Forma diferencial) Si consideramos una función ω con $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$ podemos escribir una k -forma en \mathbb{R}^n o forma diferencial usando el producto cuña definido anteriormente (definición 1.2.4) como

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}(p) \cdot [\phi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}(p)](p)$$

donde $\phi_{i_1}(p), \dots, \phi_{i_k}(p)$ es la base dual de $(e_1)_p, \dots, (e_n)_p$. Si las funciones $\omega_{i_1 \dots i_k}$ son continuas o diferenciables, la forma ω también lo es. Una función f es considerada una 0-forma. Otra manera de escribir las k -formas ω es

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

en donde $dx^1(p), \dots, dx^n(p)$ es la base dual de $(e_1)_p, \dots, (e_n)_p$.

En estricta teoría, las formas son secciones de la segunda potencia exterior del espacio tangente.

Definición 1.4.2. (Derivada exterior) La *derivada exterior* es un operador que toma una k -forma y regresa una $k+1$ -forma. En otras palabras, si tenemos una forma ω escrita como

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

entonces, definimos la $k+1$ -forma $d\omega$ como

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Teorema 1.4.1. (Propiedades de la derivada exterior)

1. Si ω es una k -forma y η una l -forma $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$.
2. Si ω es una k -forma y η una l -forma, entonces, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
3. $d(d\omega) = 0$. En otra notación, $d^2 = 0$.

Ejemplo 1.4.1. Sea η la forma $\eta = 5 \sin(xy)dx - 3x^2ydy$. Encuentre $d\eta$.

$$d\eta = d(5 \sin(xy)dx - 3x^2ydy) = d(5 \sin(xy)dx) - d(3x^2ydy)$$

$$d\eta = \frac{\partial}{\partial x}5 \sin(xy)dx \wedge dx - \frac{\partial}{\partial x}3x^2ydx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial y}5 \sin(xy)dy \wedge dx - \frac{\partial}{\partial y}3x^2ydy \wedge dy.$$

Todos los términos que son un producto cuña por sí mismo son cero por las propiedades 1.2.2. Ahora, hacemos las derivadas.

$$d\eta = -6xydx \wedge dy + 5x \cos(xy)dy \wedge dx.$$

Usamos las propiedades de antisimetría del producto cuña.

$$d\eta = -(6xy + 5x \cos(xy))(dx \wedge dy)$$

Definición 1.4.3. (Pullback) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función suave y sea ω una k -forma diferencial en \mathbb{R}^m . El *pullback* de ω por f denotado como $f^*\omega$ es una k -forma diferencial en \mathbb{R}^n definida por:

$$f^*\omega = \omega \circ f$$

Teorema 1.4.2. (Propiedades del pullback) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, a y b escalares, ω, η k -formas diferenciales en \mathbb{R}^n y ξ una 1-forma en \mathbb{R}^m . Entonces, el pullback cumple que:

- $f^*(a\omega + b\eta) = af^*\omega + bf^*\eta$.
- $f^*(\omega \wedge \xi) = (f^*\omega \wedge f^*\xi)$.
- $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Ejemplo 1.4.2. (Ejemplo de pullback)

Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $g(x, y, z) = (u = x + y, v = x^2 - y^2, w = xy)$ y sea $\eta = vdu - udv + 4wdw$. Calcule $g^*(\eta)$.

$$g^*(\eta) = \eta \circ g = (x^2 - y^2)d(x + y) - (x + y)d(x^2 - y^2) + 4xyd(xy)$$

$$= (x^2 - y^2)(dx + dy) - (x + y)(d(x^2) - d(y^2)) + xyd(xy)$$

$$= (4xy^2 + 2xy - x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2 + 2xy + 4x^2y)dy.$$

1.4.1 Integración en variedades

Definición 1.4.4. (n-cubo singular) Un n -cubo singular en M es una función diferenciable $c : [0, 1]^k \rightarrow M$ (aquí $[0, 1]^k$ denota el producto $[0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$). Si ω es una k -forma en M , entonces $c^*\omega = gdx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ y definimos

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{[0,1]^k} g$$

un 1-cubo singular es llamado generalmente una *curva*.

Definición 1.4.5. (Cadenas) Una k -cadena en M es una combinación entera de k -cubos singulares $c = \sum_{i=1}^k a_i c_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.4.3. Si c es una k -cadena en M , entonces $\partial(\partial c) = 0$. Aquí el símbolo ∂ denota la frontera de la k -cadena, más precisamente

$$\partial c = \sum_{i=1, \alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}.$$

Cabe señalar las similitudes entre ∂ y d . La característica de que $\partial^2 = 0$ y $d^2 = 0$ sugiere que hay una conexión entre cadenas y formas. Esta relación se establece por medio una integración de formas sobre cadenas: el teorema de Stokes.

Teorema 1.4.4. (Stokes) Si ω es una $(k-1)$ -forma en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ y c es una k -cadena en A , entonces

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Este teorema es a veces llamado el teorema fundamental del cálculo en dimensiones superiores. Si $k = 1$, $c = I^1$, es simplemente el teorema fundamental del cálculo.

Este teorema también se puede formular para variedades.

Teorema 1.4.5. (Teorema de Stokes para variedades) Sea M una variedad k -dimensional orientada compacta con frontera y sea ω una $(k-1)$ forma en M , entonces,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Este teorema es de vital importancia en la física matemática. En él están englobados los teoremas más importantes del cálculo vectorial: el homónimo teorema de Stokes, el teorema de Green y el teorema de divergencia de Gauss.

Ejemplo 1.4.3. (Teorema de Gauss con formas)

En este ejemplo veremos que el teorema de divergencia de Gauss en un caso particular del teorema generalizado de Stokes. Cabe señalar que este ejercicio también se puede hacer para el teorema de Green y el otro teorema de Stokes.

Sea $\omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dz$. Entonces, usando teorema de Stokes generalizado:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \omega &= \int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} d(F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dz) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \end{aligned}$$

Una forma clara de ver la relación entre todo lo estudiado hasta el momento y el cálculo está en el siguiente diagrama (suponiendo que estamos en \mathbb{R}^3).

$$\begin{array}{ccccccc}
 f & \xrightarrow{\text{grad}} & F & \xrightarrow{\text{rot}} & F & \xrightarrow{\text{div}} & f \\
 \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
 f & \xrightarrow{d} & \omega & \xrightarrow{d} & \eta & \xrightarrow{d} & f(dx \wedge dy \wedge dz)
 \end{array}$$

Figure 1.5: Diagrama de las operaciones de cálculo vectorial con formas.

En el diagrama 1.5 f es una función, F es un campo vectorial con componentes (F_1, F_2, F_3) , ω una 1-forma ($\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$) y η una 2-forma ($\eta = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$). A cada una de los productos cuña en ω y η podemos relacionarla a una coordenada de \mathbb{R}^3 .

$dx, dy \wedge dz$ corresponden a la coordenada x .
 $dy, dz \wedge dx$ corresponden a la coordenada y .
 $dz, dx \wedge dy$ corresponden a la coordenada z .

Donde las identificaciones de las dos formas se hacen a través del operador de Hodge, del que hablaremos más adelante. También, recordando que $d^2 = 0$, tenemos que, equivalentemente, $\text{rot}(\text{grad}) = 0 = \text{div}(\text{rot})$.

Chapter 2

Geometría Riemanniana

En este momento ya contamos con herramientas matemáticas poderosas que nos ayudarán a profundizar en la teoría de la relatividad. Sin embargo, antes de adentrarnos en dicha rama, tenemos que construir las matemáticas en las que las ecuaciones de Einstein están escritas. Dichos fundamentos están dados por la *geometría Riemanniana*. Gracias a la geometría Riemanniana podemos generalizar conceptos físicos de suma importancia para describir el espacio-tiempo. Este capítulo está diseñado para describir lo que necesitaremos en el capítulo 3.

Primeramente, en la sección 2.1 hablamos del concepto de métrica, lo que nos ayudará a entender las isometrías. Posteriormente, en la sección 2.2 discutimos sobre las conexiones de una variedad, la derivada covariante, los Símbolos de Christoffel, la torsión y el Lema fundamental de la geometría Riemanniana, de donde sale la conexión de Levi-Civita y la fórmula de Koszul. En la sección 2.3 definimos, explicamos la importancia y damos ejemplos de geodésicas. Para continuar, en la sección 2.4 desglosaremos el concepto de curvatura y resolveremos un ejemplo en donde calculamos las curvaturas descritas. En la sección 2.5, mencionamos brevemente a los Campos de Jacobi. Finalmente, en la sección 2.6, mostramos uno de las aplicaciones más clásicas de las formas diferenciales a la física.

2.1 Métricas

Definición 2.1.1. (Métrica Riemanniana) Una *métrica Riemanniana* en una variedad suave M es un campo 2-tensorial $g \in \mathbb{T}^2(M)$ que es simétrico y positivo definido. En otras palabras, $g(X, Y) = g(Y, X)$ y $g(X, X) > 0$ si $X \neq 0$. Una métrica Riemanniana define un producto interno en cada espacio tangente de $T_p M$, que se suele escribir $\langle X, Y \rangle := g(X, Y)$ para $X, Y \in T_p M$.

Nota: Una variedad con una métrica Riemanniana dada se conoce como *variedad Riemanniana*.

Ejemplo 2.1.1. (Métricas en \mathbb{R}^n)

Una métrica en \mathbb{R}^n se puede definir a través de una matriz simétrica donde las entradas dependen del punto. Es decir, podemos pensar a $g = (g_{ij})$, con ciertas condiciones para que sea positiva definida. En términos de tensores la métrica está dada por

$$g = \sum_{i=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$$

Ejemplo 2.1.2. (Métrica euclidiana)

\mathbb{R}^n es una variedad Riemanniana. La métrica euclidiana está dada por

$$g = \sum_{i=1}^n dx^i dx^i = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

La representación matricial de esta métrica es $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Ejemplo 2.1.3. (Plano hiperbólico)

En $\mathbb{H} = \{(x, y) \mid y > 0\}$ podemos definir la métrica dada por

$$g = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$$

que en términos de tensores se escribe como

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Esta es la llamada métrica hiperbólica.

Definición 2.1.2. (Métrica pseudo-Riemanniana) Una *métrica pseudo-Riemanniana* (también conocida como *semi-Riemanniana*) en una variedad M es campo 2-tensorial simétrico g no degenerado en cada punto $p \in M$. Es decir, $g(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_p M$ si y solo si $X = 0$. Toda métrica Riemanniana es pseudo-Riemanniana, pero no necesariamente son positivas.

Dada una métrica pseudo-Riemanniana g y un punto $p \in M$, podemos construir una base E_1, \dots, E_n para $T_p M$ en donde g sea la expresión

$$g = -(\phi^1)^2 - \dots - (\phi^r)^2 + (\phi^{r+1})^2 + \dots + (\phi^n)^2$$

para enteros $0 \leq r \leq n$. El número r es el índice de g .

Ejemplo 2.1.4. (Métrica de Minkowski)

Una *Métrica de Lorentz* son métricas pseudo-Riemannianas de índice 1. La métrica de Lorentz más importante es la *métrica de Minkowski*. Esta última métrica en \mathbb{R}^n se escribe en términos de coordenadas $(\chi^1, \dots, \chi^n, \tau)$ como

$$m = (d\chi^1)^2 + \dots + (d\chi^n)^2 - (d\tau)^2.$$

El caso particular en \mathbb{R}^4 es indispensable en la teoría especial de relatividad de Einstein.

Definición 2.1.3. (Isometría) Sean (M, g) y (N, h) variedades Riemannianas. Un difeomorfismo ϕ de M a N se llama *isometría* si $\phi^*h = g$. Esto es equivalente a decir

$$g(X, Y) = h(\phi_*(X), \phi_*(Y)) := h(D\phi(X), D\phi(Y)).$$

La composición de isometrías y la inversa de una isometría son también isometrías.

Ejemplo 2.1.5. (Isometrías en el espacio hiperbólico)

Sea h la métrica hiperbólica de la mitad superior en \mathbb{R}^2 dada por

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Comprobar que las siguientes transformaciones son isometrías de dicho espacio:

1. $T_1(x, y) = (x + a, y)$.
2. $T_2(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
3. $T(z) = -\frac{1}{z}$ donde $z = x + iy$.

Comprobemos primero para T_1

$$T_1^*(g) = T_1^* \left(\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \right) = \frac{dT_1(x)^2 + dT_1(y)^2}{T_1(y)^2} = \frac{d(x+a)^2 + d(y)^2}{y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Es similar para T_2 :

$$\begin{aligned} T_2^*(g) &= T_2^* \left(\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \right) = \frac{dT_2(x)^2 + dT_2(y)^2}{T_2(y)^2} \\ &= \frac{d(\lambda x)^2 + d(\lambda y)^2}{(\lambda y)^2} = \frac{\lambda(dx^2 + dy^2)}{\lambda y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Para T_3 los cálculos son un poco más complejos, pero también se puede demostrar. Primero, hay que hacer la conversión de $T_3 = \frac{-1}{z}$ a nuestras coordenadas (x, y) . Usando productos notables y separando la parte real de la imaginaria, nos damos cuenta que T_3 es equivalente a $T_3 = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$. Por lo tanto,

$$T_3^*(g) = \frac{d \left(\frac{-x}{x^2+y^2} \right)^2 + d \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)^2}{\left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)^2}.$$

Se procede a hacer la derivada exterior, elevar al cuadrado, se cancelan varios términos y se llega a que sí es isometría.

Definición 2.1.4. (Grupo de Poincaré) El grupo de Poincaré es el grupo de isometrías en el espacio-tiempo de Minkowski. Este grupo contiene 10 transformaciones: 4 traslaciones (3 espaciales y 1 temporal), 3 reflexiones por un

plano y 3 *boost de Lorentz* (una por cada dimensión espacial). Analicemos más a fondo esta definición. Una traslación de un vector $u = (t_0, x_0, y_0, z_0)$ por un vector $v = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ se puede escribir como

$$T_v(u) = u + v.$$

Si tomamos como referencia la métrica 2.1.4 para el caso \mathbb{R}^4 y hacemos el pullback, comprobaremos fácilmente que es isometría. Ahora queremos demostrar que el grupo de Lorentz también es isometría del espacio-tiempo de Minkowski. Para ello, recordemos que el grupo de Lorentz está definido como

$$\mathcal{O}(1, 3) = \{A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos comprobar que la transformación dada por $T(v) = Av$ con $A \in \mathcal{O}(3, 1)$ es isometría. Para ello, primero reescribimos esta transformación más explícitamente

$$T(v) = Av = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}t + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z \\ a_{21}t + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z \\ a_{31}t + a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z \\ a_{41}t + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z \end{pmatrix}.$$

Hacemos el pullback de la transformación

$$\begin{aligned} T^*(g) &= -d(T^*(t))^2 + d(T^*(x))^2 + d(T^*(y))^2 + d(T^*(z))^2 \\ &= -d(a_{11}t + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z)^2 + \cdots + d(a_{41}t + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z)^2. \end{aligned}$$

Si desarrollamos esta derivada exterior nos daremos cuenta que las cuentas son muy largas. Para ahorrar espacio, cambiaremos un poco la notación. Ahora, $x_1 = t, x_2 = x, x_3 = y, x_4 = z$. Con esto, podemos escribir nuestro resultado como

$$\begin{aligned} T^*(g) &= \sum_{j=2}^4 \left(\sum_{i=2}^4 a_{ji} dx_i \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^4 a_{jk} dx_k \right) - \left(\sum_{i=1}^4 a_{1i} dx_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^4 a_{1j} dx_j \right) \\ &= (-a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2) dx_1 \otimes dx_1 + \sum_{j=2}^4 \left(\sum_{i=2}^4 a_{ij}^2 - a_{1i}^2 \right) dx_j \otimes dx_j \\ &\quad + \sum_{i \neq k}^4 \left(\sum_{j=2}^4 a_{ji} a_{jk} - a_{1i} a_{1k} \right) dx_i \otimes dx_k. \end{aligned}$$

El lector puede verificarlo con más calma y hacer las sumas más explícitamente si lo desea.

2.2 Conexiones y derivada covariante

Definición 2.2.1. (Conexión) Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial sobre una variedad M y sea $\Gamma(E)$ el espacio de secciones suaves de E . Una *conexión* en E es un mapa

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

escrito como $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ que satisface:

1. $C^\infty(M)$ lineal en X

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y.$$

2. \mathbb{R} lineal en Y

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2.$$

3. Regla del producto (Leibniz)

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y.$$

El símbolo ∇ se lee *del* y a $\nabla_X Y$ se le llama *derivada covariante de Y en dirección X* (Figura 2.1).

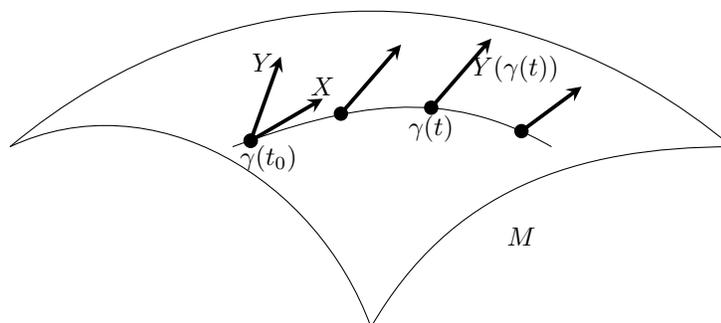


Figure 2.1: Interpretación de $\nabla_X Y$.

Definición 2.2.2. (Conexión lineal) Una conexión lineal en M es una conexión en TM , es decir,

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M).$$

Esta conexión cumple, evidentemente, con todas las propiedades de la definición 2.2.1.

Definición 2.2.3. (Símbolos de Christoffel) Sea $\{E_i\}$ un marco local para $T_p M$ en un subconjunto abierto $U \subset M$. Podemos expandir $\nabla_{E_i} E_j$ como:

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

La conexión queda entonces definida por n^3 funciones Γ_{ij}^k definidas en U . Dichas funciones son llamadas *Símbolos de Christoffel*.

Teorema 2.2.1. *Sea ∇ una conexión lineal y sean $X, Y \in \mathcal{T}(U)$. Podemos expresar X, Y en términos de un marco local como $X = X^i E_i, Y = Y^i E_i$. Entonces,*

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k.$$

Un caso particular de interés se da cuando $E_i = \partial_i$. En este caso, se tiene que

$$\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k.$$

Definición 2.2.4. (Campo vectorial extendible) Un campo vectorial V a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow M$ se conoce como *extendible* si existe un campo vectorial W en una vecindad de la imagen de γ que cumple que para todo $t \in I, V(t) = W_{\gamma(t)}$. No todo campo vectorial a lo largo de una curva es extendible. Por ejemplo, si $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, pero sus derivadas respecto a la variable t no son iguales (usando una notación clásica en mecánica, $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$) entonces $\dot{\gamma}$ no es extendible.

Definición 2.2.5. (Derivada covariante) Sea ∇ una conexión en M y γ una curva $\mathcal{T}(\gamma)$. Si \mathcal{T} es el conjunto de campos diferenciables definidos a lo largo de γ , entonces, para cada curva γ , ∇ define un operador único

$$D_T : \mathcal{T}(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. Es lineal sobre \mathbb{R} . Si $a, b \in \mathbb{R}$

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW.$$

2. Regla del producto. Para $f \in C^\infty(I)$

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV.$$

3. Si V es extendible, entonces para toda extensión W de V ,

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}W.$$

Para todo $V \in \mathcal{T}, D_tV$ se llama *derivada covariante de V a lo largo de γ* .

Nota: una notación alternativa de la derivada covariante es $\frac{D}{dt}$.

Definición 2.2.6. (Torsión)

El *tensor de torsión* de una conexión lineal es un campo $\binom{2}{1}$ tensorial

$\tau : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ definido por

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Una conexión *nabla* se denomina *simétrica* si la torsión es igual a cero. Es decir, si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Teorema 2.2.2. (Lemma fundamental de la geometría Riemanniana)

Sea (M, g) una variedad Riemanniana o pseudo-Riemanniana. Existe una única conexión lineal ∇ en M , llamada conexión de Levi-Civita, que es compatible con la métrica y es libre de torsión (simétrica, definición 2.2.6). Que sea compatible con la métrica significa que para cualesquiera campos vectoriales X, Y, Z , se cumple que:

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Es decir, $\nabla_g = 0$.

Demostración

Si ∇ es simétrica y compatible con la métrica, entonces, para $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Usamos la condición de simetría y tenemos que:

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle. \end{aligned}$$

Si sumamos las primeras dos igualdades y restamos la tercera, entonces,

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

De aquí, obtenemos la *fórmula de Koszul*:

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle \quad \square$$

La fórmula de Koszul es muy útil porque nos da una expresión para calcular los símbolos de Christoffel. Para ello, consideremos $\partial_i, \partial_j, \partial_l$ como nuestros campos vectoriales. Además, usando el hecho de que $[\partial_a, \partial_b] = 0$, tenemos que:

$$2 \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_l, \partial_i \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle.$$

Ahora, usamos la definición de los coeficientes de la métrica (definición 2.1.1) y la de los símbolos de Christoffel (definición 2.2.3) para obtener:

$$\Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Finalmente, multiplicamos ambos lados por la matriz inversa g^{lk} y usamos que $g_{ml} g^{lk} = \delta_m^k$. Entonces, la expresión que buscamos es:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (2.1)$$

De la ecuación anterior, podemos notar fácilmente que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

2.3 Geodésicas

Queremos encontrar una definición para curvas que sean el equivalente a *líneas rectas* en \mathbb{R}^n . Para evitar inconsistencias cuando hagamos cambios de coordenadas, usaremos toda la maquinaria introducida en el capítulo para definir un nuevo concepto: *la geodésica*.

Definición 2.3.1. (Geodésica) Sea M una variedad con una conexión lineal ∇ y sea γ una curva en M . La *aceleración* de γ es el campo vectorial $D_t\dot{\gamma}$ a lo largo de γ . Una curva γ es una *geodésica* respecto a ∇ si su aceleración es nula. En otras palabras, $D_t\dot{\gamma} = 0$.

Teorema 2.3.1. Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva cuya imagen está contenida en el dominio de una carta (U, ϕ) con coordenadas x_i . Entonces, γ es una geodésica si y solo si

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \Gamma_{ij}^k + \frac{d^2x_k}{dt^2} = 0. \quad (2.2)$$

Teorema 2.3.2. (Existencia y unicidad de geodésicas). Sea M una variedad con una conexión lineal. Para todo $p \in M$, todo $V \in T_pM$ y cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un único intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ conteniendo a $t : 0$ y una geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ que satisface $\gamma(t_0) = p, \dot{\gamma}(t_0) = V$. Cualesquiera dos geodésicas concuerdan en su dominio en común.

Demostración: Elijamos coordenadas $(x_i)_n$ en una vecindad U de p . Del teorema 2.3.1, sabemos que la geodésica debe cumplir la ecuación 2.2. Realmente, esta expresión es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones $x^i(t)$. A continuación, introducimos las variables auxiliares $v^i = \dot{x}^i$ para obtener las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}^k &= v^k(t) \\ \dot{v}^k &= -v^i(t)v^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) \end{aligned}$$

La existencia y la unicidad son consecuencia directa de los teoremas para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 2.3.2. (Totalmente geodésico) Una subvariedad $N \subset M$ es *totalmente geodésica* si para toda geodésica γ en M tal que $\gamma(0) \in N$ y $\dot{\gamma}'(0) \in T_{\gamma(0)}N$, γ está totalmente contenida en N .

Ejemplo 2.3.1. (Geodésicas en el espacio euclidiano).

Gracias a las definiciones anteriores podemos comprobar que las geodésicas en el espacio plano son líneas rectas. Si estamos en \mathbb{R}^n con la métrica euclidiana (ejemplo 2.1.2), entonces todos los símbolos de Christoffel son cero porque todos los coeficientes de la métrica son constantes y se anulan al derivarlos (ecuación 2.1). Por lo tanto, usando la ecuación 2.3.1 y resolviéndola para este caso particular, obtenemos ecuaciones de líneas rectas, como era esperado.

Ejemplo 2.3.2. (Geodésicas en el espacio hiperbólico).

Ahora, consideremos el modelo del ejemplo 2.1.3. Calcularemos sus geodésicas e interpretaremos los resultados. Primero, usamos la ecuación 2.1 en nuestra métrica (Ejemplo 2.1.3). Como estamos usando la convención de suma de Einstein, realmente la ecuación 2.1 es un suma que corre por el índice l . Escribiremos explícitamente uno de los símbolos, pero los demás se calculan de la misma manera:

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2} (g^{11}(\partial_y g_{11} + \partial_x g_{12} - \partial_x g_{12}) + g^{12}(\partial_y g_{21} + \partial_x g_{22} - \partial_y g_{12})) = \dots \\ &\dots = \frac{y^2}{2} \left(\frac{-2}{y^3} \right) = \frac{-1}{y}.\end{aligned}$$

El resto de los Símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{y} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 &= \frac{-1}{y}.\end{aligned}$$

Ahora, usamos la ecuación 2.2 para obtener las ecuaciones que definirán las geodésicas:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} = 0$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{y} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = 0.$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, consideramos la función $\frac{y(\dot{x}-\dot{y})}{\dot{x}^2}$. En ella, insertamos la parte izquierda de nuestras ecuaciones geodésicas. Este se puede hacer porque son iguales a cero:

$$\frac{y}{\dot{x}^2} \left(\dot{x} \left(\ddot{y} + \frac{1}{y} \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \right) - \dot{y} \left(\ddot{x} - \frac{2}{y} \dot{x} \dot{y} \right) \right) = 0$$

Manipulando un poco esta ecuación se puede llegar a que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{y\dot{y}}{\dot{x}} + x \right] = 0.$$

Por lo tanto, $\frac{y\dot{y}}{\dot{x}} + x$ es igual a una constante, nombrémosle, C . Si esta nueva igualdad la multiplicamos por \dot{x} e integramos, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{y\dot{y}}{\dot{x}} + x = C$$

$$\int (y\dot{y} + x\dot{x})dt = \int C\dot{x}dt$$

$$\frac{1}{2}(y^2 + x^2) = Cx + A$$

en donde A es simplemente la constante de integración. De aquí, fácilmente podemos verificar que

$$x^2 + y^2 - ax = b.$$

Esta última ecuación es la ecuación geodésica para el plano hiperbólico. Nótese que son circunferencias que cortan en 90° el eje x (Figura 2.2).

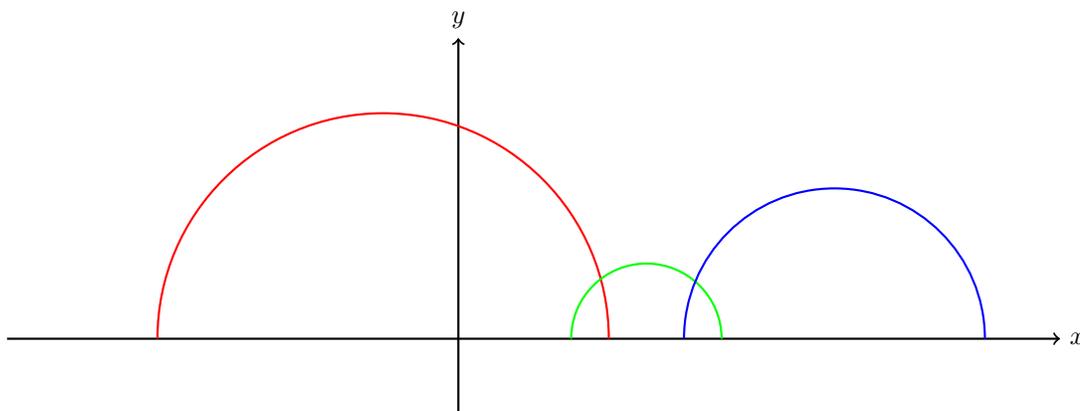


Figure 2.2: Geodésicas en el plano hiperbólico.

2.4 Curvatura

Ya solo nos falta un último ingrediente antes de adentrarnos en la relatividad. Para ello, tenemos que definir de manera formal la curvatura una variedad M .

De manera intuitiva, sabemos que un círculo es curvo y una línea recta no lo es. Sabemos, además, que un círculo pequeño es más curvo que un grande. Sin embargo es más complicado precisar qué tan más curvo es un círculo de radio 3 comparado con uno de radio 5. Nuestro problema empeora si también contamos otras superficies e intentamos compararlas entre ellas. Nuestro objetivo en esta sección es definir una cantidad que nos indique qué tan curvo es un objeto.

2.4.1 Curvatura Gaussiana

Comenzemos estudiando el caso particular de una superficie vista como la gráfica de una función f con valores reales, es decir,

$$S = \{(x, y, z) | z = f(x, y)\}.$$

Recordemos además la matriz hessiana estudiada en cálculo:

$$B = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Como la matriz es simétrica, sus valores propios λ_1, λ_2 son reales.

Definición 2.4.1. (Curvatura gaussiana) Los valores propios λ_1, λ_2 de la matriz hessiana de f sobre un punto crítico (x_0, y_0) se llaman *Curvaturas principales* de S en el punto (x_0, y_0, z_0) . El producto de λ_1, λ_2 se denomina *curvatura gaussiana*.

$$K(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \lambda_2. \quad (2.3)$$

Más aún, al promedio de λ_1, λ_2 se le conoce como *curvatura media*.

Podemos generalizar más este concepto.

Teorema 2.4.1. *La curvatura gaussiana K de una superficie S en un punto $p \in S$ es igual al cociente del determinante de la segunda forma fundamental entre el determinante de la primera forma fundamental:*

$$K(p) = \frac{\det B}{\det G} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg - f^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (2.4)$$

recordando que $e = -\langle \mathbf{N}, \varphi_{\mathbf{u}\mathbf{u}} \rangle, g = -\langle \mathbf{N}, \varphi_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \rangle, f = -\langle \mathbf{N}, \varphi_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \rangle$ y que g_{ij} son simplemente los coeficientes de la métrica.

Teorema 2.4.2. (Egregio de Gauss) *La curvatura gaussiana de una superficie es invariante bajo isometrías locales. Es decir, dos superficies que son localmente isométricas tienen la misma curvatura.*

Como corolario del teorema anterior, no se puede construir ningún mapa de la Tierra que preserve de forma isométrica una región de la Tierra; la esfera y el plano tienen diferente curvatura.

2.4.2 Tensor de curvatura

Definición 2.4.2. (Endomorfismo de curvatura)

Sea M una variedad Riemanniana. Entonces, el *endomorfismo de curvatura Riemanniana* es el mapa $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ definido por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Este endomorfismo es un campo tensorial de tipo $\binom{3}{1}$.

Definición 2.4.3. (Tensor de curvatura de Riemman)

El *tensor de curvatura de Riemman* es un campo 4 tensorial covariante definido por:

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

y en coordenadas se escribe como

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$$

donde $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$.

Teorema 2.4.3. *El tensor de curvatura tiene las siguientes propiedades de simetría:*

1. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$
2. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$
3. $R(X, Y, Z, W) = -R(Z, W, X, Y)$
4. $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$

La propiedad número 4 es conocida como *Primera identidad de Bianchi* o también como *identidad de Bianchi algebraica*.

2.4.3 Tensor de Ricci y curvatura escalar

Trabajar con 4-tensores es bastante engorroso. Por ello, es más conveniente trabajar con tensores de menor grado que tengan un resumen de la información del tensor de curvatura. Esta función la cumple el *tensor de Ricci*.

Definición 2.4.4. (Tensor de Ricci) El *tensor de Ricci* es un campo covariante 2-tensorial definido como la traza del endomorfismo de curvatura en su primer y último índice. Suele denotarse por Ric o por Rc . Visto por componentes es

$$Ric_{ij} := R_{kij}^k = g^{km} R_{kijm}. \quad (2.5)$$

Definición 2.4.5. (Curvatura escalar)

La curvatura escalar es la función S es definida como la traza del tensor de Ricci.

$$S := tr_g Ric = R_i^i = g^{ij} Ric_{ij} \quad (2.6)$$

Definición 2.4.6. (Curvatura seccional) Sea M una n -variedad Riemanniana y sea $p \in M$. Si Π es un subespacio 2-dimensional de $T_p M$ y $\mathcal{V} \subset T_p M$ es una vecindad en la que exp_p es un difeomorfismo. Entonces, $S_\Pi := exp_p(\Pi \cup \mathcal{V})$ es una subvariedad 2-dimensional de M que contiene a p llamado *plano seccional* determinado por Π (figura 2.3).

Nótese que S_Π es solo el conjunto trazado por las geodésicas cuyos vectores tangentes iniciales se encuentran en Π . Definimos la *curvatura seccional* de M asociada a Π , denotada por $K(\Pi)$ como la curvatura gaussiana (teorema 2.4.1) de la superficie S_Π en P con la métrica inducida. Si (X, Y) es una base para Π , también podemos usar la notación $K(X, Y)$ para $K(\Pi)$.

Si (X, Y) es una base para un 2-plano $\Pi \subset T_p M$, entonces,

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}. \quad (2.7)$$

Teorema 2.4.4. (Identidad contraída de Bianchi) *Las derivadas covariantes del Ricci y la curvatura escalar satisfacen la siguiente identidad:*

$$div Ric = \frac{1}{2} \nabla S$$

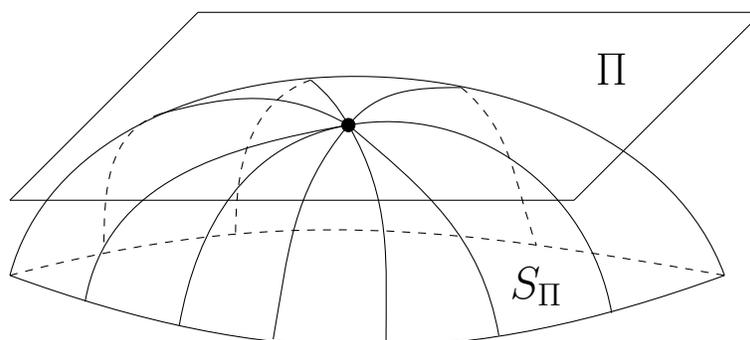


Figure 2.3: Plano seccional

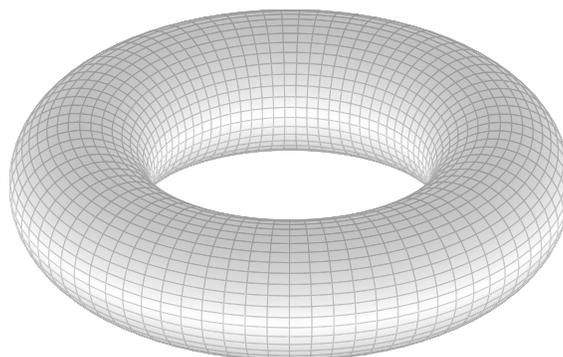


Figure 2.4: Representación del toro. Recuperado de TikZBlog

o visto por componentes,

$$R_{i;j}^j = \frac{1}{2} S_{;i}$$

Ejemplo 2.4.1. (Curvatura de un toro). Consideremos el toro en \mathbb{R}^3 con la siguiente parametrización (figura 2.4)

$$x = (a + b \cos u) \cos v$$

$$y = (a + b \cos u) \sin v$$

$$z = b \sin u$$

y calculemos su curvatura gaussiana, los elementos de su tensor de curvatura, su curvatura de Ricci y su curvatura escalar.

Curvatura gaussiana

Este es un procedimiento bastante largo. No haremos explícitamente todos los pasos pero sí explicaremos cómo llegar al resultado (en caso de que el

lector quiera corroborar haciendo sus propios cálculos). Primero, calculamos $\varphi_u, \varphi_v, \mathbf{N}, \varphi_{uu}, \varphi_{vv}$ y φ_{uv} . Con estos vectores, podemos hacer todo los productos internos necesarios para sustituir en la ecuación 2.4. Finalmente, obtenemos que

$$K = \frac{\cos v}{b(a + b \cos v)}$$

Tensor de curvatura

Escribiremos explícitamente solo uno de los componentes no nulos del tensor de Riemman para ejemplificar cómo se calcula. Antes que nada, debemos de calcular los símbolos de Chritoffel. En este caso, los símbolos no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma_{vu}^u &= \Gamma_{uv}^u = \frac{-b \sin v}{(a + b \cos v)} \\ R_{vuv}^u & \\ \Gamma_{uu}^v &= \frac{1}{a} \sin v (a + b \cos v). \end{aligned}$$

Ahora, debemos obtener las derivadas parciales de dichos símbolos

$$\begin{aligned} \Gamma_{uv,v}^u &= \Gamma_{vu,v}^u = \frac{(b \sin v)^2}{(a + b \cos v)^2} - \frac{b \cos v}{(a + b \cos v)} \\ \Gamma_{uu,v}^v &= \frac{1}{b} (a \cos v + b \cos^2 v - b \sin^2 v). \end{aligned}$$

Con estos resultados, podemos calcular los componentes de tensor de curvatura de Riemann.

$$R_{vuv}^u = -R_{vvu}^u = \Gamma_{vv,u}^u - \Gamma_{vu,v}^u - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{vu}^u - \Gamma_{vv}^u \Gamma_{vu}^v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{vv}^u + \Gamma_{vu}^u \Gamma_{vv}^v = \frac{b \cos v}{a + b \cos v}$$

Similarmente,

$$R_{uu}^v = -R_{uvu}^v = -\frac{1}{b} \cos v (a + b \cos v).$$

Los demás componentes son cero.

Ricci y curvatura escalar

Para esta sección, usaremos la ecuación 2.5.

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= R_{imj}^m \\ Ric_{uu} &= R_{umu}^m = \frac{1}{b} \cos v (a + b \cos v) \\ Ric_{vv} &= R_{vmv}^m = \frac{b \cos v}{a + b \cos v} \end{aligned}$$

De forma matricial podemos expresar el tensor de Ricci como

$$Ric_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \cos v (a + b \cos v) & 0 \\ 0 & \frac{b \cos v}{a + b \cos v} \end{bmatrix}$$

Finalmente, para la curvatura escalar usamos la ecuación 2.5

$$S = g^{ij} Ric_{ij} = g^{uu} Ric_{uu} + g^{vv} Ric_{vv} = \left(\frac{1}{(a + b \cos v)^2} \right) \left(\frac{1}{b} \cos v (a + b \cos v) \right) + \left(\frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{b \cos v}{a + b \cos v} \right)$$

$$S = \frac{2 \cos v}{b(a + b \cos v)}$$

Nótese que la curvatura escalar es dos veces la curvatura gaussiana.

2.5 Campos de Jacobi

Nos interesa saber cómo la curvatura afecta a las geodésicas cercanas entre sí. De manera burda, la curvatura positiva hace que las geodésicas converjan (pensemos en los círculos máximos de una esfera, por ejemplo) y una curvatura negativa que diverjan. Necesitamos una medida cuantitativa de este efecto de la curvatura. Para ello, definimos la ecuación de Jacobi

Teorema 2.5.1. (Ecuación de Jacobi) *Sea γ una geodésica y V un campo vectorial a lo largo de γ . Si V es un campo variacional a través de geodésicas, entonces V satisface*

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 \quad (2.8)$$

Cualquier campo vectorial a lo largo de una geodésica que satisface la ecuación de arriba es un Campo de Jacobi.

Sea J un campo de Jacobi, $e_1(0) = \dot{\gamma}(0)/|\dot{\gamma}(0)|$ y extendámos esto para tener una base ortonormal $\{e_i(0)\}$ en $T_{\gamma(0)}M$. Hacemos transporte paralelo para obtener una base $\{e_i(t)\}$ para todo γ . Esto da una base ortonormal con $e_1(t) = \dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|$. El campo de Jacobi puede ser escrito en coordenadas en términos de la base como $J(t) = y^k(t)e_k(t)$, es decir,

$$\dot{J} = \sum_k \frac{dy^k}{dt} e_k(t), \quad \ddot{J} = \sum_k \frac{d^2 y^k}{dt^2} e_k(t)$$

y la ecuación de Jacobi puede reescribirse como un sistema

$$\frac{d^2 y^k}{dt^2} + |\dot{\gamma}|^2 \sum_j y^j(t) \langle R(e_j(t), e_1(t))e_1(t), e_k(t) \rangle = 0$$

para cada k . De esta manera obtenemos una ecuación diferencial ordinaria.

2.6 Ecuaciones de Maxwell usando formas

Una de las aplicaciones más conocidas de las formas diferenciales en física es escribir las ecuaciones de Maxwell de forma más compacta. Para ello, introduzcamos primero un operador que nos ayudará a dicha tarea: *La estrella de Hodge*.

Definición 2.6.1. (Estrella de Hodge) El operador *estrella de Hodge* \star es un mapeo de k -formas a l -formas en una variedad n -dimensional. Si tenemos una base ortonormal de 1-formas, es decir,

$$\langle dx_i, dx_j \rangle = 0$$

si $i \neq j$ y también

$$\langle dx_i, dx_i \rangle = \epsilon(i)$$

con $\epsilon = \pm 1$, entonces, para distintos $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq l$ se tiene que

$$\star(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}, \dots, \wedge dx_{i_k}) = \pm dx_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}.$$

En donde i_{k+1}, \dots, i_l son enteros desde 1 hasta l no incluidos en i_1, \dots, i_k y el signo \pm es dado por

$$\text{sign}(i_1, \dots, i_l) \epsilon(i_1) \dots \epsilon(i_k)$$

Ejemplo 2.6.1. (Ejemplos de uso del operador de Hodge)

Para este ejemplo, tomemos \mathbb{R}^3 con la base dx, dy, dz de 1-formas. Entonces tenemos que

$$\star dx = dy \wedge dz$$

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\star dy \wedge dx = -dz$$

Ejemplo 2.6.2. (Ecuaciones de Maxwell con formas) Ahora, ya somos capaces de reducir elegantemente las cuatro ecuaciones de Maxwell (en su forma diferencial) a solamente 2. Para ello, consideremos \mathbb{R}^4 con coordenadas (t, x_1, x_2, x_3) y la métrica dada por $g = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Definimos las formas

$$F = B + dt \wedge E$$

$$B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

$$E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$$

$$J = J_1 dy \wedge dz + J_2 dz \wedge dx + J_3 dx \wedge dy$$

$$\mathcal{J} = c\mu_0 J \wedge dt + (\rho/c\epsilon_0) dx \wedge dy \wedge dz$$

Las 4 ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

pueden reescribirse como

$$dF = 0$$

$$d \star F = 0$$

Nota: No confundir los campos eléctrico y magnético \mathbf{E}, \mathbf{B} con las formas E, B .

Comprobarlo es un bonito pero tedioso ejercicio. Se debe sustituir F en ambas ecuaciones y hacer las operaciones como en los ejemplos 1.4.1 y 2.6.1. Finalmente, podemos hacer una correspondencia entre las formas obtenidas y \mathbb{R}^3 . Es decir, hay una relación entre el operador de Hodge y los operadores diferenciales.

Chapter 3

Solución de Schwarzschild

Ya que tenemos lo necesario para entender la ecuación de Einstein, explicaremos a detalle una de las primeras y más importante soluciones: la solución de Schwarzschild. Iniciaremos, como hemos hecho en los capítulos anteriores, con algunas definiciones importantes usando lo aprendido hasta el momento (sección 3.1). Después, desarrollaremos una manera de llegar a la famosa *métrica de Schwarzschild*, la solución que estamos buscando (sección 3.2). Finalmente, en la última sección de este capítulo, ahondaremos en cómo esta métrica explica fenómenos astronómicos (sección 3.3).

3.1 Preliminares

Definición 3.1.1. (Espacio-tiempo)

El espacio tiempo en relatividad especial es un espacio de Minkowski en \mathbb{R}^4 , como se mencionó en el ejemplo 2.1.4. Dependiendo el autor, la signatura es $(+ - - -)$, o bien $(- + + +)$. En esta sección usaremos la primera convención. Nuestro sistema de coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3) puede verse como el punto de vista de un observador que se percibe a sí mismo en reposo. La coordenada x_0 representa el tiempo medido por su observador y los hiperplanos cuando $x_0 = cte$ describen el espacio visto por este mismo observador. La historia de dicho observador se describe con la curva $\alpha(t) = (t, a, b, c)$ para cada tiempo t .

Como principio, tenemos que la velocidad de cualquier partícula relativa al observador debe ser menor a la de la velocidad de la luz (que tomamos como 1), implica que

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 < 1$$

o, equivalentemente,

$$\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 > 0.$$

Definición 3.1.2. (Vectores tipo tiempo, tipo espacio y tipo luz)

El espacio-tiempo de la relatividad general es una 4-variedad suave M con métrica de Minkowski (+—). Un vector tangente v en un punto de M es de *tipo tiempo* si $g(v, v) > 0$, de *tipo espacio* si $g(v, v) < 0$ y *tipo luz* o *nulo* si $g(v, v) = 0$. Una partícula con masa en M se describirá con una *curva tipo luz* y una partícula sin masa, como el fotón, seguirá una *curva tipo luz*.

Definición 3.1.3. (Tensor de energía-momento)

El *tensor de energía-momento* T , también conocido como *de energía-impulso* o *de tensión-energía* es un campo 2-tensorial covariante simétrico en M . Para la 4-velocidad de una partícula de prueba que pasa por un punto $p \in M$ (observador infinitesimal) el tensor T representa la *densidad de energía* en p medida por v de la distribución de masa-energía en el espacio-tiempo.

Los componentes de este tensor pueden expresarse en en una matrix 4×4 de la siguiente manera:

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}.$$

Podemos diferenciar entre las distintas componentes de la siguiente manera tomando en cuenta que k y l varían de 1 a 3.

- El componente tiempo-tiempo (T^{00}) es la densidad de la masa relativista, es decir, la densidad de energía dividida entre la velocidad de la luz al cuadrado mientras está en un marco de referencia co-móvil (o sea, que el marco de referencia está en reposo desde el punto de vista de alguna partícula).
- Los componente $T^{0k} = T^{k0}$ son el flujo de la masa relativista a través de la superficie x^k .
- Los componentes T^{kl} representan el flujo del momento lineal del elemento k -ésimo a través de la superficie x^l .
- Los elementos T^{kk} representan la tensión en la dirección de la coordenada k -ésima. También se les llama *presión*.

Definición 3.1.4. (Ecuación de campo de Einstein) En relatividad general, la métrica de Lorentz g se interpreta como un potencial gravitatorio. Como tal, debe estar relacionado con una ecuación de campo a la distribución de masa-energía que genera dicho campo gravitacional. La ecuación que propuso Einstein es

$$Ric - \frac{1}{2}Sg = T. \quad (3.1)$$

En donde T es el tensor de energía- momento, g es la métrica, Ric es el Ricci y S es la curvatura escalar.

Una solución de la ecuación de Einstein es encontrar una métrica g y un tensor T que satisfaga las condiciones que imponamos. Antes de continuar, tenemos que hacer algunas consideraciones físicas. En primer lugar, el tensor de energía-momento debe tener divergencia cero ($\nabla T = 0$) en concordancia con las leyes de conservación. Además es importante notar que en el límite clásico, la ecuación de campo de Einstein se reduce a la ecuación de Poisson que describe la gravedad newtoniana. En el caso de que $T = 0$ (el vacío), simplemente debemos encontrar una métrica g que cumpla $Ric - \frac{1}{2}Sg = 0$. Si aplicamos la traza a ambos lados de la ecuación de Einstein, vemos que

$$S = -traza(\tilde{T})$$

en donde \tilde{T} se define como $g(\tilde{T}(u), w) = T(u, v)$ para todo $v, w \in M_p, p \in M$. Por lo tanto, si $T = 0$, entonces la ecuación de Einstein (Ecuación 3.1) es simplemente $Ric = 0$. Por lo tanto, las curvaturas de Ricci planas son soluciones para la ecuación de Einstein en el vacío.

3.2 Métrica de Schwarzschild

Una de las soluciones más importantes a la ecuación de Einstein es la que encontró el astrónomo y físico alemán Karl Schwarzschild en 1916. Fue una de las primeras soluciones analíticas y describe el campo gravitacional afuera de una estrella estática, esférica y aislada (sin carga). Schwarzschild resolvió la ecuación cuando estaba en el ejército durante la primera guerra mundial. Desafortunadamente, falleció poco tiempo después de publicar su resultado.

Definición 3.2.1. (Campo vectorial de Killing) Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana. Un campo vectorial X en M es de Killing si el grupo local de difeomorfismos asociado a X consiste en isometrías.

Definición 3.2.2. (Espacio-tiempo estático) Un espacio-tiempo M es *estático* si existe en M un campo vectorial de Killing no nulo X tal que la distribución de 3-planos ortogonales a X es integrable. Por distribución de planos entendemos que a cada punto lo manda a un plano. Entendemos integrabilidad como la condición $[X, Y] \in \mathcal{D}$ si $X, Y \in \mathcal{D}$. Dicha distribución serán hipersuperficies de tipo espacio que son localmente isométricas entre sí. Localmente, estas superficies son $t = cte$ para una función temporal.

Definición 3.2.3. (Espacio-tiempo esféricamente simétrico) Un espacio tiempo M es *esféricamente simétrico* si existe una acción isométrica del grupo ortogonal especial $SO(3)$ en M en donde sus órbitas son una 2-superficie tipo espacio o un punto. Las órbitas 2-dimensionales tendrán necesariamente curvatura positiva, es decir, serán esféricas.

Recordar que dada una acción $\Psi : G \times X \rightarrow X$ de un grupo G sobre un conjunto X , donde denotamos $\Psi(g, x) = gx$. La órbita de un punto se define por

$$Gx = \{gx \mid g \in G.\}$$

Es decir, es la imagen bajo la acción del grupo.

Las definiciones de *estático* y *esféricamente simétrico* se satisfacen en la variedad $M = \mathbb{R} \times I \times S^2$ siendo I un intervalo abierto con una métrica producto alabiado (warped product)

$$g = F^2(\rho)dt^2 - d\rho^2 - G^2(\rho)\sigma^2. \quad (3.2)$$

en donde t y ρ son las coordenadas de \mathbb{R} e I , respectivamente. Físicamente, representan el tiempo y un intervalo (veremos más adelante que se interpreta como un radio). Asimismo, $d\sigma^2$ es la métrica estándar en S^2 con curvatura constante 1, es decir, $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$. Nuestro objetivo ahora es encontrar el tensor de Ricci para esta métrica y encontrar las condiciones de las funciones F y G que lleven a una curvatura de Ricci cero.

Notemos que para cada $t \in \mathbb{R}$ la hipersuperficie $\{t\} \times I \times S^2$ es totalmente geodésico porque es el conjunto de puntos fijos de una reflexión isométrica, en este caso, inversión del tiempo. Recordemos que las geodésicas van a geodésicas por medio de isometrías. Como todo campo vectorial de longitud constante normal a una hipersuperficie totalmente geodésica es paralela a lo largo de la hipersuperficie (es decir, al hacerle transporte paralelo el campo queda igual), se sigue que $R(Y, Z)X = 0$ cuando X es tangente a \mathbb{R} y Y, Z son perpendiculares a X . Para ver más claramente esto último Esto implica que $\frac{\partial}{\partial t}$ es un eigenvector del tensor *Ric*. Para verlo de forma más clara,

$$\text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = A \frac{\partial}{\partial t} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z} + D \frac{\partial}{\partial w}$$

es un endomorfismo. Se puede probar que las constantes B, C, D son cero con las propiedades de simetría del tensor de Riemman. Entonces, $\frac{\partial}{\partial t}$ es un eigenvector del tensor *Ric*. Similarmente, la hipersuperficie $\mathbb{R} \times I \times S^1$ es totalmente geodésica en M para cada gran círculo S^1 en S^2 (es el conjunto de puntos fijos de una reflexión de S^2) y por ello, $R(y, z)x = 0$ cuando x es tangente a S^2 y y, z son perpendiculares a x . Por lo tanto, cada vector tangente al factor S^2 es también un eigenvector de *Ric*.

Se sigue que los espacios tangentes para los factores \mathbb{R} , S^2 e I son, por ortogonalidad, eigenespacios de *Ric*. Por lo tanto, el tensor de Ricci es diagonal relativo a la estructura producto de M y solo necesitamos calcular sus componentes diagonales. Las componentes de la diagonal del tensor de Ricci se pueden expresar como suma de curvaturas seccionales.

Las curvaturas seccionales que nos interesan puede obtenerse de la siguiente manera: notamos que la curva $\gamma_{t,q}(\rho) = (t, \rho, q)$ es una geodésica en M para cada $t \in \mathbb{R}$ y $q \in S^2$. Como está parametrizado por una longitud de arco y su trayectoria es un componente conectado a conjunto de puntos fijos del grupo de isometría generado por una reflexión de \mathbb{R} sobre t y reflexiones de círculos

máximos a través de q . El campo vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ es un campo de Jacobi sobre $\gamma_{(t,q)}$ y por lo tanto, tenemos que

$$K\left(\frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial \rho}\right) = \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \rho}}^2 \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle / \left\| \frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial \rho} \right\|^2 = \frac{F''}{F}.$$

Este es más evidente si recordamos la ecuación 2.7. Se llega a este resultado recordando que $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial \rho}$ son ortogonales entre sí y hacemos una normalización al vector $\frac{\partial}{\partial t}$.

De igual manera, para cada vector unitario x tangente a S^2 , $\partial/\partial\theta$ es un campo de Jacobi a lo largo de γ . Aquí θ representa la coordenada angular en el círculo máximo S^1 en S^2 generado por x . Por lo tanto,

$$K\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \wedge x\right) = \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \rho}}^2 \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle / \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial \rho} \right\|^2 = \frac{G''}{G}.$$

Lo que hemos logrado con esto es calcular la curvatura de subespacios totalmente geodésicos 2-dimensionales en coordenadas gaussianas. El resto de curvaturas seccionales las podemos obtener fijando $\rho = cte$. Para ello, notamos que la métrica inducida para estas hipersuperficies que viven en $\mathbb{R} \times \{\rho\} \times S^2$ es

$$g_\rho = F^2(\rho)dt^2 - G(\rho)d\sigma^2$$

y su segunda forma fundamental con respecto al campo vectorial $\partial/\partial\rho$ es dado por

$$\left(\frac{D}{\partial\rho}g_\rho\right)(x,y) = -2g_\rho(S \cdot x, y).$$

en donde

$$S = \begin{bmatrix} -FF'' & 0 \\ 0 & -GG'd\sigma^2 \end{bmatrix}.$$

En este caso la curvatura gaussiana es

$$K\left(\frac{\partial}{\partial t} \wedge x\right) = \frac{F'G'}{FG}$$

siempre y cuando x sea tangente a S^2 . Además,

$$K(x \wedge y) = \frac{-1}{G^2} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$

cuando ambas x, y son tangentes a S^2 . De aquí, deducimos que los valores propios del tensor Ric son r_t

$$r_t = \frac{F''}{F} + 2\frac{F'G'}{FG} \quad (3.3)$$

$$r_\rho = \frac{F''}{F} + 2\frac{G''}{G} \quad (3.4)$$

$$r_x = \frac{G''}{G} + \frac{F'G'}{FG} - \frac{1}{G^2} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2. \quad (3.5)$$

Con todos estos resultados, ya podemos abordar nuestra misión principal: resolver la ecuación de campo de Einstein cuando $Ric = 0$ para el producto alabiado $\mathbb{R} \times I \times S^2$. Primero, usemos la condición $Ric = 0$ para la ecuación 3.3

$$r_t = \frac{F''}{F} + 2\frac{F'G'}{FG} = \frac{F''G + 2F'G'}{FG} \cdot \left(\frac{G}{G}\right) = \frac{(F'G^2)'}{FG^2} = 0.$$

Esto nos dice que $F'G^2$ es constante, llamémosle m .

$$m = F'G^2 \quad (3.6)$$

Ahora, usemos el hecho que $r_\rho = r_t = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = r_\rho - r_t &= \frac{F''}{F} + \frac{2G''}{G} - \frac{F''}{F} - \frac{2F'G'}{FG} = \frac{2}{G}(G'' - F'G') \left(\frac{F}{F}\right) \\ &= \frac{2F}{G} \left(\frac{G'}{F}\right)'. \end{aligned}$$

Así, tenemos otra constante, G'/F . Si reescalamos t , podemos asumir que $G'/F = 1$. Entonces,

$$G' = F. \quad (3.7)$$

Y reescribiendo esta nueva igualdad en 3.6,

$$G'' = F' = \frac{m}{G^2}. \quad (3.8)$$

Sustituyendo 3.7 y 3.8 en 3.5 obtenemos que

$$r_x = \frac{1}{G^2} \left(\frac{2m}{G} - 1 + F^2\right).$$

Observamos que la condición $r_x = 0$ se cumple si y solo si

$$F = \left(1 - \frac{2m}{G}\right)^{1/2}.$$

En conclusión, la métrica 3.9 en $\mathbb{R} \times I \times S^2$ satisface la ecuación de campo de Einstein en el espacio vacío cuando $Ric = 0$ si

$$F = \frac{\partial G}{\partial \rho} = \left(1 - \frac{2m}{G}\right)$$

para alguna constante m .

Y así, llegamos a la métrica encontrada por Schwarzschild

$$g = \left(1 - \frac{2m}{\tilde{\rho}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{\tilde{\rho}}\right)^{-1} d\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}^2 d\sigma^2 \quad (3.9)$$

3.3 Implicaciones

La métrica de Schwarzschild (ecuación 3.9) se usa para modelar fenómenos en astronomía. En particular, podemos destacar las órbitas planetarias, el desvío de la luz cuando esta pasa cerca de una estrella y la precesión del perihelio de algunos planetas. En esta sección, explicaremos un poco más a detalle las órbitas planetarias y cómo desde la métrica de Schwarzschild podemos llegar a la tercera ley de Kepler. El lector interesado en las otras dos implicaciones puede consultar [4].

3.3.1 Órbitas planetarias

Como lo mencionamos anteriormente, la solución de Schwarzschild modela el campo gravitacional afuera de una estrella. La constante m se puede interpretar como la masa de una estrella. Consideremos un planeta de prueba orbitando la estrella. Su movimiento estará descrito por una geodésica de tipo tiempo γ en M . Esta γ será de la forma

$$\gamma(s) = (t(s), \rho(s), \theta(s)),$$

en donde θ es la coordenada angular de S^1 . La razón de esto es que dicha geodésica se encuentra en la subvariedad $\mathbb{R} \times I \times S^1$. Aquí, S^1 es el círculo máximo en S^2 generado por el componente S^2 de $\dot{\gamma}(s)$ para cualquier s . Se dice que la órbita es circular si $\rho = a$, siendo a constante. Por lo tanto, tenemos que

$$\dot{\gamma} = \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

También, utilizando la definición de los símbolos de Christoffel,

$$D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \ddot{t} \frac{\partial}{\partial t} + (\dot{t}^2 F F' - \dot{\theta}^2 G G')|_{\rho=a} \frac{\partial}{\partial \rho} + \ddot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

La ecuación geodésica nos dice que $D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, por lo tanto,

$$\ddot{t} = \ddot{\theta} = 0 \text{ y } \dot{\theta}^2 = \frac{F F'}{G G'}(a) \dot{t}^2.$$

Concluimos, entonces, que \dot{t} y $\dot{\theta}$ son constantes. A continuación, usamos las ecuaciones 3.7 y 3.8 para sustituir en nuestra $\dot{\theta}^2$, quedando así

$$\dot{\theta}^2 = \frac{m}{G^3(a)} \dot{t}^2. \quad (3.10)$$

Si tomamos en cuenta que el parámetro s mide el tiempo propio a través de γ , tenemos que

$$F^2(a) \dot{t}^2 - G^2(a) \dot{\theta}^2 = 1.$$

Sabiendo que $F = (1 - \frac{2m}{G})^{\frac{1}{2}}$ y usando la ecuación 3.10, sustituimos y llegamos a que

$$\dot{t}^2 = \frac{G(a)}{G(a) - 3m} = \left(1 - \frac{3m}{G(a)}\right)^{-1}. \quad (3.11)$$

Obteniendo la raíz cuadrada e integrando de ambos lados obtenemos la función $t(s)$:

$$t(s) = \pm \left(1 - \frac{3m}{G(a)}\right)^{-\frac{1}{2}} s + C_1$$

igualmente, podemos calcular $\theta(s)$. Para ello, en la ecuación 3.10 sustituimos nuestra expresión 3.11. Posteriormente integramos para obtener

$$\theta(s) = \pm \left(\frac{m}{G^2(a)(G(a) - 3m)}\right)^{\frac{1}{2}} s + C_2$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Generalmente el signo de $t(s)$ se toma como positivo para que $\dot{t} > 0$.

Finalmente podemos calcular el periodo de la órbita. Para ello, notemos que el tiempo propio requerido para una revolución es de $T_p = |2\pi/\dot{\theta}|$. El tiempo cósmico requerido es $T_c = |\dot{t}|T_p = |2\pi\dot{t}/\dot{\theta}|$. Sabemos que $G(a)$ es la distancia desde el centro de la estrella. Recordando la ecuación 3.11, si hacemos $G(a) \rightarrow \infty$, entonces $\dot{t} \rightarrow 1$. Por lo tanto, para órbitas circulares grandes tenemos que

$$T_p^2 \approx T_c^2 = \frac{4\pi^2 \dot{t}^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{4\pi^2 G(a)}{m}.$$

¡Esta expresión es la tercera ley de Kepler!

Chapter 4

Teoría de Brans-Dicke

A pesar de que la teoría de gravitación de Einstein es la más conocida y aceptada, hay otras formulaciones que se han puesto a prueba con resultados consistentes. Una de las más famosas es la teoría de gravitación de Jordan-Brans-Dicke, conocida también como simplemente teoría de Brans-Dicke.

Esta teoría nació en los años 60 y su diferencia principal con la relatividad general de Einstein es que es una teoría *escalar-tensorial*. Es decir, se introduce un campo escalar que altera las ecuaciones de la relatividad general. En este capítulo, nos sumergiremos un poco esta teoría y presentaremos resultados importantes que sostienen este planteamiento.

4.1 Principio de Mach

El nombre de este principio es en honor al filósofo Ernst Mach, quien lo enunció en su forma más conocida en su obra *The science of mechanics: A critical and historical exposition of its principles* de 1893 aunque ya había autores que habían escrito ideas similares.

Para entender este concepto, se suelen usar dos experimentos mentales. En el primero, imaginemos que estamos flotando en el espacio vacío del espacio. La única referencia disponible son estrellas distantes que están fijas en el fondo. Supongamos ahora que empezamos a girar sobre nosotros mismos, lo que hace que nuestros brazos y piernas experimenten un jalón hacia afuera: la fuerza centrífuga ocasionada por la rotación. Además de eso, notamos que las estrellas de fondo también están rotando, lo que hace que nos hagamos la pregunta: ¿por qué experimentamos una fuerza centrífuga cuando las estrellas de fondo están rotando?, ¿existe una conexión, una ley física, entre el observador y los objetos tan distantes?

El segundo experimento mental es conocido como *el experimento de la cubeta de Newton*. Imaginemos una cubeta con agua girando sobre sí misma. Después de un rato, veríamos que la superficie del agua cambió de forma, es decir, de estar completamente plana pasaría a tener una forma paraboloide con más nivel

de agua en las orillas que en el centro. Nuevamente, es resultado de la inercia oponiéndose a la rotación. Es claro que si dejamos de rotar la cubeta, el nivel del agua volvería a ser uniforme. Sin embargo, ¿qué pasaría si en lugar de la cubeta es el universo entero el que rota? Newton diría que la superficie del agua permanecería plana pero Mach comenta lo contrario. Mach afirma que la forma del agua sí se vería afectada aunque la cubeta no se mueve pero el universo sí.

Esta cuestión, aunque parezca innecesaria, es vital para determinar espaciotiempos absolutos o relativos. La pregunta que hacemos ahora es, si tenemos dos cubetas llenas de agua, una rotando y otra no, ¿cómo podemos diferenciarlas entre sí? Nuestra primera intuición diría que podemos hacerlo por la superficie, como explicamos en el párrafo anterior. La superficie del agua de la cubeta que gira es diferente a la estática, pero ¿respecto a qué? Newton diría que la rotación respecto a un *espacio absoluto* es lo que haría la diferencia. No obstante, Mach remarca que esto solo sería posible en un universo hipotético vacío, sin masa. Argumenta, además, que estas conclusiones se sostienen solo si asumimos que los sistemas físicos retienen sus propiedades incluso si se aíslan de los demás. Mach comenta que estas condiciones idealizadas no se cumplen en el universo real, por lo que las cubetas no se comparan respecto a un espacio absoluto, sino que respecto a las estrellas fijas de fondo, un ejemplo de materia.

En pocas palabras, la diferencia entre la inercia de ambas cubetas se puede observar con respecto a la masa de las estrellas lejanas, estableciendo así una relación entre la inercia local y el contenido de materia en el universo. Por esta relación entre el contenido de materia del universo y la masa inercial de un objeto, es que Mach argumenta que una cubeta fija tendría un nivel de agua curvo si el universo entero rota.

Más formalmente, podemos resumir este principio: La geometría del espaciotiempo y, por lo tanto, las propiedades inerciales de cualquier partícula de prueba infinitesimal requiere ser determinada por la distribución de masa-energía en el universo. En un universo obedeciendo el principio de Mach, no existen el espacio o tiempo absolutos, sino que estas cantidades son siempre relativas a otra referencia. Esta idea también ocasiona que la inercia se relaciona a la interacción gravitacional solamente con la materia y que la geometría y métrica del universo está solamente determinada por el contenido de materia.

La teoría de Einstein no implementa completamente el principio de Mach. Hasta cierto grado, entra en conflicto con el principio de equivalencia. Además, algunas soluciones a las ecuaciones de campo en la teoría de Einstein no consideran el principio de Mach. Brans y Dicke formularon esta teoría con el objetivo de implementar completamente dicho principio en la relatividad general.

4.2 Características principales de la teoría de Brans-Dicke

Lo más destacable de la teoría de Brans-Dicke es que modelan la gravedad de forma escalar-tensorial. Es decir, las ecuaciones de campo, además de depender

de un campo tensorial, (que en la teoría de Einstein es el tensor de energía-momento), también dependen de un campo escalar.

Para entender un poco más por qué, regresamos a la sección 4.1. Basándonos en argumentos dimensionales, asumiendo el principio de Mach, la constante gravitacional G se relaciona a la distribución de masa en un universo expansivo uniforme de la siguiente manera

$$\frac{GM}{R} \sim 1 \quad (4.1)$$

en donde M representa la masa finita del universo y R es el radio de la frontera del universo visible. La idea de por qué la ecuación 4.1 se sostiene es que el único movimiento significativo es el relativo al resto de la materia del universo y que la reacción inercial experimentada en un laboratorio que acelera relativo a la materia distante del universo puede interpretarse, equivalentemente, como una fuerza gravitacional actuando sobre el laboratorio fijo gracias a la presencia de la materia distante acelerada.

Gracias a esto, podemos escribir la aceleración de una partícula de prueba que cae hacia el sol como $a = Gm_{\odot}/r^2$. Esto si consideramos un sistema de coordenadas en el que el objeto no está acelerando porque el jalón gravitacional del Sol estaría balanceado con la acción inercial. También, por análisis dimensional, podemos escribir la aceleración en términos de la distribución de masa como $a \sim mRc^2/Mr^2$. Si combinamos ambas ecuaciones de aceleración, obtenemos la expresión 4.1 si consideramos $c = 1$. Esto sugiere que hay una relación entre G y la masa total del universo M . Es más, en lugar de ver G como a una constante, ahora podemos analizarla como una función de M , $G(M)$. Otra forma de ver que G es una función es darse cuenta que R/M no es constante debido a la expansión del universo (R variable) y la conservación de la masa (M constante).

4.3 Construcción de la teoría

La teoría de Brans-Dicke es un intento de generalizar la relatividad general. Bajo este enfoque, los efectos gravitacionales son en parte geométricos y en parte interacciones escalares.

Empezamos considerando el *principio de equivalencia débil*. Este principio indica que toda partícula puntual cae con la misma aceleración en un campo gravitacional. Empíricamente, numerosos científicos han puesto a prueba experimentalmente dicho principio, siendo el más famoso de todos Galileo. Eötvös con su experimento de balance de torsión, también lo midió con una precisión sin precedente para su época. En él, se demuestra la independencia de la aceleración de la caída libre y la masa. En 1961, Dicke rehace el experimento de Eötvös con aún mayor precisión, consolidando dicho principio. Esto sugiere que el movimiento de una partícula de prueba sin carga es, como en la relatividad general, una geodésica en una variedad 4-dimensional.

Retomando la ecuación 4.1, definimos el campo escalar ϕ como

$$\phi := \frac{1}{G} \sim \frac{M}{R}.$$

Ahora bien, para generalizar la relatividad general usamos el principio variacional de la relatividad general, del cual se obtiene la ecuación de Einstein, es decir,

$$S = \delta \int \left[R + \left(\frac{16\pi G}{c^4} \right) L \right] (\sqrt{-g}) d^4x. \quad (4.2)$$

En esta expresión, R es la curvatura escalar y L es la densidad de materia lagrangiana incluyendo todos los campos no gravitacionales. Para una explicación más detallada de la lógica detrás de esto, revisar referencias [15] y [7].

Ahora, multiplicamos la expresión 4.2 por $\phi = 1/G$, obteniendo así

$$S = \delta \int \left[\phi R + \left(\frac{16\pi}{c^4} \right) L - L_\phi(\phi, \partial_\mu \phi) \right] \quad (4.3)$$

en donde el término adicional ω es la densidad lagrangiana de un campo escalar. Notemos que la principal diferencia con la teoría de Einstein son las ecuaciones de campo gravitacionales que determinan a la métrica, no las ecuaciones de movimiento en un campo dado. La gravedad no es dada solamente por la geometría de un sistema, sino que también es influenciada por el campo escalar ϕ acoplado al escalar de Ricci. Además, dada la naturaleza escalar de ϕ , podemos esperar que obedezca algún tipo de ecuación de onda como

$$\square \phi = \rho_{escalar} \quad (4.4)$$

en donde el término $\rho_{escalar}$ actúa como una fuente de materia. Para determinar L_ϕ Brans eligió, para tener consistencia en las unidades,

$$L_\phi = -\frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (4.5)$$

Así, si sustituimos en la ecuación 4.3, obtenemos una expresión más explícita de la acción, *la acción de Brans-Dicke* S_{BD} .

$$S_{BD} = \frac{c^4}{16\pi} \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] + S_m \quad (4.6)$$

en donde S_m es una acción de materia general. Cabe destacar que aquí se introduce un factor constante ω con un valor indeterminado adimensional. Este es uno de los puntos más controversiales de la teoría y, de hecho, a Dicke le disgustaba. En un inicio se pensaba que este valor podría obtenerse experimentalmente. La teoría de la relatividad de Einstein se recupera en el límite en que $\omega \rightarrow \infty$.

De las ecuaciones 4.5 y 4.6, variando la acción de Brans-Dicke con respecto a ϕ y $\partial_\mu \phi$, se obtiene que

$$\square \phi = \frac{g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{2\phi} - \frac{\phi R}{2\omega}. \quad (4.7)$$

en donde el operador d'Alambertiano \square se define como

$$\square\phi = \frac{1}{-\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}\partial^\mu\phi].$$

Esta es la ecuación estándar para el comportamiento de la materia. Esta ecuación relaciona el campo ϕ con la geometría expresada por el escalar de Ricci. Podemos interpretar esta teoría como agregar un campo escalar a la métrica para producir una especie de *Campo gravitacional total*. Usando las dos ecuaciones anteriores, podemos variar la acción 4.6 para obtener nuevas ecuaciones de campo teniendo en cuenta que

$$\frac{\delta S_{BD}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \iff \frac{\delta S_g}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.8)$$

en donde S_g es la acción de la gravedad que incluye el término cinético de Brans-Dicke, mientras que S_m es una acción genérica de materia que proporciona el tensor de energía-momento como

$$\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{g}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}L_m - 2\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} := T_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

en donde $g = \det(g_{\mu\nu})$. Con esto, llegamos a la ecuación de campo que estábamos buscando:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2}\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi\right) - \frac{1}{\phi}(\nabla_\mu\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\square\phi) = \frac{8\pi}{\phi c^4}T_{\mu\nu} \quad (4.10)$$

que es análoga a la ecuación de campo de Einstein. Nótese que el término del lado derecho es la fuente usual de la relatividad general con el parámetro gravitacional variable $1/\phi$. Si contraemos la ecuación 4.10, es decir, calculamos su traza, tenemos

$$R = -\frac{8\pi}{\phi c^4}T + \frac{\omega}{\phi^2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{3}{\phi}\square\phi. \quad (4.11)$$

Ahora bien, si combinamos las ecuaciones 4.7 y 4.11 obtenemos

$$\square\phi = \frac{8\pi}{2\omega + 3}T \quad (4.12)$$

donde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ es la traza del tensor de energía-momento. Esta ecuación muestra que el campo escalar ϕ se puede interpretar como una contribución geométrica adicional a las ecuaciones de campo convencionales.

Ha habido intentos de determinar el valor del parámetro ω . Esto nos ayudaría a saber si la teoría de Brans-Dicke es distinguible de la relatividad general. Como se mencionó anteriormente, en el límite cuando $\omega \rightarrow \infty$, la teoría de Brans-Dicke es equivalente a la relatividad general de Einstein, por lo que un valor de ω muy alto sugeriría que ambas teorías son equivalentes.

4.4 Poniendo a prueba la teoría

En la mayoría de los contextos, es más conveniente usar la teoría de Einstein, por lo que Brans-Dicke ha sido un poco relegado. Sin embargo, numerosos científicos han comparado las teorías de Einstein y Brans-Dicke tanto a nivel teórico como a nivel experimental y han llegado a conclusiones interesantes. En esta última sección, haremos una breve revisión de un puñado de estas comparaciones.

4.4.1 Agujeros negros

En 1971, Stephen Hawking (referencia [13]) mostró que un espacio estacionario que contiene un agujero negro es una solución a las ecuaciones de campo Brans-Dicke si y solo si es una solución de las ecuaciones de campo de Einstein. Esto implica que al colapsar una estrella en agujero negro, una parte de la masa gravitacional se pierde debido a la interacción escalar en la teoría de Brans-Dicke (aproximadamente un 7%, debido a la disminución de su momento monopolar escalar).

En el artículo, Hawking establece que la teoría de Brans-Dicke puede ser formulada en un marco de referencia matemáticamente similar al de Einstein, conocido como *el marco de Einstein*. En este contexto, la constante de gravitación G se considera constante, mientras que las masas de las partículas pueden variar con la posición. Esto contrasta con el marco de Brans-Dicke, donde las masas son constantes y G es variable. Hawking reescribe las ecuaciones de campo de Brans-Dicke para mostrar que, a pesar de las diferencias en la formulación, estas pueden parecerse a las ecuaciones de Einstein cuando se incluye el campo escalar.

Un aspecto crucial de su análisis es el uso de desigualdades específicas sobre el tensor de Ricci (de las cuales escribió en otro artículo, referencia [14]) que permite demostrar que propiedades fundamentales en la relatividad general, como la simetría axial y la topología esférica de los agujeros negros, también se mantienen en la teoría de Brans-Dicke. Estas desigualdades aseguran que las características geométricas que permiten la existencia de agujeros negros no dependen estrictamente de la forma particular de las ecuaciones de campo, sino que son propiedades más generales.

A partir de este análisis, Hawking concluye que, en el contexto de agujeros negros estacionarios, el campo escalar debe ser constante en la región exterior del agujero negro. Esto implica que el efecto del campo escalar como fuente de gravedad se elimina al formarse el agujero negro, sugiriendo que las soluciones estacionarias de agujeros negros en la teoría de Brans-Dicke son equivalentes a las soluciones de relatividad general, específicamente a la familia de soluciones de Kerr.

4.4.2 Deflexión de la luz

Similar a la relatividad general con la solución de Schwarzschild (sección 3), la teoría de Brans-Dicke también predice fenómenos como la precesión de Mercurio

y las lentes gravitacionales.

Anteriormente mencionamos que para comparar las teorías de Einstein y Brans-Dicke es útil calcular el valor del parámetro ω . Podemos también definir un nuevo parámetro γ como

$$\gamma = \frac{\omega + 1}{\omega + 2}.$$

Este parámetro γ es igual a uno en relatividad general y cero en modelos newtonianos. En 2003, Bertotti, Iess y Tortora calcularon que $\gamma = 1 + (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$ ([5]). Visto de otra manera, ω tiene una magnitud de, al menos, orden 10^4 . Para conseguirlo, midieron el tiempo en que ciertas frecuencias de radio tardaron en viajar de la Tierra a la sonda espacial Cassini. Para ello, usaron que el retraso en el tiempo producido por el campo gravitacional del Sol es

$$\Delta t = 2(1 + \gamma) \frac{GM_{\odot}}{c^3} \ln \left(\frac{4r_1 r_2}{b^2} \right)$$

en donde G es la constante gravitacional, $b \ll r_1, r_2$ es el llamado *parámetro de impacto* y r_1, r_2 son, respectivamente, las distancias de la antena y la sonda espacial al sol. Estos resultados dan una cota más estricta para el parámetro ω . Asimismo, nos confirmaría que hay una influencia débil, pero detectable de un campo adicional al que consideran las ecuaciones de Einstein.

4.4.3 Achatamiento del Sol

A raíz de la publicación de la teoría de Brans-Dicke, se empezó a considerar la idea de que el Sol tuviera forma achatada. En dicha teoría, el avance de perihelio $\Delta\omega$ está dado por

$$\Delta\omega = \left(\frac{4 + 3\zeta}{6 + 3\zeta} \right). \quad (4.13)$$

Para ser congruente con las observaciones de Mercurio, $\zeta \geq 6$. En el caso en que $\zeta = 6$, la predicción teórica es un poco menor que las medidas aceptadas. Para conciliar esta diferencia, Dicke propuso que el sol tiene forma ligeramente oblata asociada al momento cuadrupolar de masa. Para probar su afirmación, Dicke y Goldenberg armaron un *telescopio de distorción* con el objetivo de medir qué tan achatado es el Sol. Las observaciones midieron un achatamiento de $\delta r = 43.3 \pm 3.3$ mas, es decir, 31.3 ± 2.4 km, suficiente para ocasionar perturbaciones en el perihelio de Mercurio. El resultado fue controversial.

Tiempo después, se calculó nuevamente el achatamiento del Sol tomando en cuenta la rotación diferencial, es decir, el ecuador del Sol gira tiene una velocidad angular mayor a los polos. Con esta nueva consideración, Dicke obtuvo $\delta r = 7.78$ mas. Otras observaciones hechas por Komm presentaron un resultado que difería en tan solo 6%. Se determinó que los factores que pueden influir en la forma de nuestra estrella son la rotación diferencial y la distribución de masa interna. Igualmente, el campo magnético podría influir. Con respecto a las

mediciones, las faculae pueden introducir sesgos en las mediciones porque un achatamiento puede ser confundido con un exceso de brillo en el ecuador.

En 1965 el profesor H. Hill, antiguo colaborador de Dicke, decidió armar su propio telescopio. Comenzó operaciones en Tucson, Arizona. Este experimento, llamado SCLERA, llevó a una medición de $\delta r = 9.2 \pm 6.3$ mas, aproximadamente 5 veces menos que el experimento original de Dicke y Goldenberg. Además, se encontró una variación temporal en el achatamiento del orden de 7 mas durante el ciclo solar.

Dicke respondió a las críticas hacia su teoría concluyendo que la única manera adecuada de explicar sus resultados era aceptando el achatamiento del Sol. Aún así, decidió mover su telescopio a Mount Wilson (California), en donde dos de sus estudiantes lo siguieron manejando. Datos de 1983 midieron cerca de la mitad de lo medido en 1966, lo que apoyaba la conjetura de que el momento cuadrupolar del Sol oscila lentamente. En 1996, un *review* de los resultados del telescopio de distorsión y el SCLERA (*Resolving discordant results*, [28]) hecho por Richman afirmó que el exceso encontrado por Dicke y Goldenberg era debido a un exceso de brillo ecuatorial. Durante las siguientes décadas, se continuaron haciendo experimentos intentando medir la forma del Sol. Entre los más destacables está el heliómetro Pic du Midi, operacional desde 1994 y que pudo medir exitosamente un ciclo solar completo.

También se han intentado hacer mediciones en el espacio para evitar el impacto de la atmósfera en las observaciones, como Sofia, de Harvard en 1982. Igualmente, en 1992, Maier y colegas ([20]) empezaron a reportar los resultados de un vuelo en globo. Se han lanzado más globos a lo largo de los años, incluso actualmente. A pesar de ello, no toda la comunidad científica acepta los datos completamente. Para una visión más completa de las mediciones más importantes que se han hecho respecto al tema, consultar [29].

4.4.4 Veredicto final

A pesar de los esfuerzos para comprobar o desmentir la teoría de Brans-Dicke, no se ha llegado a una respuesta definitiva. Mientras algunos autores la consideran superada, otros la siguen estudiando y hacen modelos a partir de ella. Las observaciones parecen tener conclusiones contradictorias entre sí y no hay un consenso claro porque hay múltiples factores que afectan los resultados de los experimentos.

Lo que parece claro es que la teoría de Brans-Dicke sí puede tomarse como una generalización de la teoría de Einstein porque se puede llegar a la segunda imponiendo condiciones a la primera. Asimismo, modelos que funcionan en la teoría de Brans-Dicke, también lo hacen en relatividad general como la deflexión de la luz y el comportamiento de los agujeros negros.

En resumen, la teoría de Brans-Dicke ha brindado mucho valor teóricamente, pero aún no tiene tanta solidez a nivel empírico. Independientemente de su futura confirmación o refutación, es innegable que nos ha ayudado a tener un entendimiento más profundo de la gravedad al obligarnos a buscar sus puntos débiles.

Cabe resaltar que esta no es la única formulación alternativa a la relatividad general. Existen más propuestas que, por cuestión de espacio y tiempo, no pudimos cubrir. Algunas de ellas son la propuesta escalar-tensorial-vectorial de Moffat [24] y la propuesta de gravedad newtoniana extendida por parte de astrofísicos de la UNAM [22]. La gravedad es un fenómeno que afecta todo nuestro entorno de manera compleja, por lo que es lógico pensar que explicarla es igualmente complejo.

Conclusión

A lo largo de este escrito hemos aprendido lo más fundamental de las matemáticas utilizadas en las teorías de gravitación más estudiadas. Para cualquier estudiante de física avanzada es necesario comprender y aplicar estos conceptos. Recorrimos el mundo del álgebra lineal, los tensores, las variedades y las formas diferenciales; conceptos que sostienen cómo pensar los cambios en superficies a nivel más general que lo visto típicamente a nivel licenciatura.

Igualmente, extendimos nuestra comprensión de los espacios. Ya podemos hablar de distancias y caminos en el espacio-tiempo gracias a las métricas y geodésicas. Con las distintas curvaturas, obtuvimos descripciones más rigurosas de ciertas variedades. Incluso, como un pequeño atisbo, mostramos que la geometría Riemanniana tiene aplicaciones en más áreas además de la relatividad.

Con toda esta maquinaria matemática, nos aventuramos a estudiar un poco de relatividad general. Definimos sus conceptos fundamentales y explicamos exhaustivamente una solución a la ecuación de campo de Einstein. Posteriormente, desde un punto de vista analítico, comprobamos que es congruente con las observaciones astronómicas más tradicionales a la vez que explica fenómenos que no tenían una explicación satisfactoria anteriormente.

Subsecuentemente, expusimos una teoría alterna a la de Einstein, un intento de extender la relatividad general. Desde un principio que intenta relacionar la masa local con la del resto del universo, llegamos a una formulación diferente de la gravedad. A pesar de que esta teoría no es la más aceptada, nos ha ayudado a seguir investigando y algunas observaciones parecen sostener dicho enfoque. Es esta búsqueda por la verdad la que hace que la ciencia avance.

En conclusión, en esta tesis estudiamos un enfoque de la física-matemática que no suele verse hasta un nivel de posgrado. Propusimos ejemplos más aterrizados de algunos conceptos que suelen describirse más abstractamente. Además, dimos planteamientos algebraicos a las ecuaciones de Einstein y explicamos sus consecuencias. Finalmente, a través de experimentos, analizamos cómo se sostiene una teoría alternativa en contraposición a la relatividad general.

Bibliography

- [1] Admin. (2021, April 21). How to Draw a Torus in LaTeX using TikZ - TikZBlog. TikZBlog. <https://latexdraw.com/how-to-draw-a-torus-in-latex-using-tikz/>
- [2] Armónicos Esféricos. (2021). Serie de relatividad [Playlist]. https://youtube.com/playlist?list=PL41Nd_PfXH7IrGOkTrNoOSBILxcRDNJ6Q&si=Nu89prt9J5SGLOIp
- [3] Bassani, P. M. B. (2023). Varying Constants and the Brans-Dicke Theory: A New landscape in Cosmological Energy Conservation [MA thesis]. Imperial College London.
- [4] Besse, A. L. (1987). Einstein Manifolds. In Springer eBooks. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74311-8>
- [5] Bertotti, B., Iess, L., & Tortora, P. (2003). A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425(6956), 374–376. <https://doi.org/10.1038/nature01997>
- [6] Brans, C. (2014). Jordan-Brans-Dicke Theory. *Scholarpedia*, 9(4), 31358. <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.31358>
- [7] Brans, C., & Dicke, R. H. (1961). Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Physical Review*, 124(3), 925–935. <https://doi.org/10.1103/physrev.124.925>
- [8] Carmo, M. P. D. (2011). Differential geometry of curves and surfaces. *Choice Reviews Online*, 48(06), 48–3330. <https://doi.org/10.5860/choice.48-3330>
- [9] Dr Ben Yelverton. (2023, May 1). Understanding the Eötvös experiment [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=w2r9ISVJOhs>
- [10] Eigenchris. (2018). Tensor calculus [Playlist]. YouTube. <https://youtube.com/playlist?list=PLJHszsWbB6hpk5h8lSfBkVrpjsqvUGTCx&si=C2czxNPz46yx88KG>

- [11] Eastman, A. (2018). DIFFERENTIAL FORMS AND THEIR APPLICATION TO MAXWELL'S EQUATIONS. In University of Chicago. Retrieved August 15, 2024, from <https://math.uchicago.edu/may/REU2018/REUPapers/Eastman.pdf>
- [12] Fels, Mark E. (2016). An Introduction to Differential Geometry through Computation. Textbooks. 2. https://digitalcommons.usu.edu/oer_textbooks/2
- [13] Hawking, S. W. (1972). Black holes in the Brans-Dicke Theory of Gravitation. *Communications in Mathematical Physics*, 25(2), 167–171. <https://doi.org/10.1007/bf01877518>
- [14] Hawking, S. W. Black holes in general relativity. *Commun.Math. Phys.* 25, 152–166 (1972). <https://doi-org.udlap.idm.oclc.org/10.1007/BF01877517>
- [15] Landau, L., & Lifshitz, E. (1975). The classical theory of fields. In Elsevier eBooks. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-14608-1>
- [16] Lee, J. M. (1997). Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. <http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA3271671X>
- [17] Lipschutz, S., & Lipson, M. (2008). Schaum's Outline of Linear Algebra Fourth Edition. McGraw Hill Professional. ISBN: 978-0-07-154353-8
- [18] L. Irons, M. (2005). The Curvature and Geodesics of the Torus. Retrieved September 8, 2024, from <http://www.rdrop.com/half/math/torus/index.xhtml>
- [19] Mach, E., & McCormack, T. J. (2015). The Science of Mechanics: A critical and historical exposition of its principles. <https://bdor.sibi.ufrj.br/handle/doc/510>
- [20] Maier, E., Twigg, L., & Sofia, S. (1992). Preliminary results of a balloon flight of the solar disk sextant. *Astrophysical Journal*, 389, 447–452.
- [21] Mathematics Stack Exchange. (n.d.). Mathematics Stack Exchange. <https://math.stackexchange.com/>
- [22] Mendoza, S., Hernandez, X., Hidalgo, J. C., & Bernal, T. (2010). A natural approach to extended Newtonian gravity: tests and predictions across astrophysical scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411(1), 226–234. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17685.x>
- [23] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W.H. Freeman.
- [24] Moffat, J. W. (2006). Scalar-tensor-vector gravity theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2006(03), 004. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2006/03/004>

- [25] Munkres, J. R. (1974). *Topology; a first course*.
- [26] Novikov, S., & Fomenko, A. (1990). *Basic elements of differential geometry and topology*. Springer.
- [27] Palmas, H. S., & Morgado, Ó. a. P. (2007). *Geometría Riemanniana*.
- [28] Richman, S. (1996). Resolving discordant results: Modern solar oblateness experiments. *Studies in History and Philosophy of Science Part B Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 27(1), 1–22. [https://doi.org/10.1016/1355-2198\(95\)00020-8](https://doi.org/10.1016/1355-2198(95)00020-8)
- [29] Rozelot, J.-P., & Damiani, C. (2011). History of solar oblateness measurements and interpretation. *The European Physical Journal H*, 36(3), 407–436. <https://doi.org/10.1140/epjh/e2011-20017-4>
- [30] Spivak, M. (1970). *A comprehensive introduction to differential geometry*.
- [31] Spivak, M. D. (1965). *Calculus on manifolds*. <https://ci.nii.ac.jp/ncid/BB1590381X>
- [32] *Topology Without Tears* by Sidney A. Morris. (n.d.). *Topology Without Tears*. <https://www.topologywithouttears.net/>
- [33] Velasco, O. a. P., Victoria, J. G. R., & De México Facultad De Ciencias, U. N. A. (2005). *Curso de geometría diferencial*.