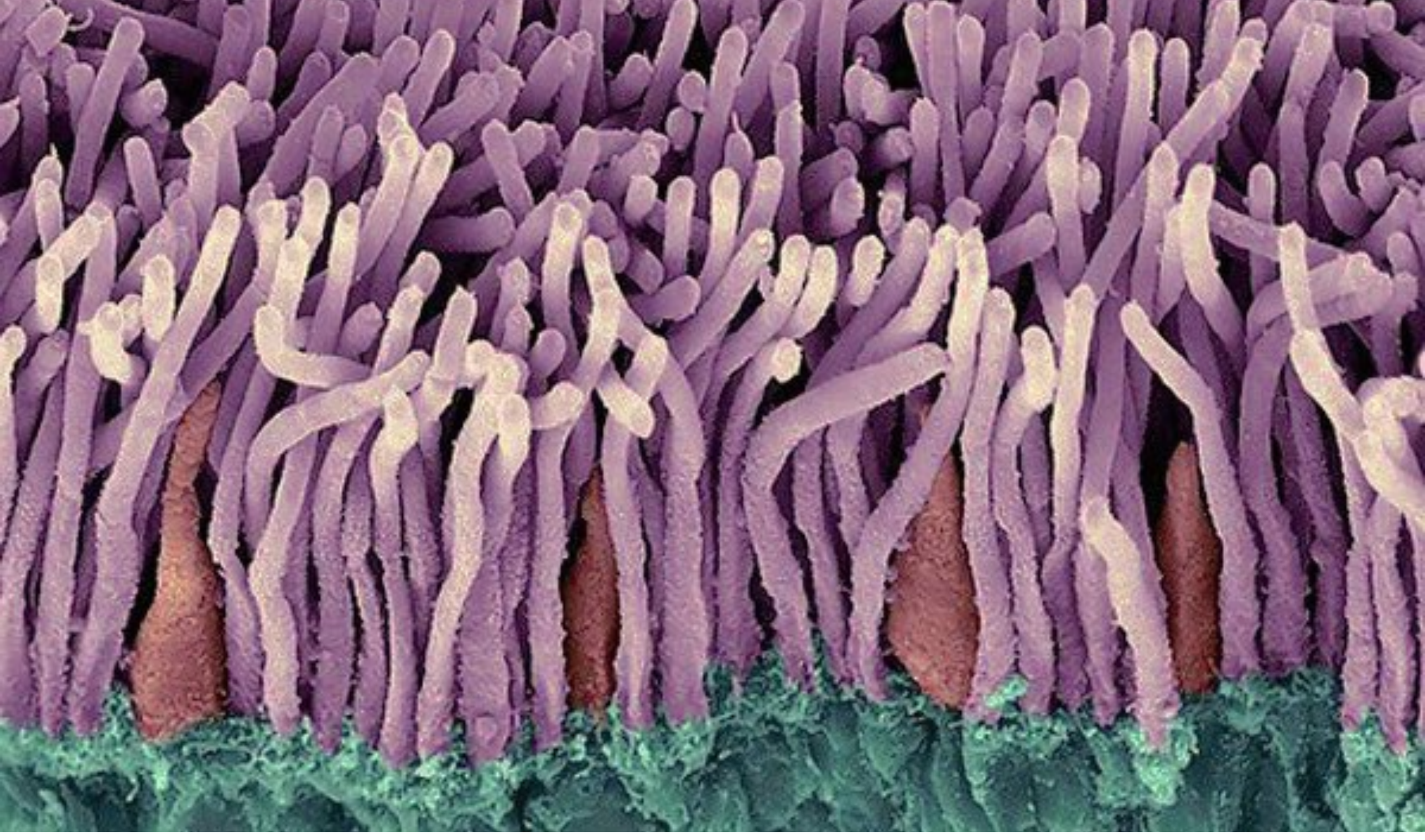


Modelo teórico y numérico de un sistema para conteo de conos retinales utilizando haces helicoidales

Roxana Herrán Cuspinera 143678

Director Dr. Juan Pablo Treviño

Director interno: Dr. Miguel Ocaña Bribiesca

UDLAP®

Índice

1. Objetivo

2. Introducción

3. Marco teórico

   - Teoría de Fourier
   - El ojo humano
   - Sistemas Ópticos

4. Resultados numéricos

5. Conclusiones y trabajo a futuro

6. Bibliografía

Objetivo

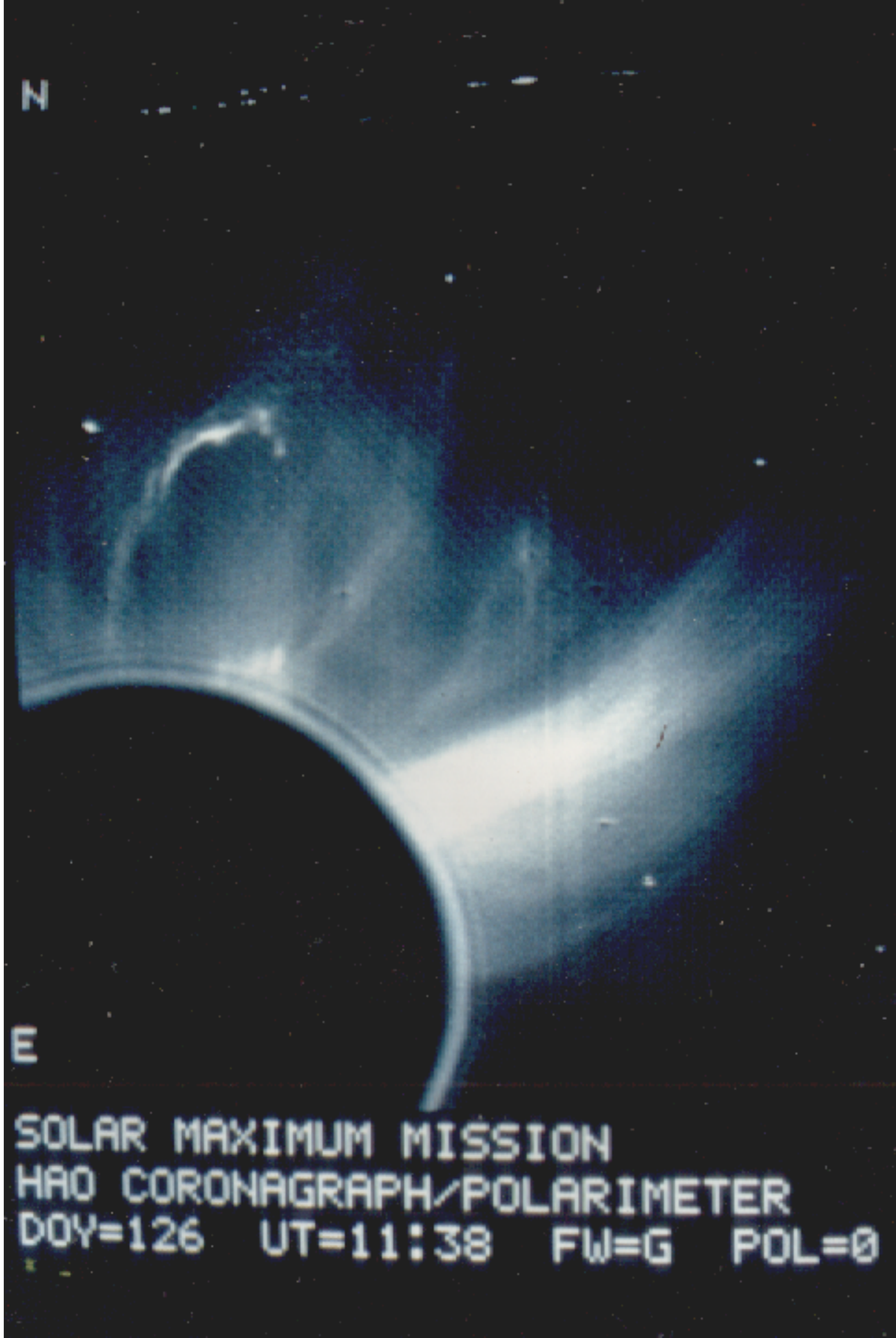
Se busca demostrar que es factible adaptar exitosamente un método empleado en Astronomía, diseñado para sistemas muy grandes, a su aplicación en Óptica Visual para un sistema relativamente mucho más pequeño con la finalidad de elaborar un contador de conos retinales de menor costo.

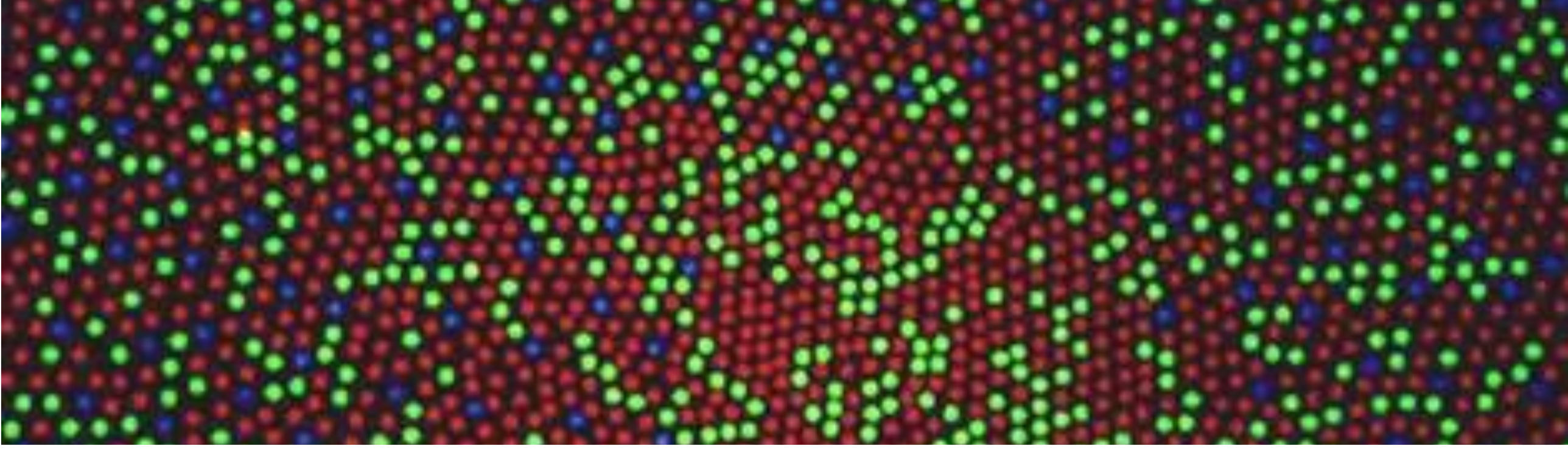
Introducción

- **1931,** Bernard Lyot inventa el coronógrafo para observar la corona del Sol sin tener que esperar a un eclipse solar.

- **2000,** Swartzlander propone un método para examinar una señal de fondo débil oculta en el resplandor de una fuente luminosa coherente.

- **Hoy**, investigadores médicos de todo el mundo están muy interesados en contar las células fotorreceptoras en la retina. Esta información tiene un gran potencial para la detección y diagnóstico de enfermedades que afectan la visión humana.





Contadores de conos

Image by Mark D. Fairchild
Multidisciplinary Vision Research Laboratory

Los sistemas utilizados hoy en día se basan en Óptica Adaptiva (OA). Estos sistemas han sido descritos como demasiado caros, restringidos en su uso y con un software propietario difícil de utilizar.

Hay un enorme interés en hacer mediciones no invasivas de células en la retina(Bidaut Garnier et al.), pero la tarea de etiquetar cada cono individual es inevitable. Kenichi et al., estudió la confiabilidad de un contador de conos popular "AO detect TM" y concluyó que ésta **subestima la densidad de empaquetamiento de conos en la mácula** de manera significativa. Por lo que un recuento manual es todavía necesario para mantener cualquier semejanza de exactitud (Kawano).

Teoría de Fourier

- Fourier inventó su método de series con el fin de resolver la ecuación de difusión de calor bajo ciertas condiciones en la frontera.

- El teorema de Fourier establece que cualquier función f(x) periódica se puede expresar como la suma de una serie de funciones sinusoidales cuyas longitudes de onda son fracciones integrales de la longitud de onda de f(x).

$$f(x) = \frac{1}{2}C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nk_0 x + \alpha_n) \qquad (1)$$

$$k_0 \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Cada término en la serie (1) tiene dos coeficientes de Fourier, una amplitud C_n y un ángulo de fase α_n . A la determinación de estas cantidades para cada término de la serie se le llama *Análisis de Fourier*.

Otra forma de expresar los coeficientes de Fourier es escribir Eq.(1) como una suma de términos seno y coseno:

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 \quad + \sum_{1}^{\infty} A_n \cos(nk_0 x) + \sum_{1}^{\infty} B_n \sin(nk_0 x) \qquad (2)$$

donde $A_n = C_n cos(\alpha_n), B_n = C_n sin(\alpha_n)$

También se pueden expresar en notación compleja,

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} F_n e^{(nk_0 x)} \qquad (3)$$

donde $F_0 = \frac{1}{2} A_0$.

Funciones no periódicas

Cuando nuestro interés se dirige a funciones no periódicas, construimos una onda con longitud de onda λ en la que cada unidad consta de una función no periódica.

La Fig. 1 ilustra la progresión de serie a Transformada de Fourier. En cada línea el periodo se ha aumentado, pero la función original no ha cambiado su forma. El espectro F(k) aumenta su frecuencia de muestreo.

Cuando $\lambda \rightarrow \infty$, los picos se encuentran infinita-mente cerca entre sí y F(k) se convierte en la onda envolvente. A esta envolvente le llamamos la Transformada de Fourier de una función no periódica.

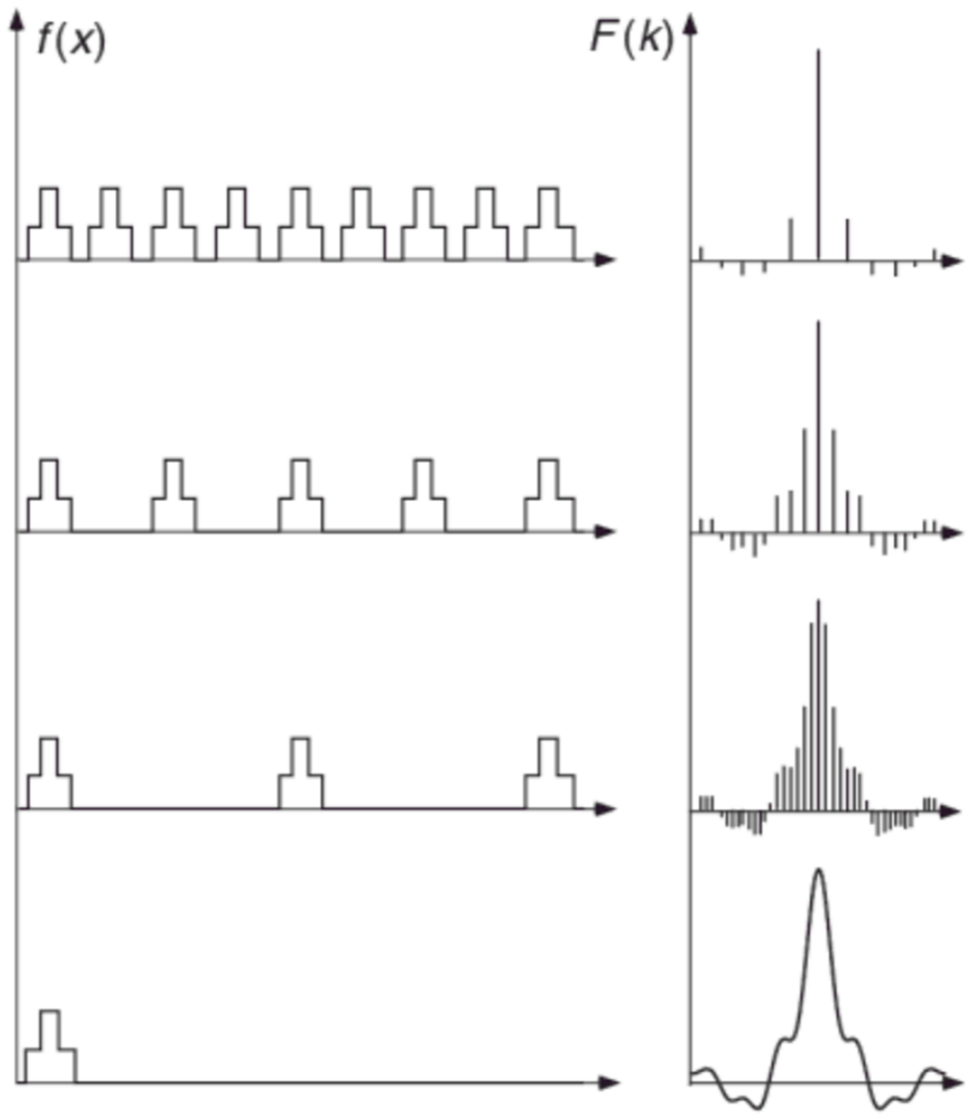


Fig. 1

Definimos la TF de una función f(x) como

$$\mathscr{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (4)$$

la cual es una función continua de la frecuencia espacial k.

Teorema de muestreo de Nyquist–Shannon

Esto introduce el concepto de una **frecuencia de muestreo** suficiente para una perfecta fidelidad. En otras palabras, se establece la frecuencia de muestreo suficiente para que una secuencia discreta de muestras sea capaz de capturar toda la información de una señal continua en el tiempo con un ancho de banda finito. Es decir, que no se pierde información en el proceso de muestreo.Son funciones matemáticas que tienen TF igual a cero fuera de una región finita de frecuencias.

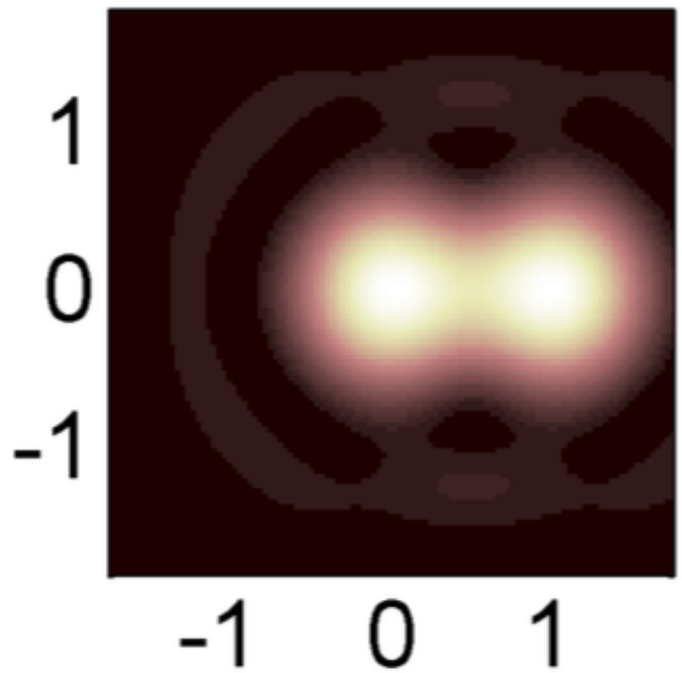
Una frecuencia de muestreo suficiente es 2B muestras / segundo, o algo más grande. De manera equivalente, para una determinada frecuencia de muestreo fs, se garantiza la posibilidad de una reconstrucción perfecta con un ancho de banda B,

$$B < \frac{f_s}{2} \tag{5}$$

Propiedad de translación de TF

- TF de una función desplazado es la transformada de la función original multiplicado por un factor exponencial con fase lineal.

- Este término hace que cada componente de Fourier sea desplazado en fase en una cantidad proporcional al producto de su frecuencia y la distancia de desplazamiento x0.



$$e^{i(\phi+a)x}$$

TF 2 dimensiones

- En particular, las funciones bidimensionales (planos) son muy importantes en óptica. La transformación se define en términos de dos componentes de frecuencia espacial, kx y ky, por la integral doble:

$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-i(xk_x + yk_y)}\, dx dy \qquad (6)$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT) y Transformada de Fourier Discreta (DFT)

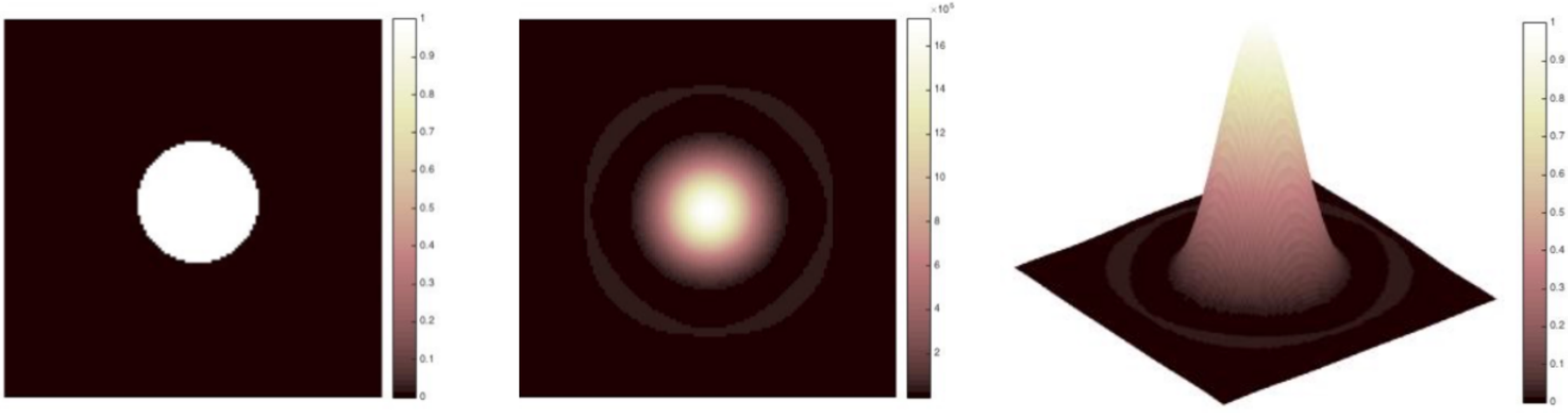
- En general, cuando f(x) no es una función analítica simple, la transformada de Fourier tiene que ser evaluada numéricamente.
- La función se considera esencialmente como el período de una función periódica, para la que los coeficientes de Fourier se calculan en forma de una suma para cada uno de estos últimos valores:

$$F(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} f(na) e^{\left(-\frac{2\pi i n m}{NM}\right)} \qquad (7)$$

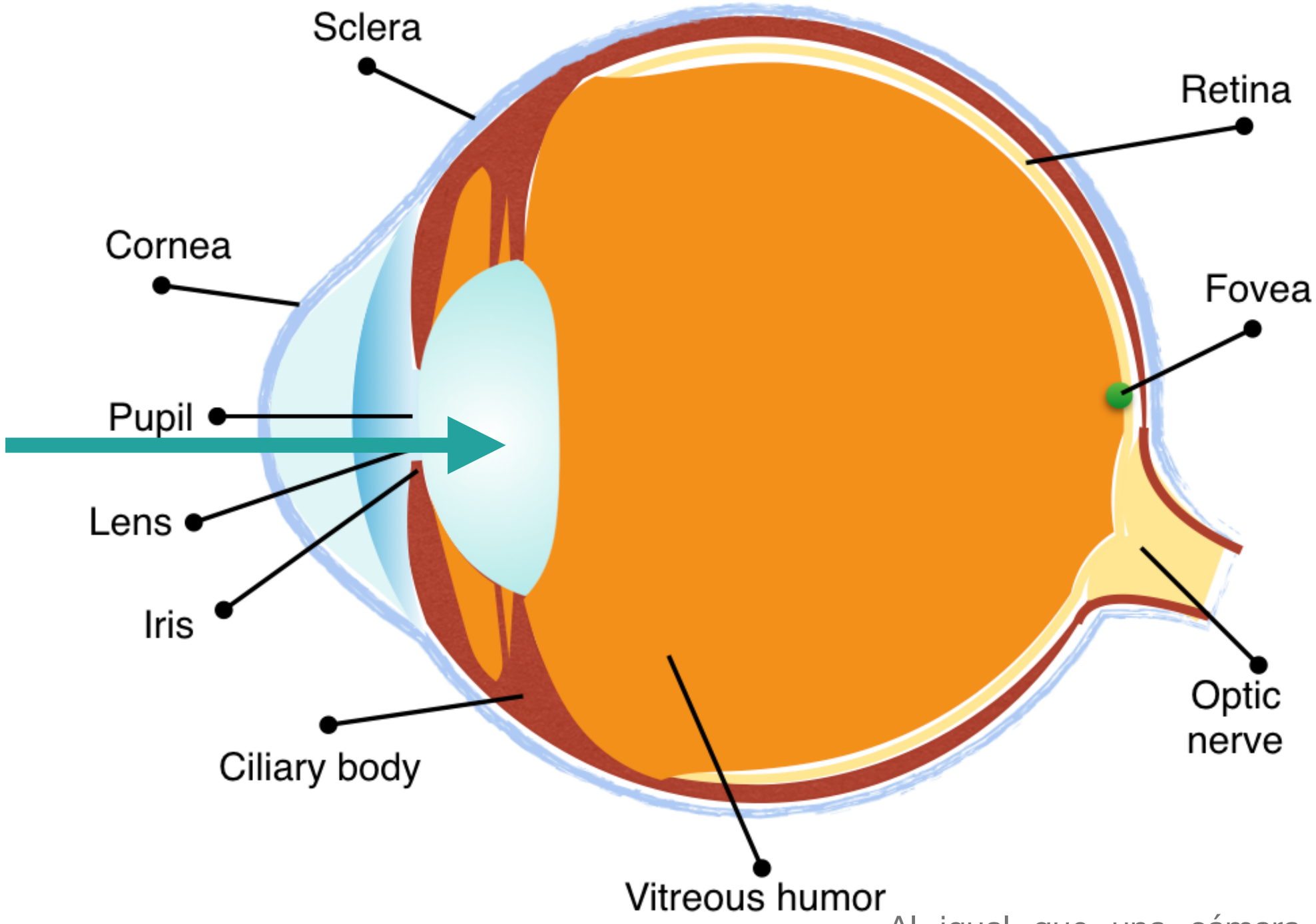
- Cuando N y M son grandes, se trata de un cálculo que consume mucho tiempo para llevar a cabo directamente. Un algoritmo reciente, la transformada rápida de Fourier (FFT), que utiliza métodos de factorización de matrices para simplificar el cálculo cuando M = N es una potencia entera de 2, fue propuesto por Cooley y Tukey en 1965 (Brigham (1988)) y es ahora muy ampliamente utilizado.

- Sin embargo, la transformada de Fourier rápida no siempre es la herramienta ideal. Hay muchos casos en los que, por ejemplo, uno necesita la transformada de Fourier en una región limitada, o M = N, o si la muestra no es uniforme; en estos casos, la evaluación directa de la Ec. (7) podría ser más eficiente. Esto se llama una transformada discreta de Fourier (DFT).

$$F(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} f(na) e^{\left(-\frac{2\pi i n m}{NM}\right)} \qquad (7)$$



Ejemplo FFT en MATLAB

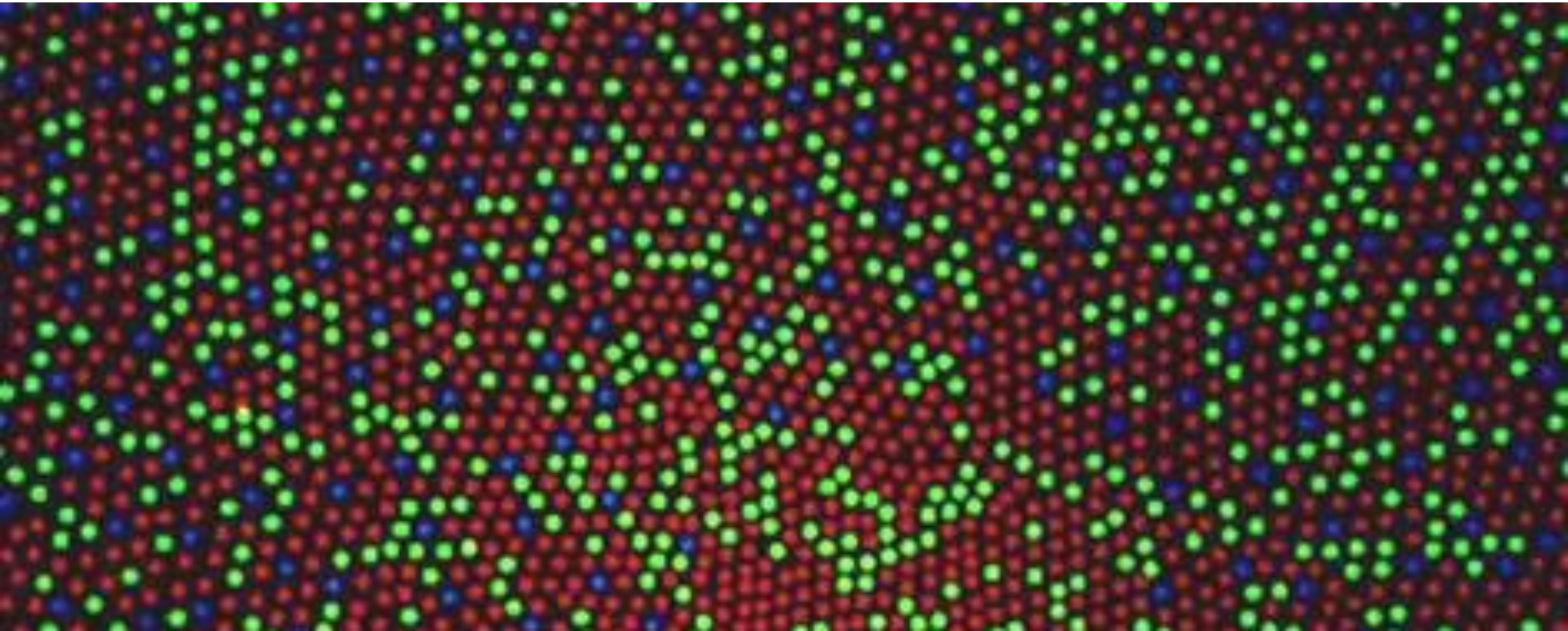


El ojo humano

Al igual que una cámara, el ojo tiene varias partes que deben funcionar de manera adecuada para producir una visión clara. Para ilustrar esto, se describirá el camino de la luz a medida que viaja a través del ojo y se identificarán las diversas estructuras oculares.

La retina

- Por último, la luz llega a la retina, un tejido delgado que recubre la pared interna del ojo. La retina actúa muy parecido a la película en una cámara. La retina responde a los rayos de luz que golpean y los convierte en señales eléctricas transportadas por el nervio óptico al cerebro. La retina está revestido por millones de células fotorreceptoras,



Propiedades ópticas del ojo

- El sistema óptica del ojo tiene cuatro componentes principales: la córnea, el iris, la pupila y el cristalino

Córnea

- 0.5 a 0.6mm de grosor en el centro
- índice de refracción promedio de 1.376
- radio de curvatura de la 1ra superficie de 7.7mm
- superficie interior con 6.8mm de radio
- total: 43 dioptrías

Pupila

- tamaño óptimo 2-3mm de diámetro
- limita la cantidad de luz que entra al ojo
- altera la apertura numérica del sist. óptico del ojo
- *True aperture stop*, cambiar su tamaño no afecta el campo de visión.

Cristalino

- Añade otras 20-30 dioptrías al sistema óptico.

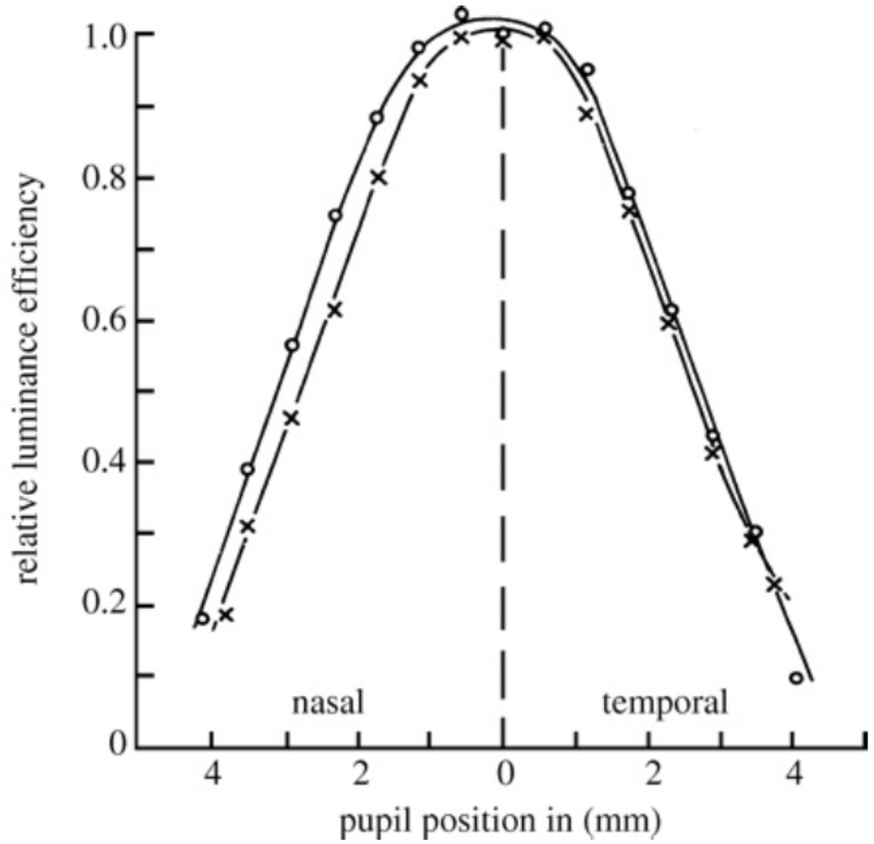
Stiles-Crawford Effect

- Luz que incide en la retina provoca respuestas diferentes en los conos dependiendo del ángulo de incidencia. En el plano de la pupila, los rayos que entran por el centro de la pupila excitan más eficientemente a los fotorreceptores, que los rayos que entran cerca de la orilla.

- Hay, aproximadamente, una reducción de un tercio en eficiencia lumínica cuando un haz de luz estrecho es desplazado del centro a la orilla de una pupila de 6.5mm.

$$\log(\eta_0) - \log(\eta_r) = \quad \rho r^2 \qquad (8)$$

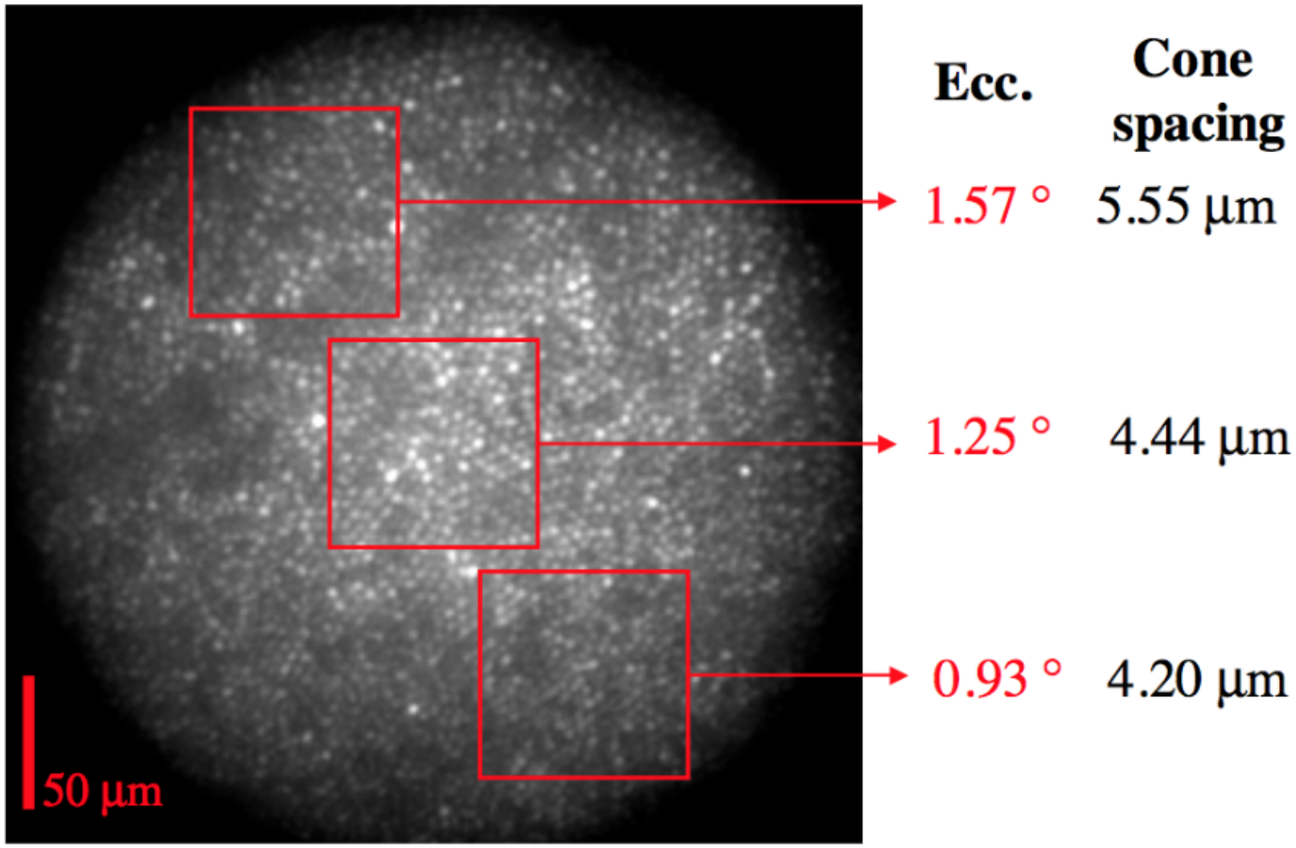
Los conos en la retina están ligeramente “ladeados” lo que disminuye su intensidad observable.



Lamentablemente, estos dos fenómenos (la direccionalidad asimétrica y las estructura de capas múltiples de la conos en la retina) perjudica nuestra capacidad para detectar y diferenciar conos contiguos.

Técnicas de Flooding

El método convencional para obtener imágenes de conos en la retina se llama "flooding". Se compone de un láser que ilumina un trozo de retina y luego graba, con un detector 2D, la luz reflejada que sale del ojo.



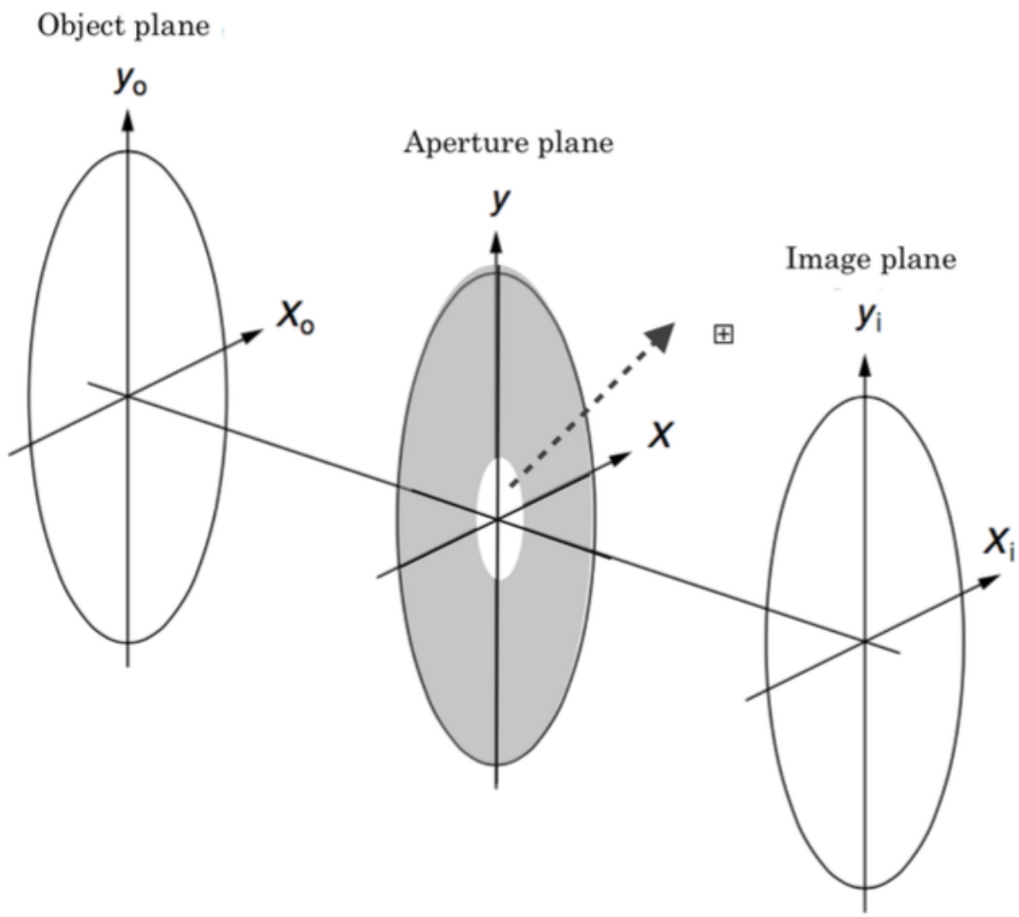
Individual raw conventional flood illuminated images of the cone mosaic centered at 1.25 deg. eccentricity in one subject's eye. Taken from (Rha et al.).

Sistemas ópticos

- Los elementos principales por los que están formados los Sistemas Ópticos son: lentes delgados, lentes compuestos, prismas o espejos planos, espejos esféricos o parabólico y diafragmas de apertura.

Pupila de entrada y salida

Las pupilas definen la cantidad de luz emitida aceptada por y desde el sistema óptico. La pupila de entrada y la pupila de salida son las imágenes vistas desde diferentes lados del stop. Por lo tanto, las pupilas de entrada y de salida también deben ser imágenes una de la otra.



Función de la pupila compleja

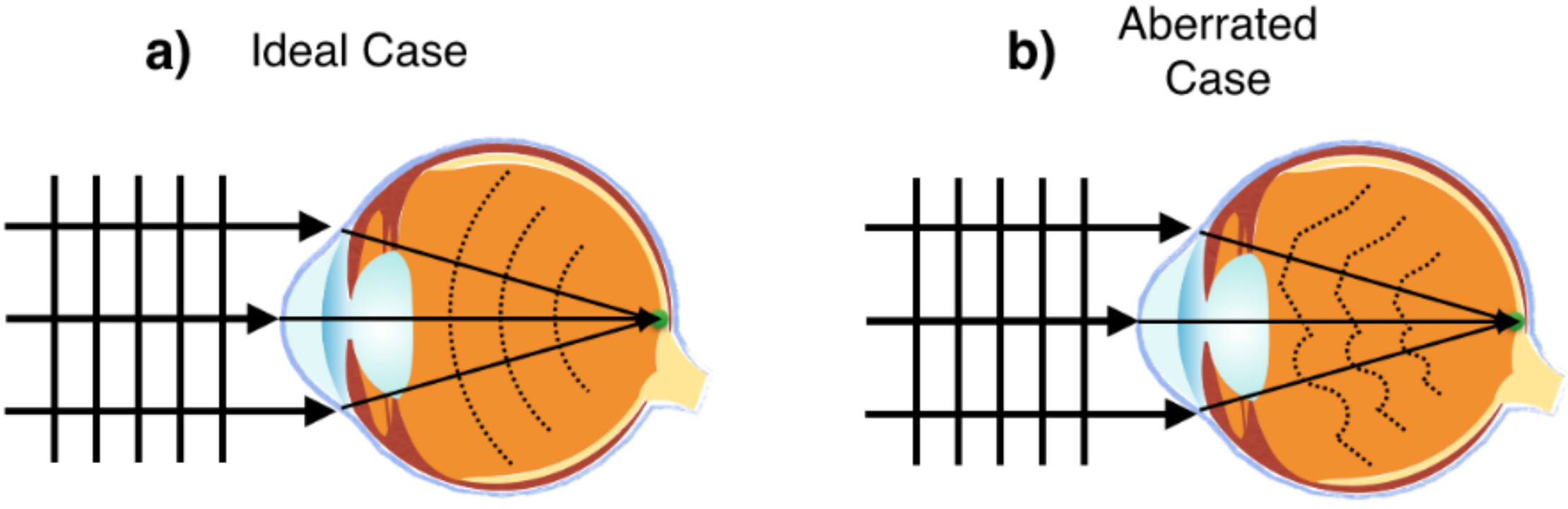
- P (x, y) puede describir el efecto que el sistema óptico del ojo tiene en la luz que recibe.

$$P(x,y) = A(x,y)e^{-ikW(x,y)}$$

$$A(x,y) = circ(r) = \begin{cases} 1; & if \quad r \quad \leq \quad 1 \\ 0; & elsewhere \end{cases}$$

P (x, y) = 0 para cualquiera punto (x,y) que esté bloqueado por la abertura.

- La mayoría de los sistemas, incluyendo el ojo, están diseñados para tomar fuentes puntuales de luz y transmitirlos con un enfoque perfecto en el plano imagen.



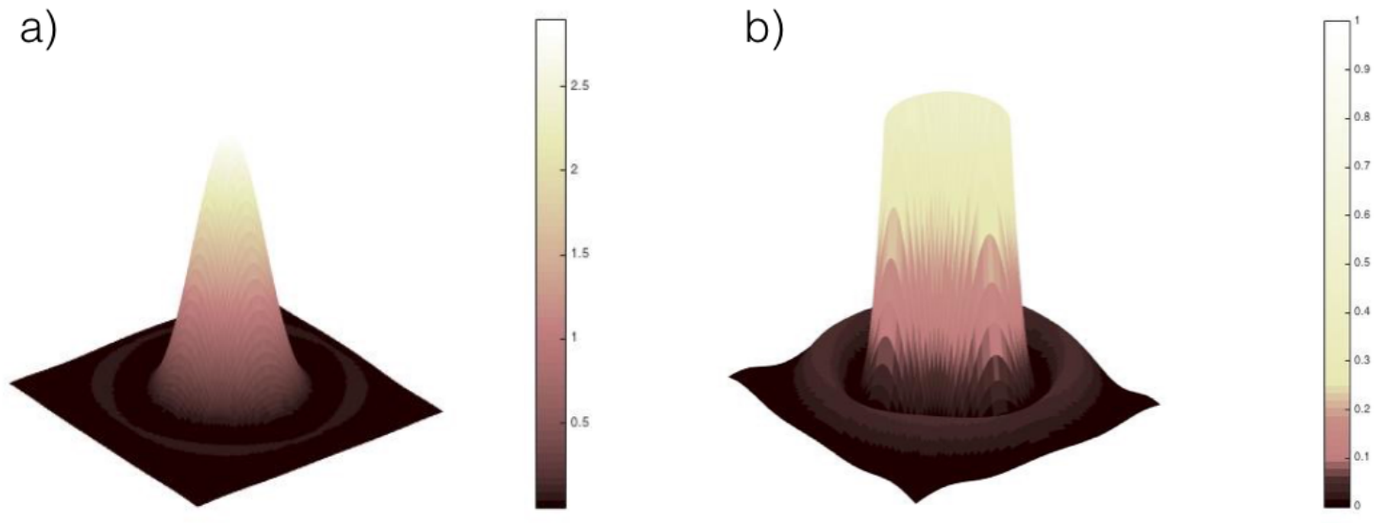
Point Spread Function (PSF)

La PSF es la imagen de una fuente puntual formada por el sistema óptico, se puede calcular con una FT utilizando la integral de Fraunhofer (para PSFs cerca del plano de imagen), y describe la respuesta de un sistema de imagen a una fuente puntual.

$$PSF\left(x_i, y_i\right) = K\left|FT\left\{P\left(x, y\right) e^{-ikW(x,y)}\right\}\right|^2$$

donde FT representa la transformada de Fourier del operador y K es una constante.

Disco de Airy



El lente como TF

- Como sabemos, el patrón de difracción de campo lejano sólo puede ser observada en el infinito.
- Mediante la colocación de una lente después del stop se forma la imagen en el plano focal de la lente, en lugar de al infinito.
- Esto explica por qué una lente puede realizar una transformada de Fourier, el patrón de difracción Fraunhofer en una pantalla en el infinito es la FT de la función de apertura del stop.

La integral de difracción de Fraunhofer sigue la definición de la TF que se muestra a continuación

$$F[u'] = A \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi u' x} dx$$

Donde podemos interpretar
x como la posición en el plano de difracción,
y u 'como la frecuencia espacial de la difracción.

Estos son los tres métodos ópticos de producir TF bidimensionales de acuerdo con Nussbaum y Phillips (1976).

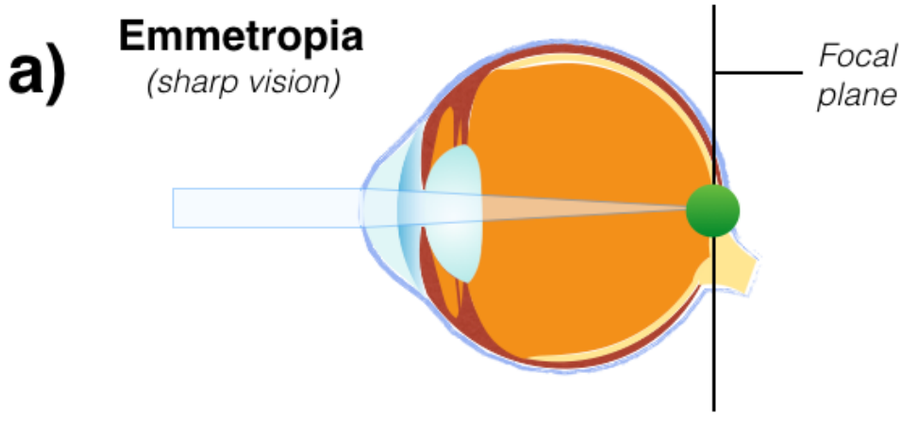
1. El patrón de difracción Fraunhofer en una pantalla en el infinito es el FT de la función de apertura de una abertura.

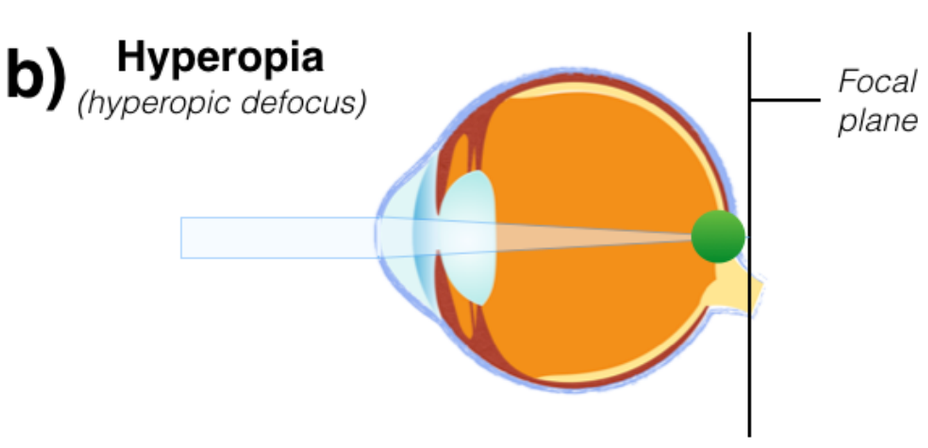
2. El patrón de difracción de Fraunhofer a la distancia focal f 'de un lente des la FT de su función pupila.

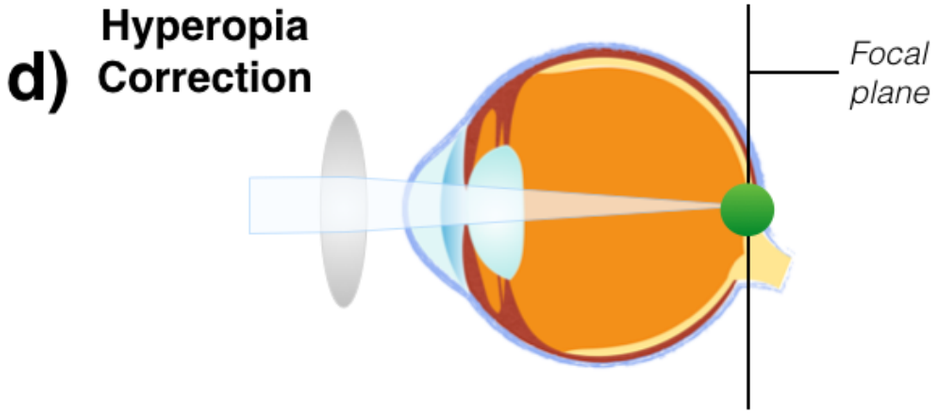
3. Un objeto en f se convierte en su FT en f 'por una lente.

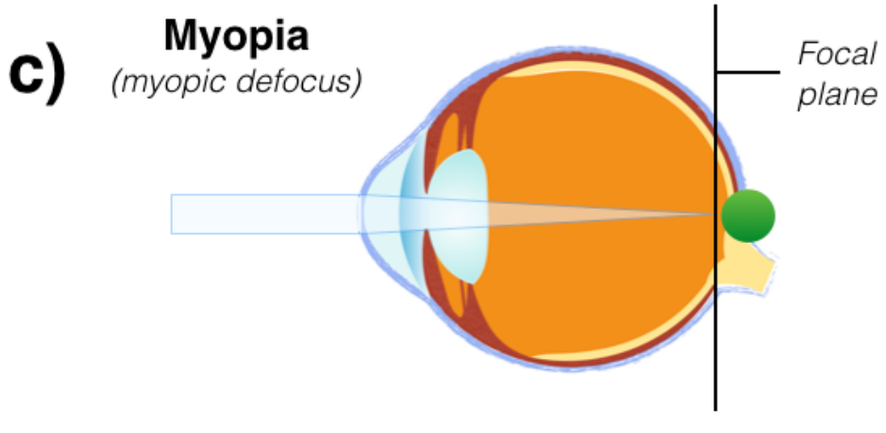
Estos cálculos se pueden hacer con cálculo integral pero es muy tardado. Hoy en día se utiliza la FFT.

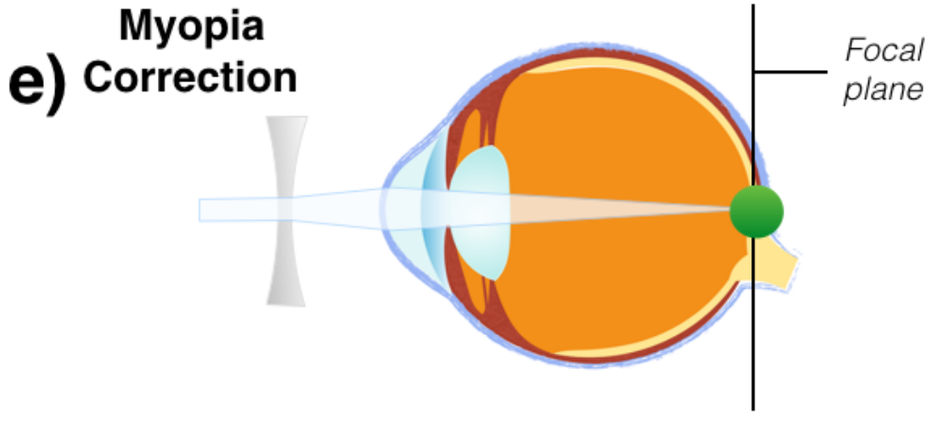
P(x,y) contiene la aberración de onda W (x, y). Las aberraciones son errores introducidos por el sistema óptico que distorsionan los frentes de onda esféricos convergentes, causando un enfoque imperfecto.





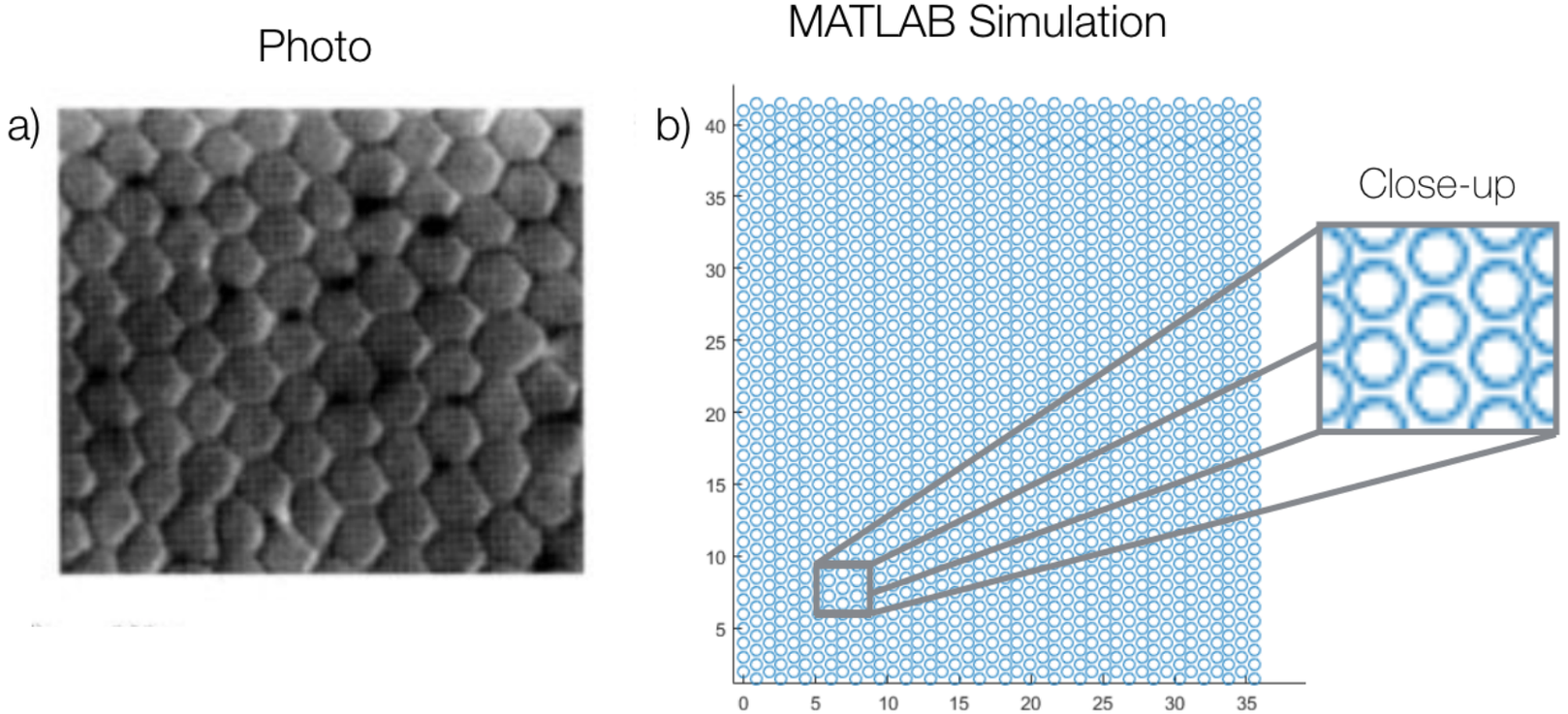






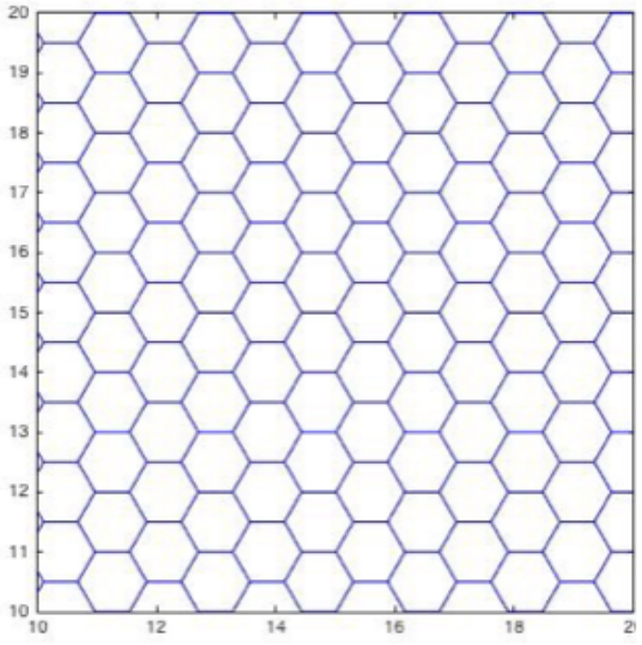
El mosaico fotorreceptor

- Empezamos este experimento mediante el análisis de la configuración de los conos en la fóvea. Estas áreas densamente empaquetadas de conos han sido observadas como arreglos hexagonales.

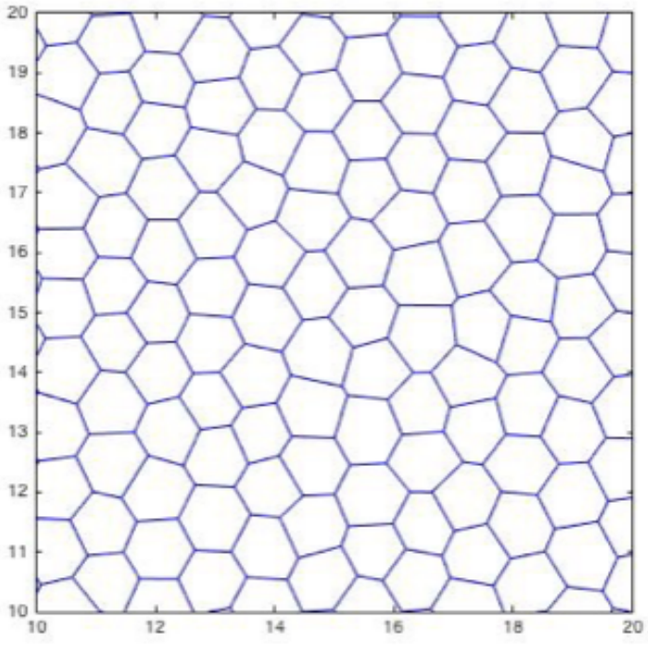


a) Fotografía de conos densamente empaquetadas en la fóvea. La disposición de los conos parece hexagonal. Foto gracias a (C. a. Curcio et al.).
b) Simulación de la distribución espacial de los conos en la retina como una rejilla hexagonal.

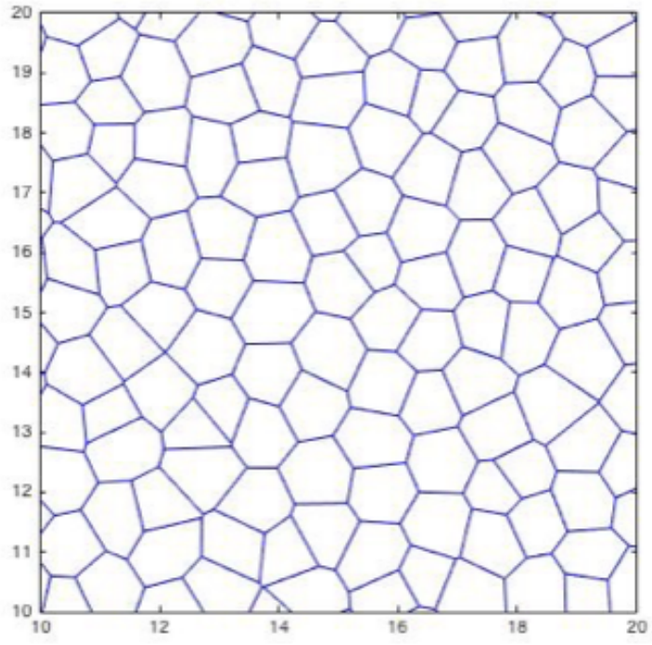
a)



b)

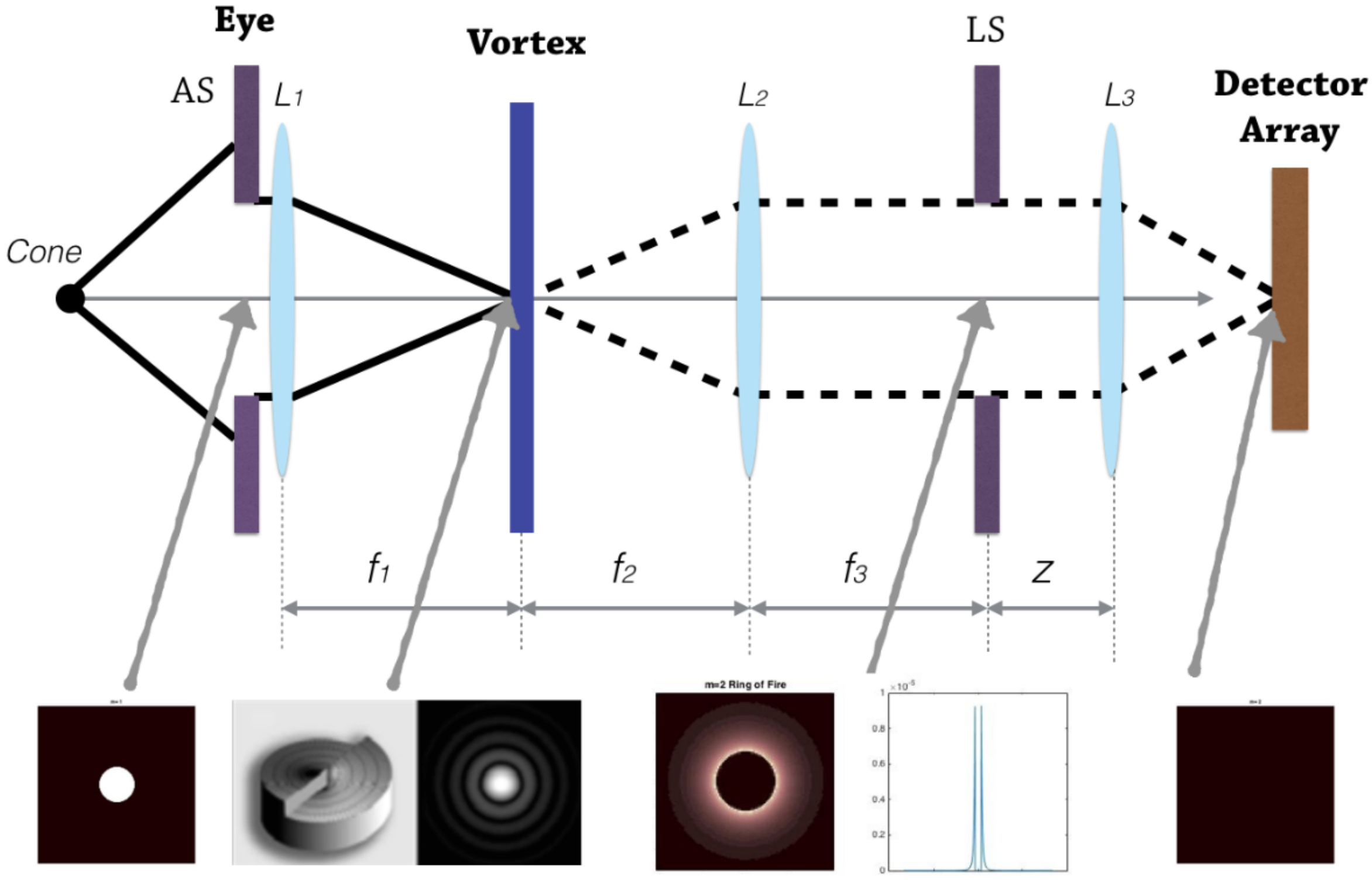


c)

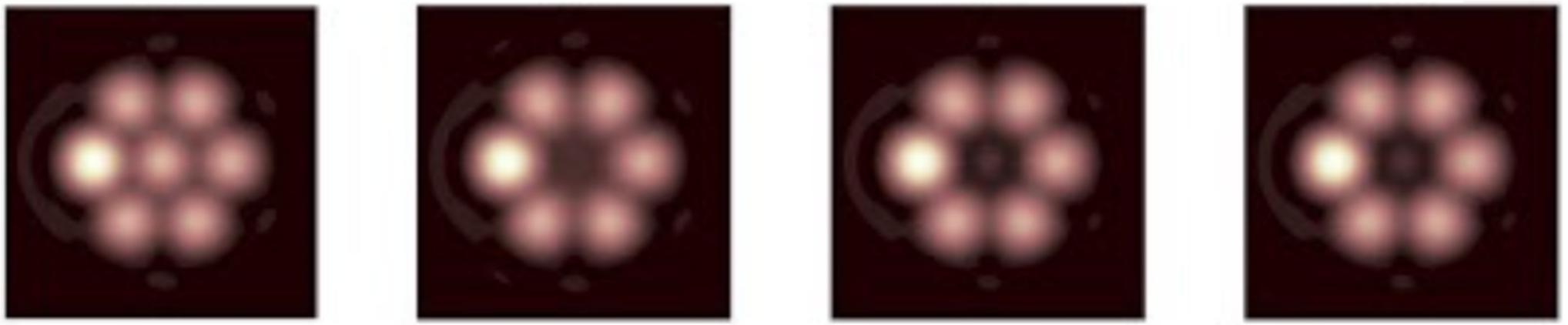


Diagramas Voronoi con errores de 0%, 2% y 4%

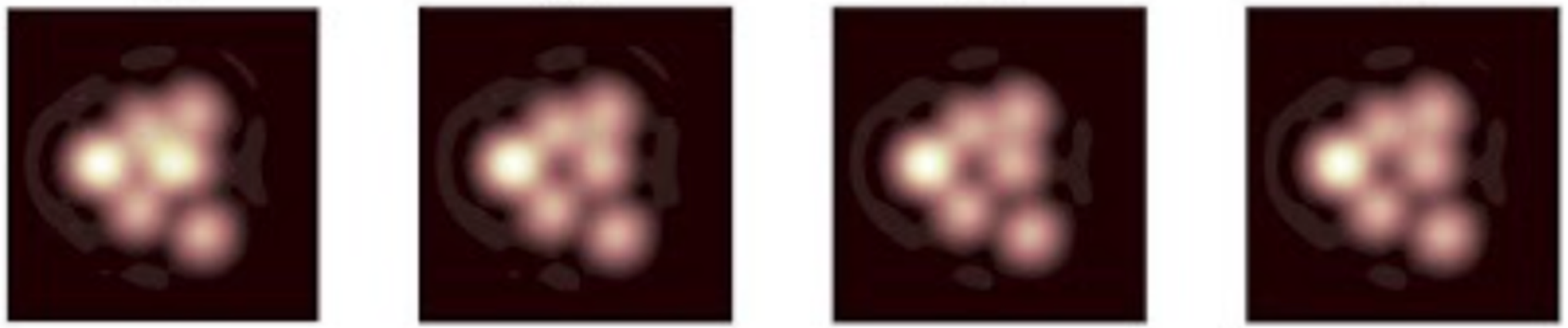
Cada cono produce un patrón de Airy, por lo que vamos a modelar el mosaico de conos acomodando las células fotorreceptoras en este tipo de configuraciones.


Eye
Vortex
LS
AS
L1
L2
L3
Detector Array
Cone
f1
f2
f3
z
m=2 Ring of Fire

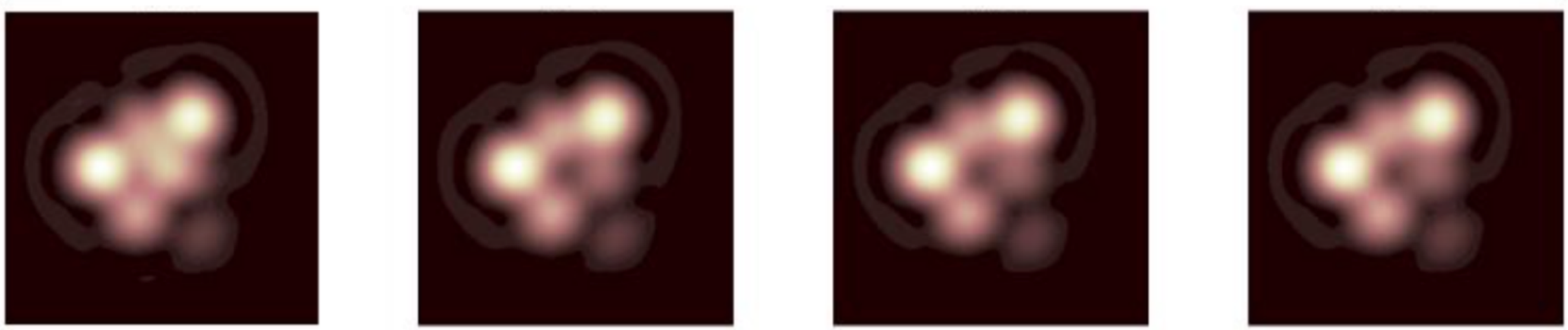
m=0 m=1 m=2 m=3

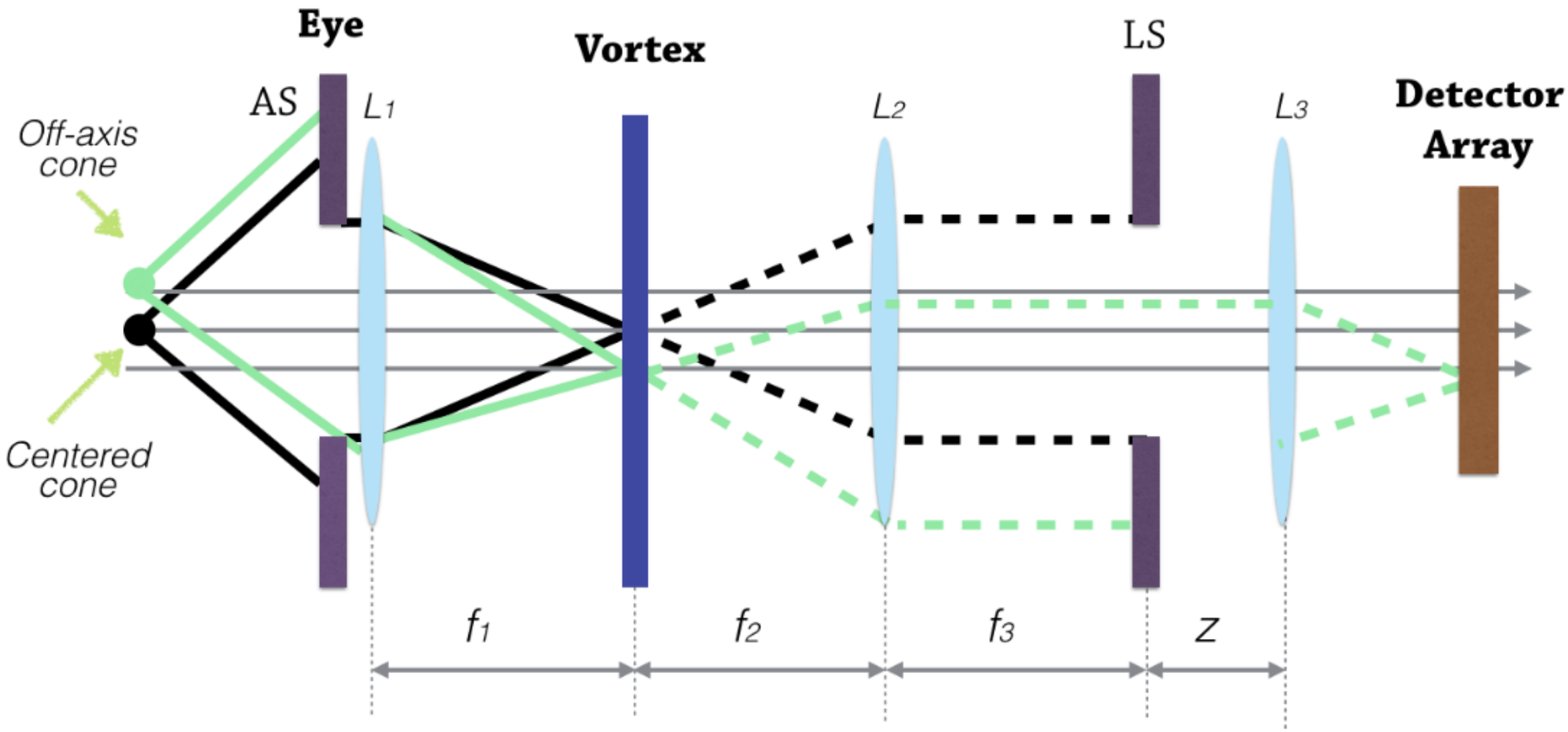


m=0 m=1 m=2 m=3

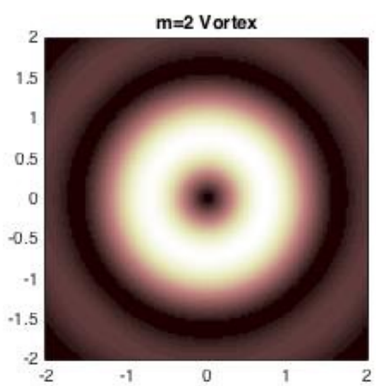


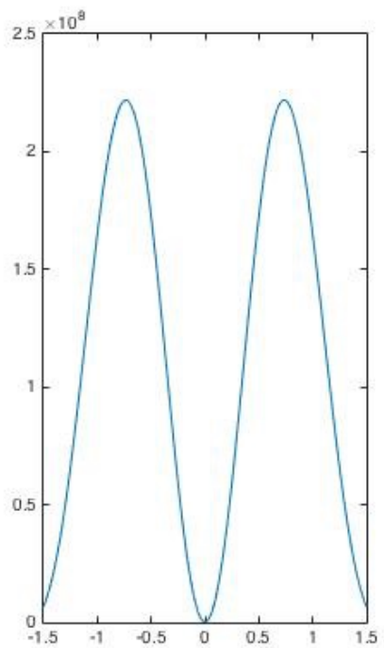
m=0 m=1 m=2 m=3



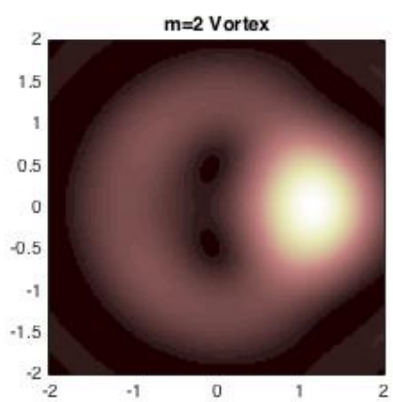


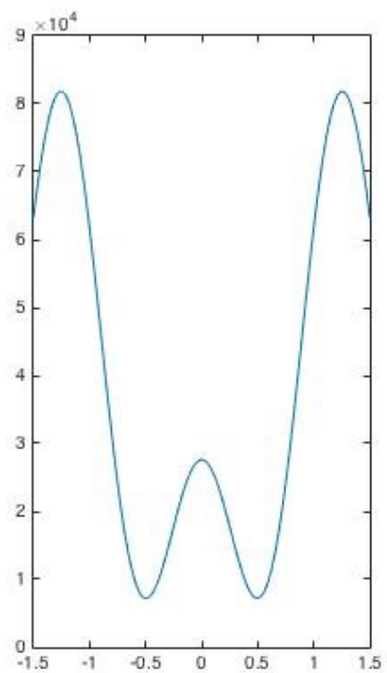
1 cono





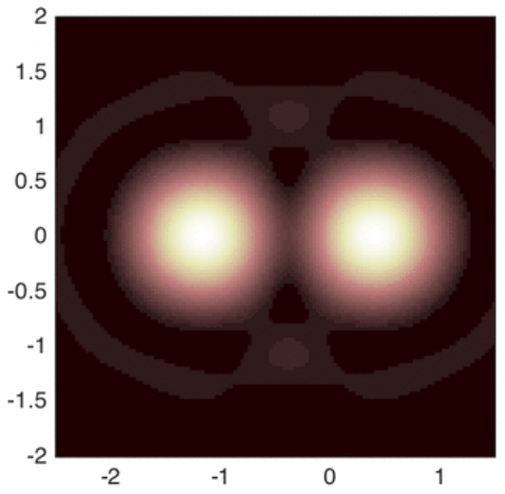
2 conos

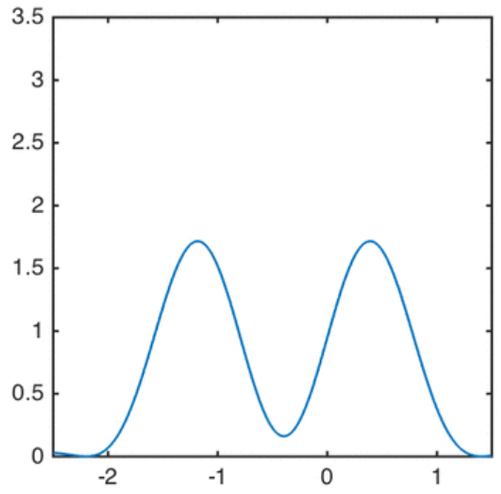




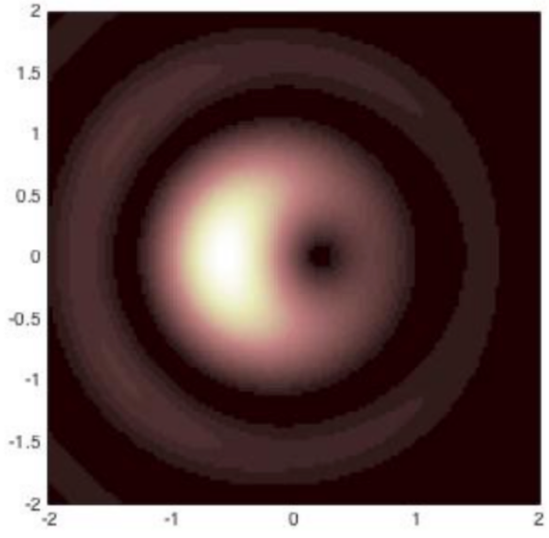
Resolución mejorada

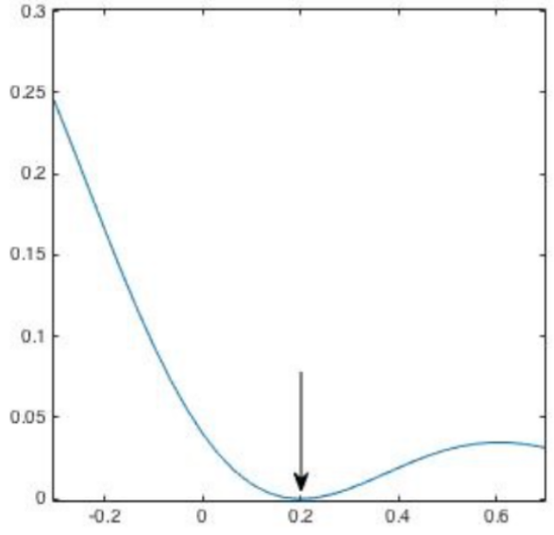
- Criterio de Rayleigh





2 conos a 20% de la dist. de Rayleigh

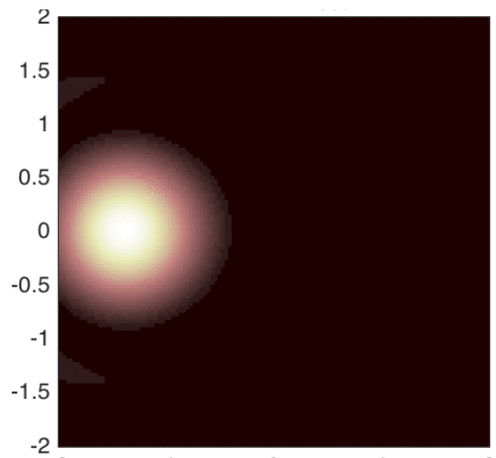


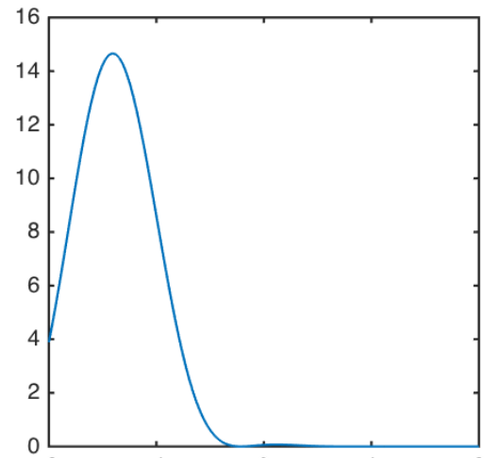


El proceso de formación de imágenes se dice que es de difracción limitada cuando el primer mínimo de difracción de la imagen de un punto de origen coincide con el máximo de otro.

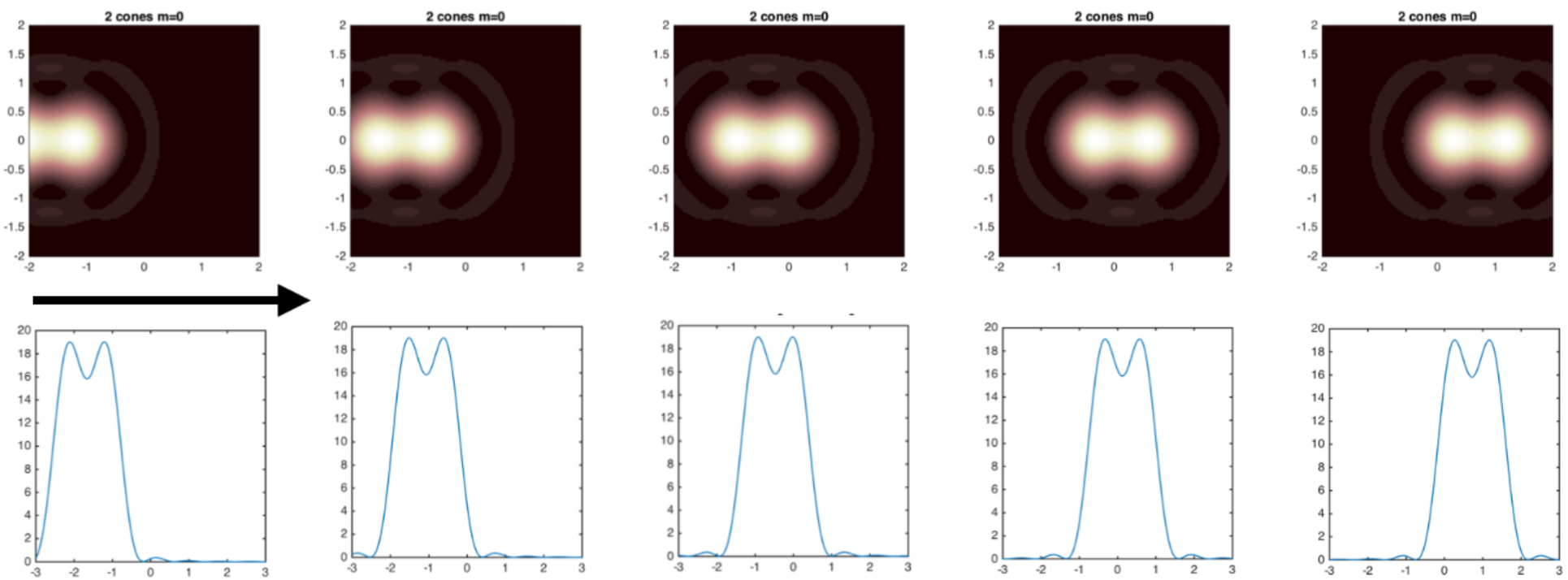
Scanning

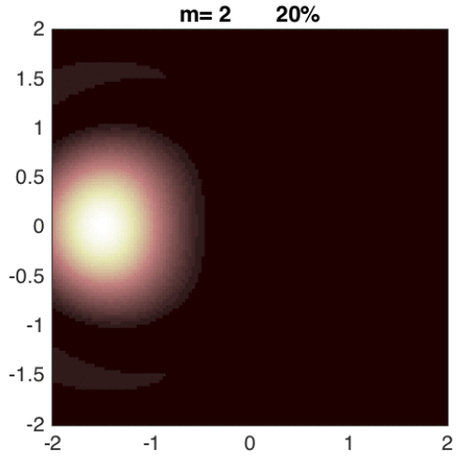
1 cono

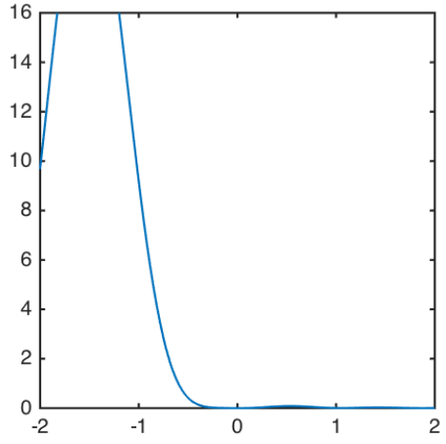




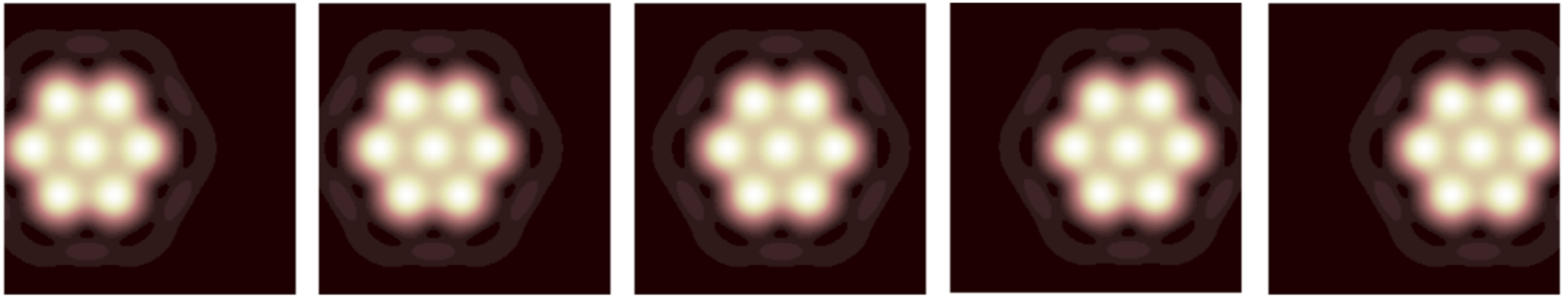
2 conos



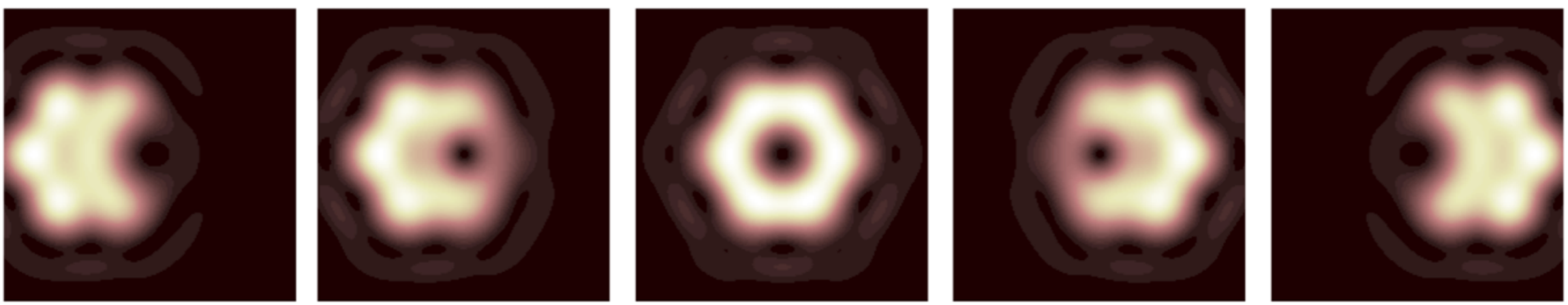




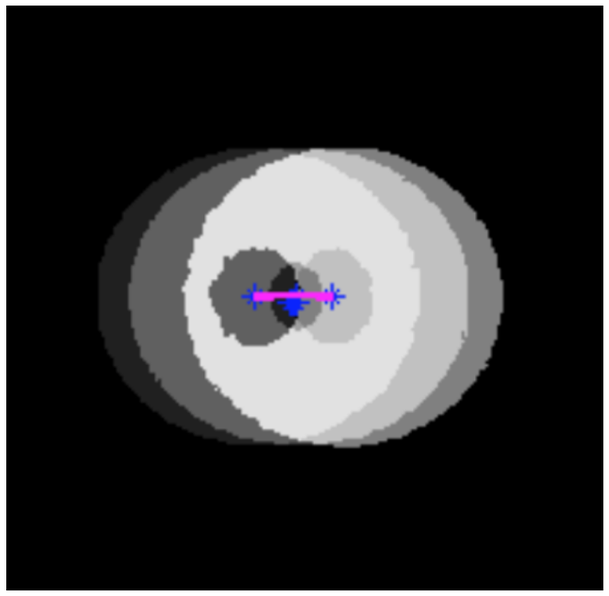
m=0

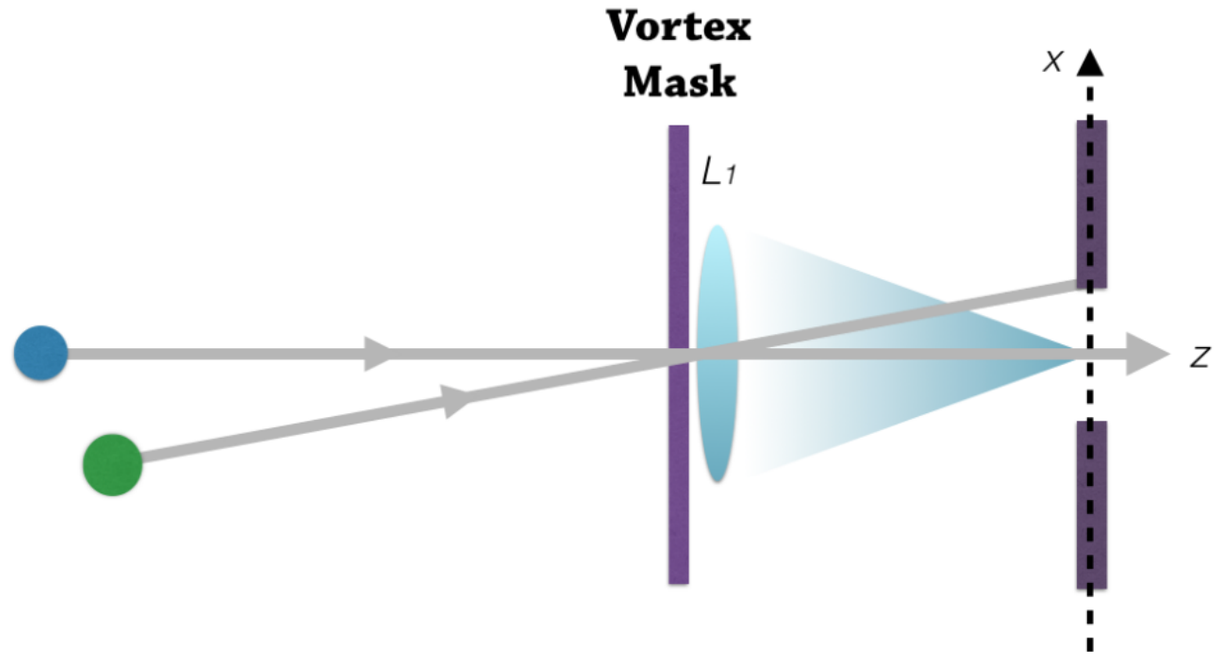


m=2



Conclusiones y trabajo a futuro





Bibliografía

Ahnelt, P. K. (1998). The photoreceptor mosaic. *Eye*, *12*(3b), 531–540. Retrieved from http://www.nature.com/doifinder/10.1038/eye.1998.142

Curcio, C. A., Sloan, K. R., Kalina, R. E., & Hendrickson, A. E. (1990). Human photoreceptor topography. *The Journal of Comparative Neurology*, *292*, 497–523. doi:10.1002/cne.902920402

Foo, G., Palacios, D. M., & Swartzlander, Jr., G. A. (2005). Optical vortex coronagraph. *Optics Letters*, *30*(24), 3308–10. Retrieved from http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18607427

Kalas, P., Graham, J. R., Chiang, E., Fitzgerald, M. P., Clampin, M., Kite, E. S., ... Krist, J. (2008). Optical images of an exosolar planet 25 light-years from Earth. *Science (New York, N.Y.)*, *322*(5906), 1345–8. Retrieved from http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19008414

Keating, M. P., (2002). *Geometric, Physical, and Visual Optics*. 2nd ed. United States: Butterworth-Heinemann.

Li, K. Y., & Roorda, A. (2007). Automated identification of cone photoreceptors in adaptive optics retinal images. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics, Image Science, and Vision*, *24*(5), 1358–63. Retrieved from http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/17429481

Swartzlander, Jr., G. A. (2001). Peering into darkness with a vortex spatial filter. *Optics Letters*, *26*(8), 497–9. Retrieved from http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18040364

Tamburini, F., Anzolin, G., Umbriaco, G., Bianchini, A., & Barbieri, C. (2006). Overcoming the Rayleigh Criterion Limit with Optical Vortices. *Physical Review Letters*, *97*(16), 163903. doi:10.1103/PhysRevLett.97.163903

Vohnsen, B., Thibos, L., & Ginis, H. (2013). A Year in Visual Optics [Editorial]. *Ophthalmic & Physiological Optics, 33*, 391-393.