

# CAPÍTULO 5

## OTF de un sistema óptico: Función de Ambigüedad.

### 5.1) Introducción.

Hasta ahora se ha estudiado la profundidad focal  $\Delta z$  correspondiente a diferentes funciones de pupila a través de la respuesta impulsiva axial  $I(z)$ . Otro camino posible para lograr la descripción de  $\Delta z$  en un sistema con iluminación no-coherente es considerar los efectos que el desplazamiento sobre el eje óptico tiene sobre la función de transferencia óptica OTF. Similarmente que  $I(z)$ , es deseable que la función de transferencia óptica varíe lentamente dentro de la profundidad focal  $\Delta z$ .

Es necesario identificar una herramienta matemática que en términos numéricos precise la idea de variaciones lentas. Una herramienta de gran utilidad para visualizar las variaciones de la OTF en diferentes posiciones sobre el eje óptico es la función de ambigüedad de Woodward[1].

En este capítulo se utiliza este recurso para describir la variación de la función de transferencia óptica de sistemas con iluminación no-coherente y se vinculan resultados con aquellos obtenidos en capítulos anteriores, para algunas de las funciones de pupila estudiadas.

### 5.2) Correspondencia de funciones de pupila con simetría radial y funciones de pupila unidimensionales.

En los tres capítulos anteriores, de esta tesis, se estudian funciones de pupila con simetría radial. Para encontrar cada una de las respuestas axiales correspondientes se

buscó realizar el cambio de variable más pertinente para cada caso. Dicho cambio de variable transformaba a la función radialmente simétrica  $P(\rho)$  en una función de pupila unidimensional correspondiente  $Q(\zeta)$ .

Esto hace factible pensar que el estudio de funciones de pupila unidimensionales es de utilidad para describir características de funciones con simetría radial. La idea anterior de correspondencia será utilizada en este capítulo para estudiar a la OTF de dos funciones de pupila de las cuales ya se ha encontrado  $\Delta z$ . Esto es, se considerarán dos funciones de pupila unidimensionales, pensando que sus funciones de transferencia óptica representan, de alguna forma, el comportamiento de aquellas que resultan de las funciones de pupila con simetría radial correspondientes.

### 5.3) OTF de una función de pupila unidimensional.

La OTF en foco de un sistema óptico puede escribirse matemáticamente como se muestra a continuación, en la ecuación (5.1).

$$H(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha - \zeta/2) Q^*(\alpha + \zeta/2) d\alpha . \quad (5.1)$$

Comúnmente se define a la función  $H(\zeta)$  dividiendo a la integral anterior entre la norma de  $Q(\zeta)$  [2], no obstante aquí se utilizará la forma dada por la ecuación (5.1). De acuerdo con la referencia [1], se puede expresar a la función de transferencia óptica fuera de foco  $H(\zeta, z)$  como lo indica la ecuación (5.2).

$$H(\zeta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha - \zeta/2) Q^*(\alpha + \zeta/2) e^{-i2\pi\lambda z\zeta\alpha} d\alpha . \quad (5.2)$$

Donde el caso en foco corresponde a  $z = 0$ . La función de ambigüedad  $A(\zeta, \tau)$  se calcula de acuerdo a la ecuación

$$(5.3)$$

$$A(\zeta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha - \zeta/2) Q^*(\alpha + \zeta/2) e^{i2\pi\tau\alpha} d\alpha . \quad (5.3)$$

Dada la similitud entre la función de ambigüedad y la ecuación (5.2) se puede expresar a la OTF en la forma de la ecuación

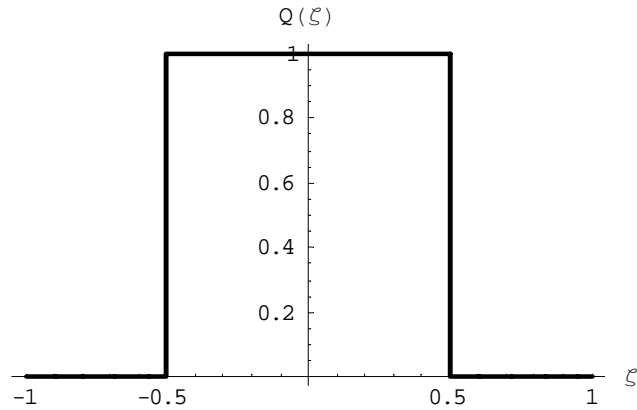
$$H(\zeta, z) = A(\zeta, \tau = -\lambda z \zeta) , \quad (5.4)$$

Si se visualiza a la función de ambigüedad  $A(\zeta, \tau)$  como una gráfica de contorno en dos dimensiones, se tiene la ventaja de que en un solo plano se encuentra representada a la función de transferencia óptica para todos los valores posibles de  $z$ . Las siguientes dos secciones servirán como ejemplo de lo anterior. El análisis anterior fue realizado en 1983 por Lohmann y Ojeda-Castañeda[1]. La utilidad de la función de ambigüedad para el estudio de sistemas ópticos ha sido evidente en diversas publicaciones[3-5].

#### 5.4) OTF de la función de pupila $Q(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$ .

El caso más sencillo a considerar es de la función de pupila descrita por la ecuación (5.5) y mostrada en la figura 5.1.

$$Q(\zeta) = \text{rect}(\zeta) = \begin{cases} 1 , & \zeta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 , & \zeta \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (5.5)$$

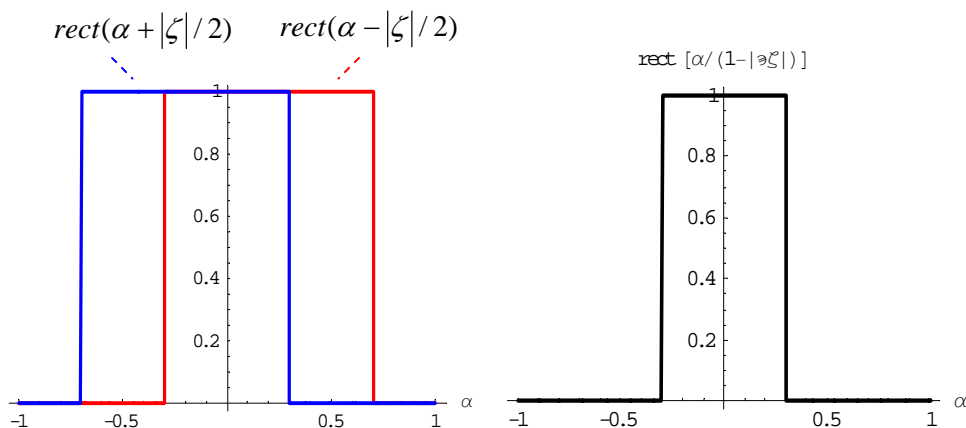


**Figura 5.1)** Función de pupila unidimensional

La función de pupila unidimensional mostrada en la figura 5.1 es la correspondiente para estudiar a la función de pupila circular, descrita en el capítulo 2. Para calcular la función de ambigüedad de la función  $rect(\xi)$ , primero es necesario encontrar una expresión simple para  $rect(\alpha + \frac{\xi}{2})rect(\alpha - \frac{\xi}{2})$ . Se puede verificar que se cumple la ecuación (5.6).

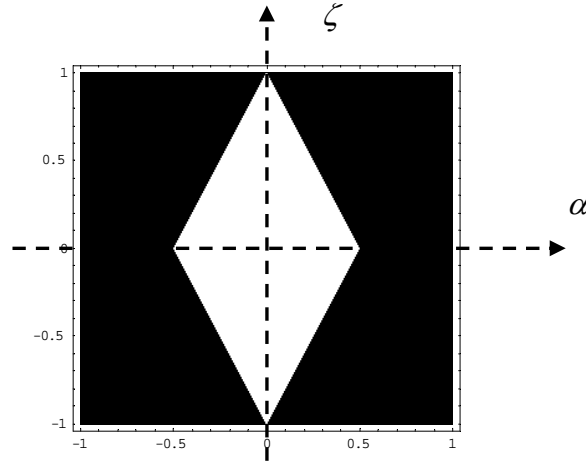
$$rect(\alpha + \frac{\xi}{2})rect(\alpha - \frac{\xi}{2}) = rect\left[\frac{\alpha}{1 - |\xi|}\right]. \quad (5.6)$$

Para ilustrar la validez de la ecuación (5.6), se muestra a continuación la figura 5.2.



**Figura 5.2)** (a) Gráfica de las funciones  $rect(\alpha - |\xi|/2)$  y  $rect(\alpha + |\xi|/2)$ .  
 (b) Gráfica de la función  $rect(\alpha - \xi/2)rect(\alpha + \xi/2)$ .

El producto  $rect(\alpha - \zeta / 2)rect(\alpha + \zeta / 2)$  es independiente del signo del corrimiento  $\zeta$ , de ahí que al calcularlo aparezca  $|\zeta|$  en lugar de  $\zeta$ . La función  $rect\left[\frac{\alpha}{1-|\zeta|}\right]$  se puede representar esquemáticamente como se hace en la figura 5.3.



**Figura 5.3)** Representación esquemática de la función  $rect(\alpha / 1 - |\zeta|)$ . La parte blanca representa la región donde la función es igual con uno. En la región negra la función es igual con cero.

Experimentalmente se puede visualizar a la función de ambigüedad utilizando una función de pupila de transmitancia en amplitud igual a la mostrada en la figura 5.3, y un dispositivo que realice la transformada de Fourier únicamente sobre el eje vertical. Combinando las ecuaciones (5.4) y (5.6) se puede calcular fácilmente la función de ambigüedad, como se muestra en las ecuaciones (5.7) y (5.8).

$$A(\zeta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} rect\left[\frac{\alpha}{1-|\zeta|}\right] e^{i2\pi\alpha\tau} d\alpha \quad (5.7)$$

$$A(\zeta, \tau) = (1-|\zeta|) \text{sinc}[(1-|\zeta|)\tau] \quad (5.8)$$

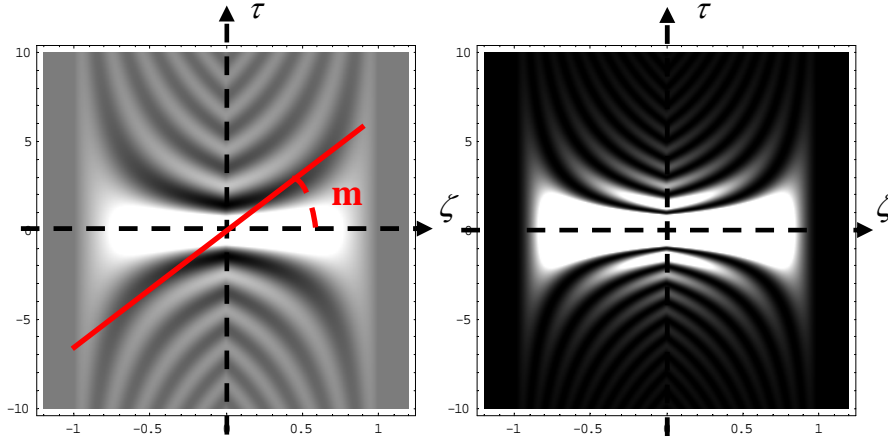
Se debe considerar también que  $|\zeta| \leq 1$ , como lo indica la ecuación (5.6). Para tomar en cuenta esta condición en la forma explícita de  $A(\zeta, \tau)$ , se reescribe la ecuación anterior en la forma de la ecuación (5.9).

$$A(\zeta, \tau) = (1 - |\zeta|) \sin c[(1 - |\zeta|)\tau] \text{rect}[\zeta / 2] \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) es la función de ambigüedad de la pupila unidimensional descrita en la ecuación (5.5). De la ecuación (5.3) se puede ver que  $H(\zeta, z)$  no es más que la función que se obtiene al cortar  $A(\zeta, \tau)$  a lo largo de una recta en el plano  $\tau\zeta$  descrita por la ecuación (5.10)[1].

$$\tau = -\lambda z \zeta \quad (5.10)$$

La figura 5.4 muestra una simulación computacional, de las funciones  $A(\zeta, \tau)$  y  $|A(\zeta, \tau)|^2$ . Dicha simulación asigna al color negro el valor más bajo de la función. Para la figura 5.4(a), el color negro corresponde a un valor de  $(-1)$  de la función. Para el caso mostrado en la figura 5.4(b), el color negro corresponde a un valor  $(0)$  de la función graficada.



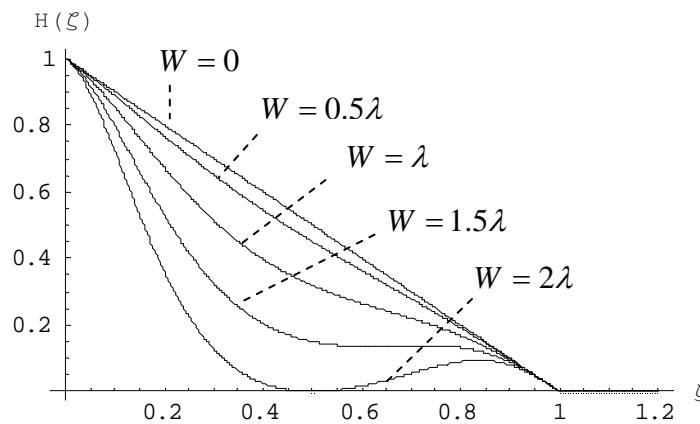
**Figura 5.4** (a) Simulación de  $A(\zeta, \tau)$ . La función  $H(\zeta, z)$  es la sección de  $A(\zeta, \tau)$  a lo largo de la recta  $\tau = -\lambda z \zeta$ . (b) Simulación numérica de  $|A(\zeta, \tau)|^2$ .

La figura 5.4(b) es de interés dado que experimentalmente sólo se puede visualizar  $|A(\zeta, \tau)|^2$ . A lo largo de la línea roja en la figura 5.4(a) se encuentra la función de transferencia óptica para  $z = -m/\lambda$ , donde  $m$  es la pendiente de la recta.

Por consistencia con la notación utilizada en capítulos anteriores, y de acuerdo a las referencias [1,3], es conveniente expresar a la función de transferencia óptica en términos del error de enfocamiento  $W$ , variable que para este caso cumple con la ecuación (5.11).

$$W = -\frac{\lambda^2 \Omega^2 z}{2} . \quad (5.11)$$

A continuación, en la figura 5.5, se reporta la OTF para algunos valores de  $W$ , para el caso  $\Omega = 1$ .



**Gráfica 5.2)** Función de transferencia óptica para diferentes valores de  $W$ . La OTF es simétrica respecto de  $W$  y respecto de  $\zeta$ .

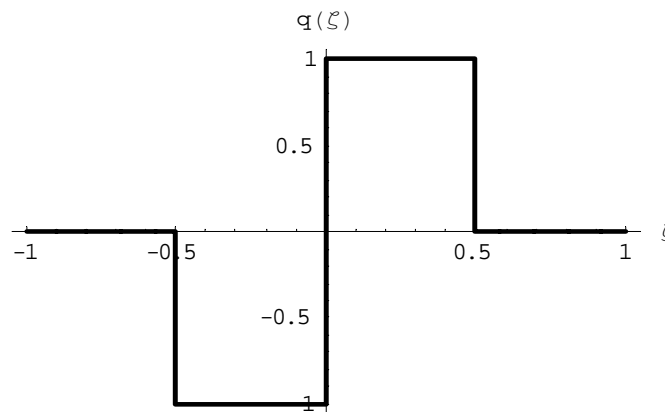
Para este caso, la función de ambigüedad ha sido de utilidad para encontrar el intervalo de  $W$  donde la OTF varía lentamente, siendo aproximadamente  $|W| \leq 0.5\lambda$ . En la siguiente sección de este último capítulo se analiza mediante este mismo recurso a la OTF de la función de pupila unidimensional correspondiente a la pupila circular con el filtro de fase binaria que produce irradiancia axial igual con cero para  $W = 0$ . Como se dijo en el capítulo 3, esta función de pupila puede ser de utilidad para efectos de presión luminosa.

**5.5) OTF de la función de pupila  $Q(\zeta) = \text{rect}(\zeta)\text{sgn}(\zeta)$ .**

La función de pupila a considerar a continuación tiene la forma matemática de la ecuación (5.12).

$$Q(\zeta) = \text{rect}(\zeta)\text{sgn}(\zeta) = \begin{cases} -1, & \zeta \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 1, & \zeta \in (0, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (5.12)$$

En la figura 5.6 se muestra la función de la ecuación (5.12).



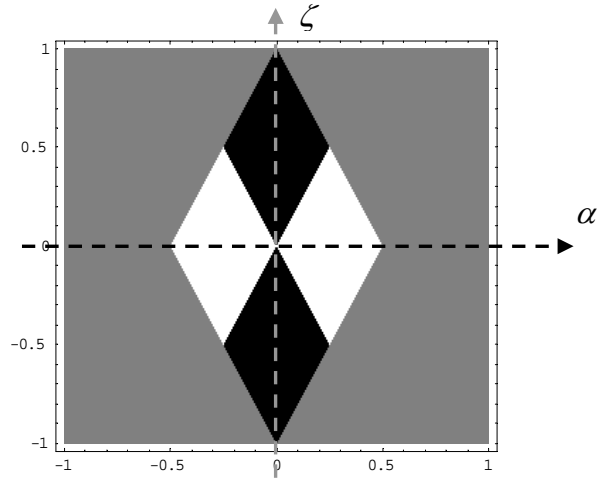
**Figura 5.6)** Función de pupila  $\text{rect}(\zeta)\text{sgn}(\zeta)$ .

Para esta pupila, calcular la función  $Q(\alpha - \zeta/2)Q(\alpha + \zeta/2)$  resulta un poco más complicado que para el caso anterior. Sin embargo se puede demostrar que ésta satisface la ecuación (5.13).

$$Q(\alpha - \zeta/2)Q(\alpha + \zeta/2) = \text{rect}\left[\frac{\alpha}{1-|\zeta|}\right] - 2\text{rect}\left[\frac{\alpha}{|\zeta|}\right]\text{rect}\left[\frac{\alpha}{1+|\zeta|}\right] \quad (5.13)$$

La función descrita por la ecuación (5.13) se visualiza en la figura 5.7.



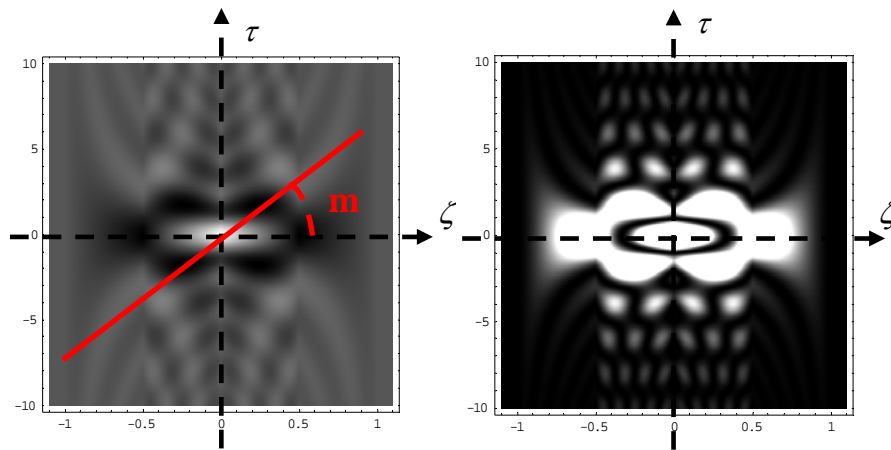


**Figura 5.7)** Representación esquemática de la función  $Q(\alpha - \zeta/2)Q(\alpha + \zeta/2)$ . La función toma los valores -1 (negro), 0 (gris), y 1 (blanco).

La función de ambigüedad se calcula combinando las ecuaciones (5.4) y (5.13). El producto de las funciones rectángulo de la parte derecha de (5.13), produce que la función  $A(\zeta, \tau)$  tenga dos expresiones diferentes, dependiendo del valor de  $\zeta$ . La función de ambigüedad se muestra en la ecuación (5.14).

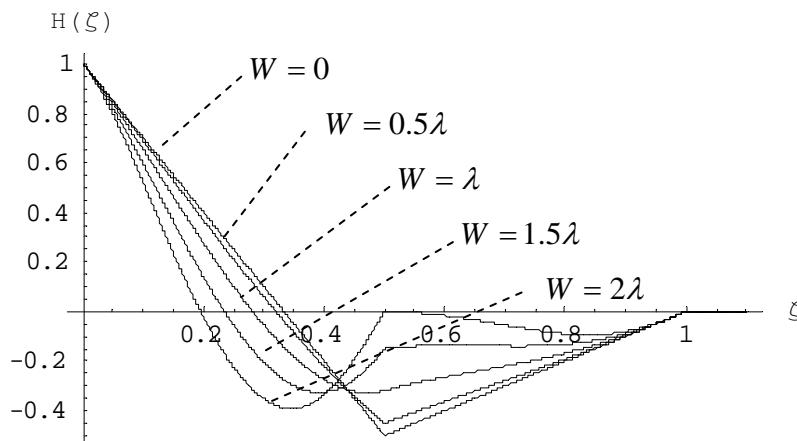
$$A(\zeta, \tau) = \begin{cases} |\zeta| \leq 0.5 & , \quad [(1 - |\zeta|)\text{sinc}[(1 - |\zeta|)\tau] - 2|\zeta|\text{sinc}[|\zeta|\tau]]\text{rect}(\zeta) \\ 0.5 \leq |\zeta| \leq 1 & , \quad -(1 - |\zeta|)\text{sinc}[(1 - |\zeta|)\tau]\text{rect}\left[\frac{|\zeta| - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right] \end{cases} \quad (5.14)$$

Para las expresiones mostradas en la ecuación (5.14), la función  $\text{rect}(\zeta/2)$  aparece para considerar la restricción impuesta por la función de pupila con salto de fase. Análogamente que en la sección anterior de este capítulo, se muestra en la figura 5.8 la simulación de las funciones  $A(\zeta, \tau)$  y  $|A(\zeta, \tau)|^2$ .



**Figura 5.8** (a) Simulación de  $A(\zeta, \tau)$ . La función  $H(\zeta, z)$  es la sección de  $A(\zeta, \tau)$  a lo largo de la recta  $\tau = -\lambda z \zeta$ . (b) Simulación de  $|A(\zeta, \tau)|^2$ . Experimentalmente no se puede visualizar  $A(\zeta, \tau)$ .

La OTF para esta función de pupila para diferentes valores de  $W$  se reporta en la figura 5.9.



**Figura 5.9)** Función de transferencia óptica para diferentes valores de  $W$ . La OTF es simétrica respecto de  $W$  y respecto de  $\zeta$ .

En esta función transferencia óptica, además de la frecuencia de corte, se encuentra un cero, el cual varía rápidamente conforme  $W$  se incrementa.

Recordando los resultados de los capítulos 3 y 4, esta función de pupila presenta irradiancia axial igual con cero para  $W = 0$ ; una pequeña variación en  $W$  se traduce en

un rápido incremento de la irradiancia axial. Lo anterior es consistente con el análisis presentado en este capítulo a partir de la función de ambigüedad de la pupila unidimensional correspondiente. Este filtro en particular no es de gran utilidad para mejorar la calidad de las imágenes, sino para otras aplicaciones tales como presión luminosa, o para ser utilizado como detector de la posición del plano focal de un sistema óptico.

Es necesario mencionar que si bien las funciones de pupila unidimensionales sirven para describir el comportamiento de pupilas bidimensionales con simetría radial, no se puede asegurar que la profundidad focal de cada pupila unidimensional es la misma que la de su pupila correspondiente en dos dimensiones. Sin embargo, se debe esperar que dado que un salto de fase en pupilas unidimensionales mejora la profundidad de foco, un salto de fase en una pupila con simetría radial debe tener el mismo efecto. Queda claro que la idea de *correspondencia* permite estudiar características de funciones de pupila bidimensionales de un modo mucho más sencillo que calculando directamente sus funciones de transferencia óptica.

La función de ambigüedad de Woodward es una herramienta de gran alcance, al permitir visualizar funciones de transferencia óptica en un mismo plano. En el laboratorio es factible reproducir a la función de ambigüedad asociada a una pupila unidimensional, y observar experimentalmente el comportamiento de un sistema óptico, aún cuando, el cálculo analítico de la OTF sea de gran complejidad. En este sentido, se puede pensar en la función de ambigüedad de una pupila como la huella digital que caracteriza a un sistema óptico. Inclusive, es factible pensar en la búsqueda de funciones

de pupila que presenten simetría rotacional en su correspondiente función de ambigüedad, ya que esto significaría un amplio rango de profundidad focal.