

## CAPÍTULO 4

### psf axial de una pupila de fase binaria y distribución anular

#### 4.1) Introducción

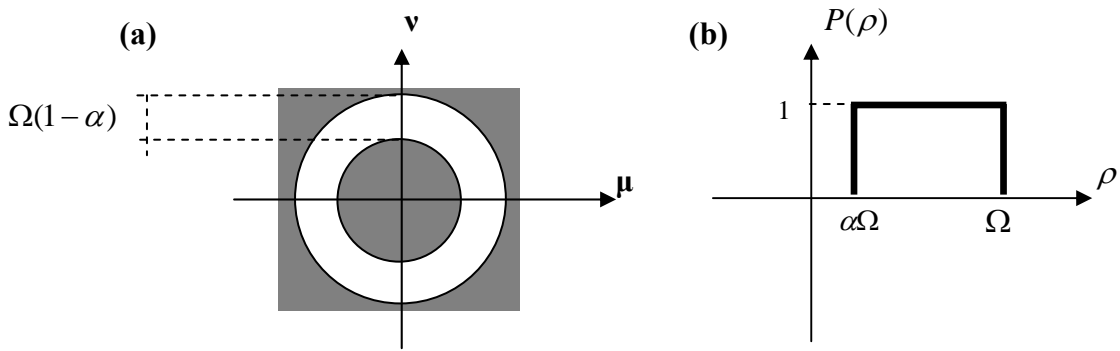
En este capítulo se describe el uso de un filtro de fase binaria, el cual está distribuido en una pupila anular, con el propósito de incrementar la profundidad focal. A partir de la evaluación de la *psf axial*, se analiza la profundidad focal que es factible con este filtro.

En los capítulos anteriores se han estudiado dos diferentes tipos de filtros ópticos que incrementan la profundidad focal: pupilas anulares y circulares sobre las cuales se localiza un filtro de fase binaria. De acuerdo a los resultados de estos capítulos y a las referencias [1-2], para preservar la captación luminosa de un sistema con función de pupila circular, resulta conveniente emplear un filtro óptico que contenga un salto de fase de  $\pi$  radianes. A continuación se estudia el uso de un filtro con un salto de fase en una función de pupila anular, característica de sistemas tales como telescopios reflectivos[3, pp 58-60].

#### 4.2) Cálculo de la *psf axial* para una función de pupila anular con un filtro de fase binaria.

La función de pupila anular estudiada en el capítulo 2 representa como se indica en la ecuación (4.1) y se muestra en la figura 4.1

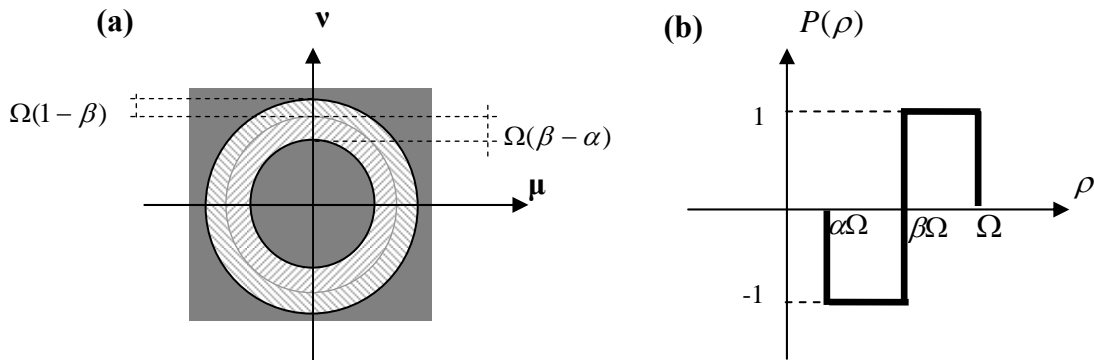
$$P(\rho) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) - \text{circ}\left(\frac{\rho}{\alpha\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & \rho \in [\alpha\Omega, \Omega] \\ 0, & \rho \notin [\alpha\Omega, \Omega] \end{cases} \quad (4.1)$$



**Figura 4.1** (a) Representación esquemática de la función de pupila anular. (b) Gráfica de la transmitancia asociada a la función de pupila anular

Al implementar el salto de fase en la pupila anular, la función toma la forma que se indica en la ecuación (4.2) y se muestra en la figura 4.2. Esta pupila depende de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$P(\rho) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) - 2\text{circ}\left(\frac{\rho}{\beta\Omega}\right) + \text{circ}\left(\frac{\rho}{\alpha\Omega}\right) = \begin{cases} -1, & \rho \in [\alpha\Omega, \beta\Omega] \\ 1, & \rho \in [\beta\Omega, \Omega] \\ 0, & \rho \notin [\alpha\Omega, \Omega] \end{cases} \quad (4.2)$$



**Figura 4.2** (a) Representación esquemática de la función de pupila con fase binaria y distribución anular. (b) Gráfica de la función de pupila con fase binaria y distribución anular.

En la ecuación (4.2) se asume que  $0 < \alpha < \beta < 1$ . Este filtro óptico es una nueva variante para la función de pupila anular permite incrementar la profundidad focal,

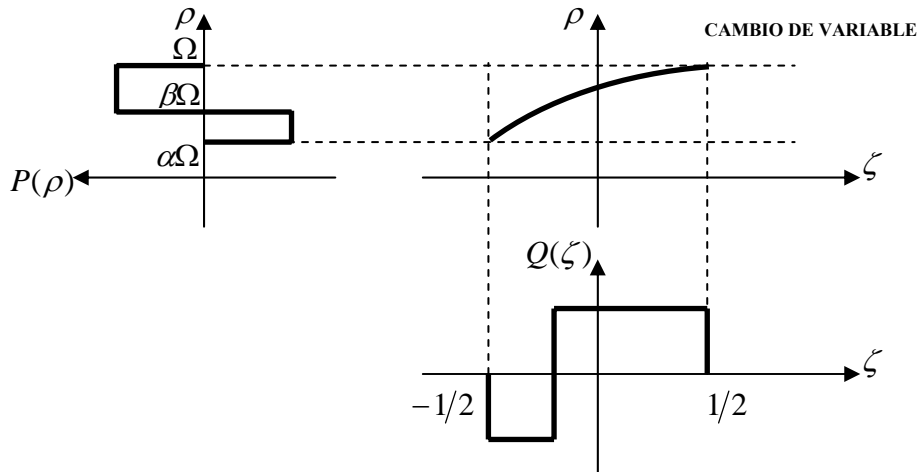
como se muestra en la siguiente sección de este capítulo. Para calcular la respuesta axial se utiliza la ecuación (4.3).

$$I(z) = \left| 2\pi \int_0^{\infty} P(\rho) e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho d\rho \right|^2. \quad (4.3)$$

De manera similar a los capítulos anteriores, en este capítulo se propone el uso del cambio de variable definido por la ecuación (4.4).

$$\zeta \equiv \frac{\rho^2/\Omega^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} - \frac{1}{2} \quad (4.4)$$

Este cambio de variable se ilustra en la figura 4.3

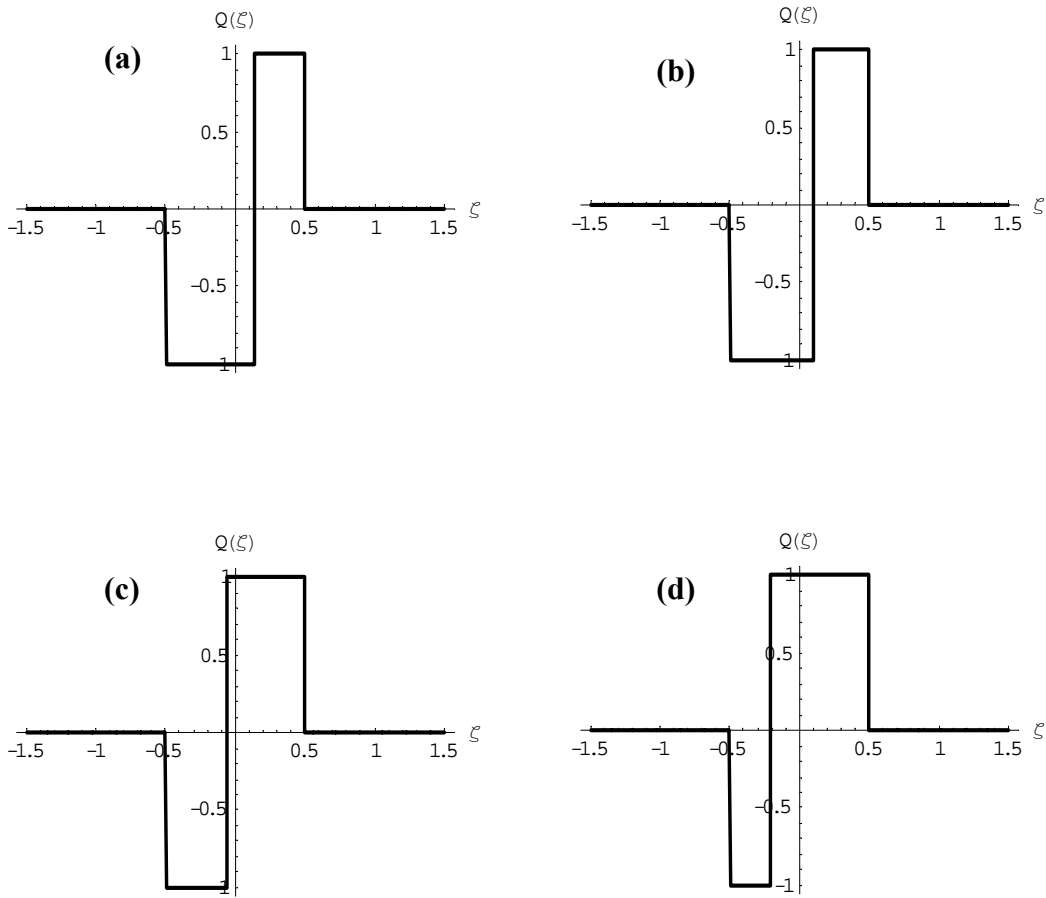


**Figura 4.3)** Representación esquemática del cambio de variable definido por la ecuación (4.4)

Es directo verificar que con el cambio de variable en la ecuación (4.4), la transmitancia de la función de pupila  $P(\rho)$  cambia a la función descrita por la ecuación (4.5).

$$Q(\zeta) = \text{rect} \left[ \frac{\zeta - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right)}{\left( \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \right)} \right] - \text{rect} \left[ \frac{\zeta + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \right)}{\left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right)} \right]. \quad (4.5)$$

Algunos perfiles de transmitancia, asociados a la función efectiva de pupila  $Q(\zeta)$  en la ecuación (4.5) se grafican en la figura 4.4, para diferentes valores de  $\alpha$  y para  $\beta = 0.8$ .



**Figura 4.4**  $Q(\zeta)$  vs  $\zeta$  para diferentes valores de  $\alpha$  y para  $\beta = 0.8$ . (a)  $\alpha = 0.1$ . (b)  $\alpha = 0.3$  (c)  $\alpha = 0.6$  (d)  $\alpha = 0.7$

Utilizando el cambio de variable de la ecuación (4.4), la distribución de irradiancia axial se puede escribir de modo más sencillo como se muestra a continuación:

$$I(z) = \left| \pi \Omega^2 (1 - \alpha^2) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Q(\zeta) e^{-i\pi \lambda z \Omega^2 \left[ \left( \zeta + \frac{1}{2} \right) (1 - \alpha^2) + \alpha^2 \right]} d\zeta \right] \right|^2, \quad (4.6)$$

$$I(z) = \left| \pi \Omega^2 (1 - \alpha^2) e^{-i\pi \frac{\lambda z}{2} \Omega^2 (1 + \alpha^2)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Q(\zeta) e^{i2\pi \zeta \left( -\frac{\lambda z \Omega^2 (1 - \alpha^2)}{2} \right)} d\zeta \right] \right|^2, \quad (4.7)$$

$$I(z) = [\pi\Omega^2(1-\alpha^2)]^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Q(\zeta) e^{i2\pi\zeta \left( \frac{-\lambda z \Omega^2(1-\alpha^2)}{2} \right)} d\zeta \right]^2. \quad (4.8)$$

Análogamente al procedimiento establecido en capítulos anteriores se utiliza el cambio de variable  $s \equiv -\lambda z \Omega^2(1-\alpha^2)/2$  para expresar a la respuesta axial en términos de una transformada de Fourier inversa, de acuerdo a la ecuación (4.9).

$$I(z) = [\pi\Omega^2(1-\alpha^2)]^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Q(\zeta) e^{i2\pi\zeta s} d\zeta \right]^2. \quad (4.9)$$

Combinando las ecuaciones (4.5) y (4.9), se puede obtener la psf axial no-coherente:

$$I(s) = [\pi\Omega^2(1-\alpha^2)]^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[ \frac{\zeta - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right)}{\left( \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \right)} \right] e^{i2\pi\zeta s} d\zeta - \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[ \frac{\zeta + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \right)}{\left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right)} \right] e^{i2\pi\zeta s} d\zeta \right|^2, \quad (4.10)$$

$$I(s) = [\pi\Omega^2(1-\alpha^2)]^2 \left| \left( \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \right) \text{sinc} \left[ \left( \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \right) s \right] e^{i\pi s \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right)} - \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) \text{sinc} \left[ \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) s \right] e^{-i\pi s \left( \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \right)} \right|^2, \quad (4.11)$$

$$I(s) = [\pi\Omega^2]^2 \left[ \begin{array}{l} (1 - \beta^2)^2 \text{sinc}^2 \left[ \left( \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \right) s \right] + (\beta^2 - \alpha^2)^2 \text{sinc}^2 \left[ \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) s \right] \\ - 2(1 - \beta^2)(\beta^2 - \alpha^2) \text{sinc} \left[ \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) s \right] \text{sinc} \left[ \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) s \right] \cos[\pi s] \end{array} \right] \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) está en función de la variable  $s$  relacionada con el error de enfocamiento  $W$  de acuerdo a (4.13).

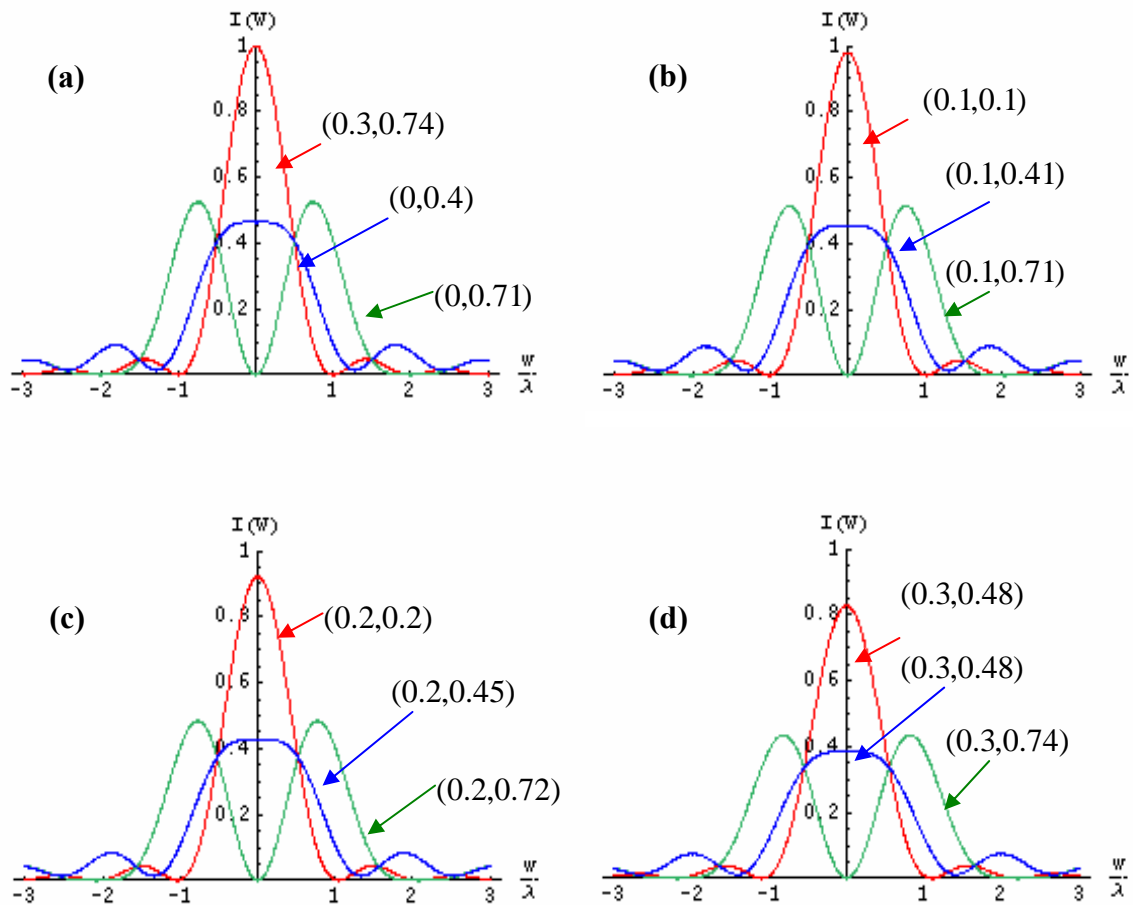
$$s = \frac{(1 - \alpha^2)}{\lambda} W. \quad (4.13)$$

La psf axial como función de  $W$ , es entonces, la expresión mostrada en la ecuación (4.14).

$$I(W) = [\pi\Omega^2]^2 \left[ \begin{aligned} & (1-\beta^2)^2 \operatorname{sinc}^2 \left[ \left( \frac{1-\beta^2}{\lambda} \right) W \right] + (\beta^2 - \alpha^2)^2 \operatorname{sinc}^2 \left[ \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\lambda} \right) W \right] \\ & - 2(1-\beta^2)(\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{sinc} \left[ \left( \frac{1-\beta^2}{\lambda} \right) W \right] \operatorname{sinc} \left[ \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\lambda} \right) W \right] \cos \left[ \pi \left( \frac{1-\alpha^2}{\lambda} \right) W \right] \end{aligned} \right] \quad (4.14)$$

La función  $I(W)$  depende además de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Como se puede ver, esta distribución de irradiancia axial es proporcional al cuadrado del área de la pupila  $[\pi\Omega^2]^2$ .

La ecuación (4.14) contiene como casos particulares a las respuestas axiales de todas las funciones de pupila consideradas en los capítulos 2 y 3. En la figura 4.5 se reportan las gráficas que muestran algunos de los casos representativos.

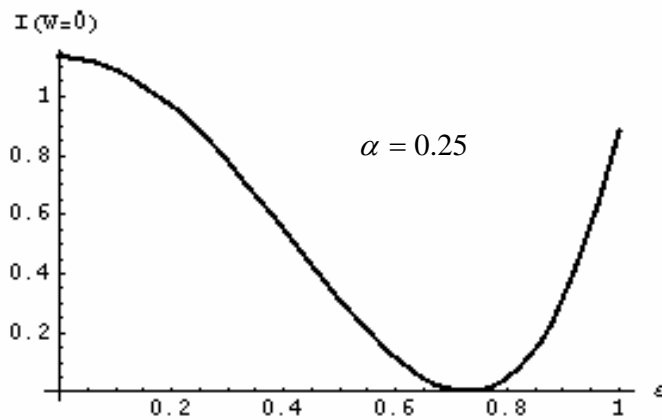


**Figura 4. 5)** Respuesta axial de una función de pupila de fase binaria y distribución anular, en términos de los parámetros  $(\alpha, \beta)$ . En todos los casos la función se encuentra dividida entre el factor  $(\pi\Omega^2)^2$ .  
**(a)**  $\alpha = 0$ . **(b)**  $\alpha = 0.1$ . **(c)**  $\alpha = 0.2$ . **(d)**  $\alpha = 0.3$ .

Las curvas reportadas en la figura 4.5 muestran un comportamiento similar de la distribución de irradiancia axial para cada valor de  $\alpha$ . Para un cierto  $\alpha$  fijo existen dos valores de  $\beta$  que permiten máxima captación luminosa, otros dos que resultan en un máximo de profundidad focal, y uno más para el cual se tiene  $I(0) = 0$ .

Ahora bien, en la figura 4.6, se considera ahora a la función  $I(0)$  normalizada, descrita por la ecuación (4.15).

$$I(0) = (1 + \alpha^2 - 2\beta^2)^2 . \quad (4.15)$$



**Figura 4.6)**  $I(0)$  en términos del parámetro  $\beta$ , para el valor  $\alpha = 0.25$

El valor de  $\beta$  en el que se obtiene  $I(0) = 0$  depende del valor de  $\alpha$  que se ha fijado.

En el caso mostrado en la figura 4.6 se cumple lo anterior para  $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{17}{2}}$ . El caso general se puede demostrar a partir de la ecuación (4.15), y da como resultado la ecuación (4.16).

$$\beta = \sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{2}} . \quad (4.16)$$

Entonces, si se satisface la ecuación (4.16), la irradiancia sobre el eje óptico y para  $W = 0$  es igual con cero. Por otra parte, los valores de  $\beta$  para los que se tiene el máximo de  $I(0)$  son  $\beta = \alpha$  y  $\beta = 0$ . En la siguiente sección se discute acerca de la profundidad focal de las funciones de pupila de fase binaria y distribución anular, y se calcula la relación que  $\alpha$  y  $\beta$  deben satisfacer para obtener el valor máximo de  $\Delta z$ .

### 4.3) Profundidad focal de una función de pupila de fase binaria con distribución anular.

Como se puede ver en la figura 4.5, la irradiancia axial para  $W = 0$  puede tener un máximo o un mínimo respecto a la variable  $W$ . Cuando se quiere incrementar la profundidad focal los casos de interés son aquellos donde se encuentran máximos. Como se menciona en la sección anterior, existen ciertos valores de  $\beta$  para los cuales se tiene un máximo de profundidad focal, dado un valor fijo de  $\alpha$ . Para encontrar estos valores, se considera a la segunda derivada de la función  $I(W)$  respecto de  $W$  evaluada en  $W = 0$ , como se ilustra en la ecuación (4.17).

$$\left. \frac{d^2 I(W)}{dW^2} \right|_{W=0} = -\frac{2}{3} \pi^2 \left[ \begin{aligned} &1 + 4\alpha^2 - 6\alpha^4 + 4\alpha^6 + \alpha^8 - 8(1 + \alpha^6)\beta^2 \\ &+ 12(1 + \alpha^4)\beta^4 - 8(1 + \alpha^2)\beta^6 + 4\beta^8 \end{aligned} \right]. \quad (4.17)$$

La ecuación (4.17) puede ser vista como una función de las variables  $\alpha$  y  $\beta$ . Cuando éste polinomio toma valores negativos  $I(0)$  es un máximo, cuando tiene valores positivos  $I(0)$  es un mínimo. Si se fija un valor de  $\alpha$ , (4.16) es un polinomio de octavo grado en la variable  $\beta$ . Las raíces reales  $\beta_1^{\max}$  y  $\beta_2^{\max}$  de dicho polinomio son los valores que  $\beta$  debe tomar para obtener el máximo de profundidad focal posible. En términos de  $\alpha$ , las raíces  $\beta_1^{\max}$  y  $\beta_2^{\max}$  son:



$$\beta_1^{\max} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3} + (1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 3})\alpha^2}}{\sqrt{2}}, \quad (4.18)$$

$$\beta_2^{\max} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 3} - (\sqrt{2\sqrt{3} - 3} - 1)\alpha^2}}{\sqrt{2}}. \quad (4.19)$$

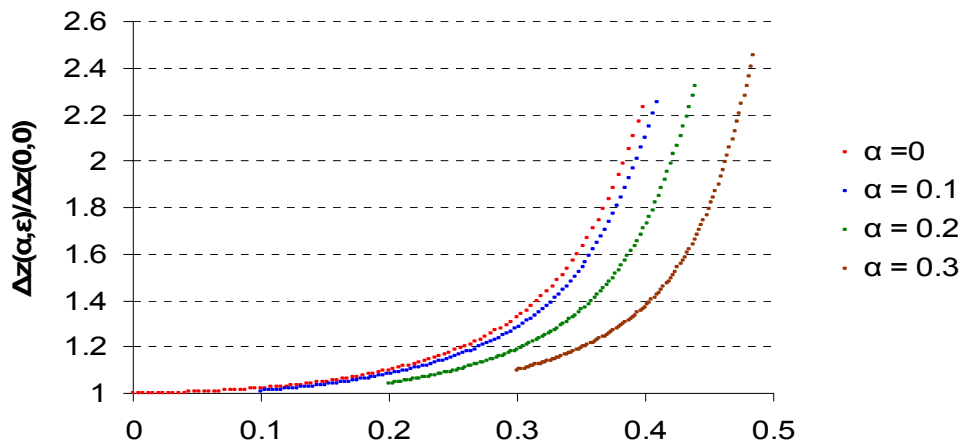
Cuando por ejemplo  $\alpha = 0$ , esto implica que  $\beta_1^{\max} \approx 0.4$ , resultado obtenido gráficamente en el capítulo anterior. La ecuación (4.18) será utilizada para graficar la profundidad focal máxima posible para una función de pupila en la que se ha fijado el parámetro  $\alpha$ .

Para obtener la profundidad focal, se debe igualar el segundo miembro de la ecuación (4.14) a 0.8 y resolver numéricamente. La figura 4.7 muestra la profundidad focal de la función de pupila de fase binaria y distribución anular en términos del parámetro  $\beta$ , para diferentes valores de  $\alpha$ . El parámetro  $\beta$  se encuentra en el intervalo  $[\alpha, \beta_1^{\max}]$ . Para valores de  $\beta$  dentro del intervalo  $(\beta_1^{\max}, \beta_2^{\max})$ , la función  $I(0)$  es un mínimo respecto a  $W$ , por lo que este dominio no se considera como posibles soluciones para incrementar la profundidad de foco. Para el intervalo  $(\beta_2^{\max}, 1)$ , la función  $I(0)$  es nuevamente un máximo respecto a  $W$ , pero dada la simetría de esta función, para los fines de esta tesis basta considerar los casos mostrados en la figura 4.7. En estas curvas se normalizó la profundidad focal respecto de  $\Delta z(0,0)$ , valor que es igual al de  $\Delta z(0)$ , considerada los capítulos anteriores, como lo muestra la ecuación (4.20).

$$\Delta z(0,0) = \frac{1}{\lambda \Omega^2}. \quad (4.20)$$

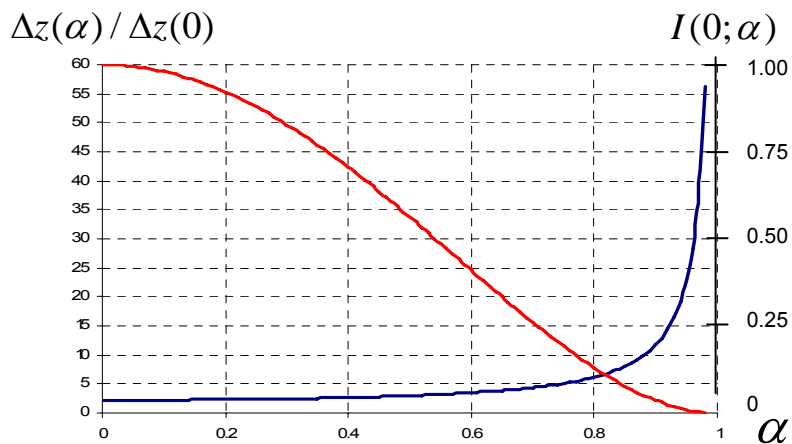
La profundidad de foco en la ecuación anterior se expresa en la forma de la ecuación

(4.20) debido a que depende de los dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .



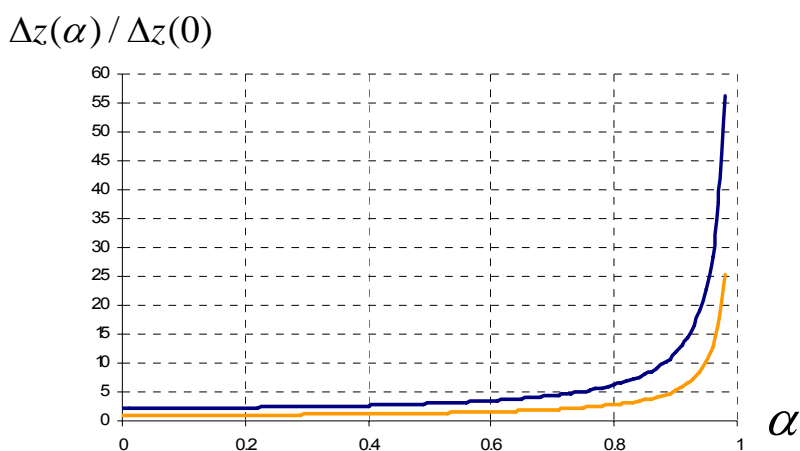
**Figura 4.7)** Profundidad focal normalizada respecto a  $\Delta z(0,0)$ , como función del parámetro  $\beta$ , para diferentes valores de  $\alpha$

Para graficar la profundidad focal máxima posible para cada valor de  $\alpha$  primero se combinan las ecuaciones (4.14) y (4.18), la relación obtenida se iguala a 0.8 y se resuelve numéricamente. La figura 4.8 muestra en azul a la curva,  $\Delta z(\alpha) / \Delta z(0)$ , de profundidad de foco máxima, y en rojo al valor de la irradiancia axial  $I(0; \alpha)$ .



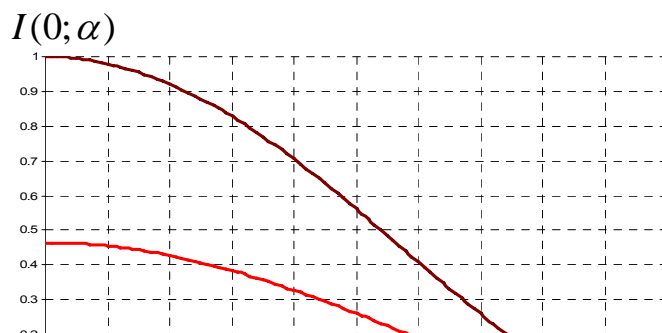
**Figura 4.8)** la curva en azul es  $\Delta z(\alpha) / \Delta z(0)$  para  $\beta_1^{\max}$ . La curva roja es la irradiancia axial en foco correspondiente.

La función que aparece en la figura 4.8 depende sólo del parámetro  $\alpha$  ; la dependencia de  $\beta$  desaparece al utilizar la ecuación (4.18). Realizar el procedimiento descrito anteriormente, pero utilizando  $\beta_2^{\max}$  en lugar de  $\beta_1^{\max}$ , resulta en curvas exactamente iguales a las mostradas en la figura 4.8, debido a que para  $\beta_1^{\max}$  y  $\beta_2^{\max}$  se obtienen los mismos valores, tanto de la función  $I(0;\alpha)$ , como de la profundidad focal máxima  $\Delta z_{\max}(\alpha)$ . La función  $\Delta z_{\max}(\alpha)$  tiene comportamiento asintótico en  $\alpha = 1$ . Se debe tener en cuenta que  $\alpha = 1$  no es un valor físicamente útil ya que en este caso la energía que entra al sistema es igual con cero. La comparación de la profundidad focal de la pupila anular antes y después de utilizar el filtro de fase binaria se muestra en la figura 4.9.



**Figura 4.9)** Comparación de  $\Delta z(\alpha) / \Delta z(0)$  de la función de pupila anular antes (naranja) y después (azul) de utilizar el filtro de fase binaria.

De modo similar se compara la irradiancia axial en foco en la figura 4.10.



Como es claro del análisis realizado en este capítulo, es posible implementar filtro fase binaria, no sólo para funciones de pupila circulares, sino también para algunas otras, tales como las anulares. Dicho análisis resulta de utilidad práctica, ya que en algunos sistemas ópticos es imposible suprimir la distribución anular de su función de pupila.

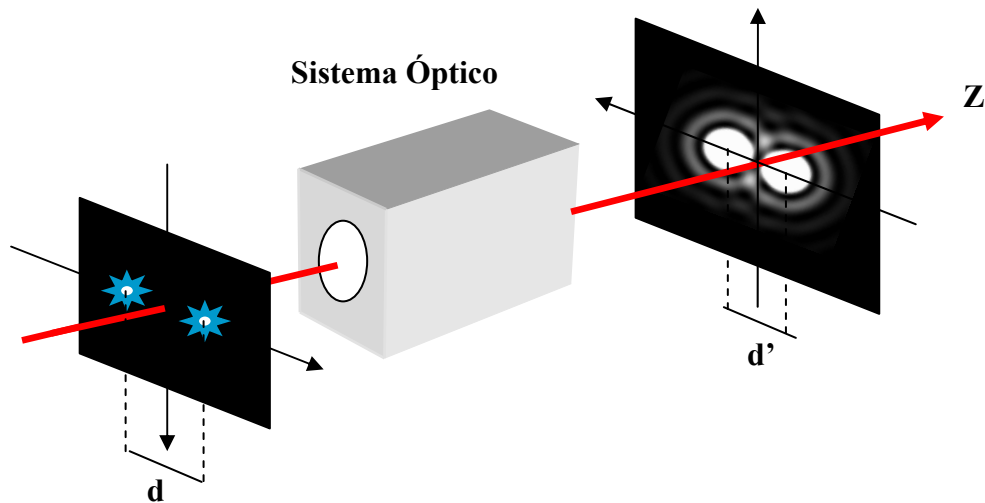
Los resultados más importantes de este capítulo son las ecuaciones (4.16), (4.18) y (4.19). La primera proporciona la relación funcional entre los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  para obtener irradiancia axial en,  $W = 0$ , lo cual puede ser de utilidad para efectos de presión luminosa; las dos ecuaciones restantes, indican los valores de  $\beta$  que producen una máxima profundidad focal. El incremento de  $\Delta z$  máximo posible es de más del cien por ciento con la implementación de este filtro. No obstante, se debe dejar en claro que el precio que se paga por este incremento, utilizando los filtros de fase binaria, es la reducción de la captación luminosa del sistema en aproximadamente un cincuenta por ciento.

Como se concluyó en el capítulo 3 de esta tesis, la discontinuidad en la transmitancia de los filtros de fase binaria se traducen en variaciones violentas de la respuesta axial. Si se quiere evitar este inconveniente, se deben buscar otros filtros que presenten variaciones continuas en su fase.

#### 4.4) Análisis de la resolución.

A lo largo de esta tesis se ha estudiado el efecto de diferentes funciones de pupila en la profundidad focal y en la energía captada por el sistema óptico. Otro aspecto de suma importancia es el estudio del efecto que las funciones de pupila tienen en el poder de resolución del sistema. A continuación se muestra un breve análisis de la resolución producida por los filtros de fase binaria propuestos en esta tesis.

El criterio de resolución más sencillo se basa en la observación de la psf en foco del sistema óptico. Considérese un sistema óptico en el cual se han colocado dos objetos puntuales separados por una distancia  $d$ , como lo muestra la figura 4.11. En el plano imagen se observa una psf en foco por cada objeto. Se tiene que, por ejemplo, para un sistema óptico con función de pupila circular, se obtienen a la salida dos patrones de difracción de Airey, separados por una distancia  $d'$ .

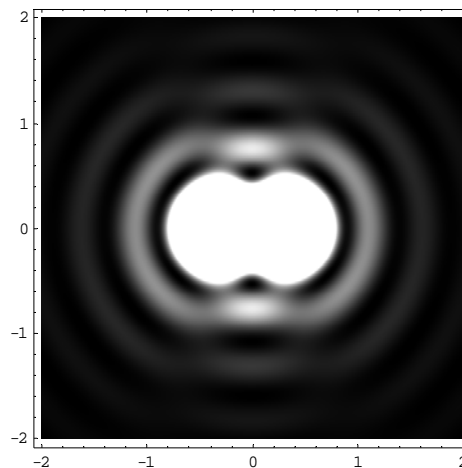


**Figura 4.11)** Imagen de dos objetos puntuales, formadas por un sistema óptico de pupila circular. La distancia de separación entre los patrones de Airy depende de la distancia entre los objetos puntuales.

De acuerdo al criterio de Rayleigh, la distancia  $d$  que produce que, en el plano imagen, el máximo de uno de los patrones de Airy coincida con el primer mínimo del otro, es la distancia mínima de resolución. Esto es, la resolución de un sistema óptico depende,

desde este punto de vista, de la distribución de la psf en foco de la función de pupila. Entre más pequeña sea la distancia mínima de resolución  $d$ , el poder de resolución es mayor. Este criterio puede ser aplicado a cualquier función de pupila. A continuación se compara la resolución obtenida con funciones de pupila circular, anular, y con el filtro de fase binaria propuesto en este capítulo.

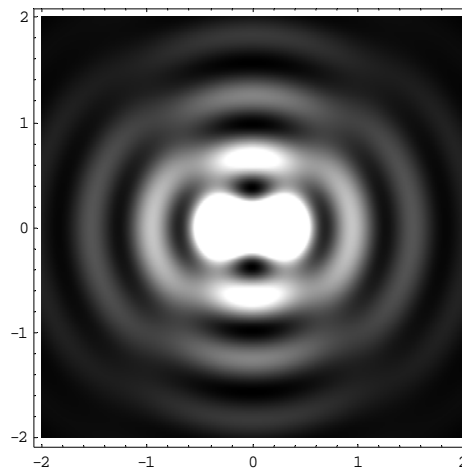
Para una función de pupila circular, se muestra a continuación una simulación de la imagen de dos objetos puntuales, en la figura 4.12.



**Figura 4.12)** Imagen de dos objetos puntuales en el límite de resolución, producido de un sistema óptico con función de pupila circular.

La imagen de la figura 4.12 corresponde a la distancia mínima de resolución para una función de pupila circular. De modo análogo que se hizo el análisis para profundidad focal en los capítulos anteriores, a continuación se compara la distancia mínima de resolución para diferentes funciones de pupila en términos de aquella que corresponde para una pupila circular. Además, dado que la distancia entre las psf observadas en el plano imagen es proporcional a la distancia entre los objetos puntuales, la distancia de resolución mínima será comparada a partir de la distancia de separación entre los máximos de las dos psf obtenidas para cada caso.

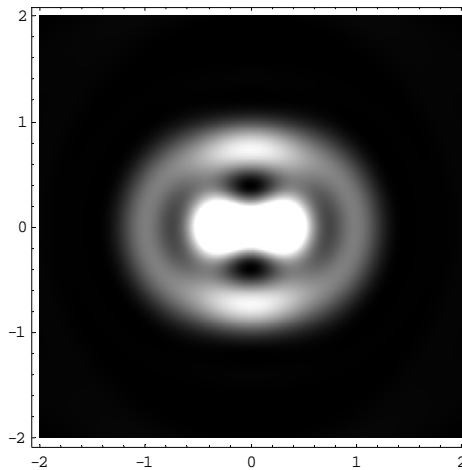
Para una función de pupila anular, se considera el caso en el que esta incrementa la profundidad focal 2.2 veces, respecto a la pupila circular. La imagen de dos objetos puntuales que un sistema óptico con esta pupila anular produce se muestra en la figura 4.13.



**Figura 4.13)** Imagen de dos objetos puntuales en el límite de resolución, producida por un sistema óptico con función de pupila anular.

Al realizar cálculos numéricos se puede concluir que, para una función de pupila anular que incrementa la profundidad focal 2.2, la distancia mínima de resolución es de 0.72 comparando ambas cantidades con las que produce una función de pupila circular. Esto es, el poder de resolución aumenta al incrementar la profundidad focal, utilizando la función de pupila anular.

Ahora se compara la resolución de la función de pupila circular al implementar el filtro de fase binaria óptimo, resultado del análisis realizado en este capítulo. Después de implementar el filtro, la imagen de dos puntos obtenida, en el límite de resolución, es la que se muestra en la figura 4.14.



**Figura 4.14)** Imagen de dos objetos puntuales en el límite de resolución, producida por un sistema óptico con función de pupila circular a la que se ha implementado el filtro de fase binaria.

Una inspección cuidadosa de las figuras 4.12 y 4.14, permite observar que la distancia mínima de resolución para la función de pupila circular con la implementación del filtro de fase binaria es de 0.75, compara con la pupila circular sin el filtro.

La resolución obtenida con la pupila anular es aproximadamente igual que la correspondiente a la pupila circular con el filtro de fase binaria. Dado que los casos anteriormente comparados incrementan el rango de profundidad focal en la misma medida, la ventaja clara de los filtros de fase binaria respecto a las pupilas anulares es, como se ha dicho antes, que los primeros no presentan atenuación, es decir, permiten el paso de más energía al sistema.

Un análisis más detallado y formal resulta del estudio de la OTF del sistema. Dicho análisis queda más allá del enfoque de esta tesis, y que da abierto para un posterior estudio.