

# CAPÍTULO 3

## psf axial de una función de pupila circular de fase binaria

### 3.1) Introducción

En este tercer capítulo se calcula la *psf axial* asociada a funciones de pupila de simetría radial que presentan un salto en su transmitancia en amplitud. De estos cálculos se analiza la profundidad de foco de este tipo de pupilas.

El procedimiento seguido hasta ahora para encontrar la *psf axial* ha sido similar para las diferentes funciones de pupila consideradas. Primero, tomando en cuenta a la ecuación (2.8), se escoge un cambio de variable apropiado para resolverla; posteriormente, para cada caso se ha encontrado una función  $Q(\zeta)$  cuya transformada inversa de Fourier permite calcular la distribución de irradiancia axial buscada. Se pretende encontrar los cambios variable que permiten expresar a la respuesta axial en la forma de la ecuación

$$I(s) = \left| \pi \Omega^2 e^{i\pi s} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\zeta) e^{i2\pi \zeta s} d\zeta \right|^2. \quad (3.1)$$

Se puede decir entonces que para estudiar la respuesta axial de una función de pupila  $P(\rho)$  se puede utilizar su función de pupila unidimensional correspondiente  $Q(\zeta)$ .

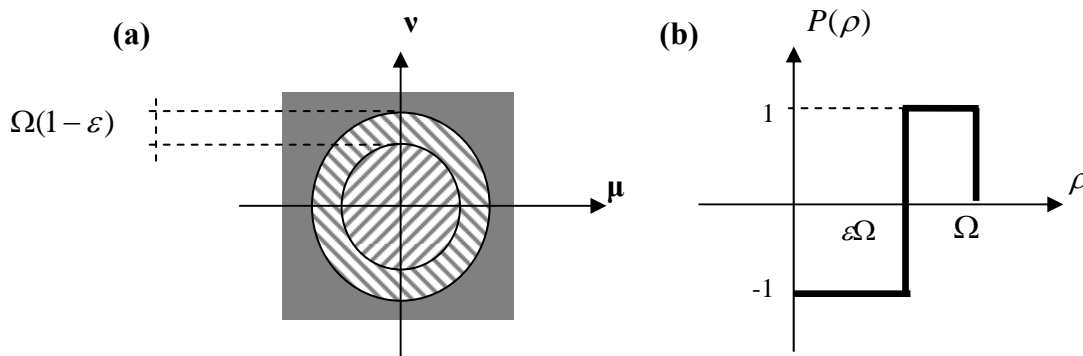
En el capítulo anterior se analizaron las posibilidades de incrementar la profundidad de foco  $\Delta z$  de un sistema óptico es utilizando funciones de pupila anulares. Este método resulta conveniente reduciendo el ancho del anulo; sin embargo, presentan una desventaja: la energía luminosa que el sistema capta disminuye conforme esto se reduce el ancho del anulo. Es entonces deseable identificar otro tipo de filtros que empleen toda la abertura de la pupila, sin ninguna atenuación, es decir, filtros con saltos de fase.

Debido a que los cambios de fase más sencillos de analizar son saltos binarios (-1 y 1), en este capítulo se analizarán distribuciones de fase anular como las que se indican en la figura 3.1.

### 3.2) Cálculo de la *psf axial* para una función de pupila circular de fase binaria

En publicaciones recientes se ha estudiado el efecto que tiene en la profundidad de foco la implementación de filtros que presentan saltos de fase en su transmitancia en amplitud [1-2]. De modo similar, en esta tesis se estudia a la función de pupila representada por la ecuación (3.2), y mostrada en la figura 3.1.

$$P(\rho) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) - 2\text{circ}\left(\frac{\rho}{\varepsilon\Omega}\right) = \begin{cases} -1, & 0 < \rho < \varepsilon\Omega \\ 1, & \varepsilon\Omega < \rho < \Omega \\ 0, & \rho > \Omega \end{cases} \quad (3.2)$$



**Figura 3.1** (a) Representación esquemática de la función de pupila circular de fase binaria.  
 (b) Gráfica de la función de pupila circular de fase binaria

A diferencia de la función estudiada en las referencias arriba mencionadas, la pupila representada esquemáticamente en la figura anterior presenta sólo un salto de fase. Utilizando el modelo de los capítulos anteriores, la distribución de irradiancia sobre el eje óptico de la imagen de un punto luminoso está dada por la ecuación (3.3).

$$I(z) = \left| 2\pi \int_0^{\infty} P(\rho) e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho d\rho \right|^2. \quad (3.3)$$

Sustituyendo la expresión de  $P(\rho)$  en la ecuación (3.2), en la ecuación (3.3) se obtiene la ecuación

$$I(z) = \left| 2\pi \left[ \int_0^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho d\rho - 2 \int_0^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\rho}{\varepsilon\Omega}\right) e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho d\rho \right] \right|^2, \quad (3.4)$$

lo cual se puede expresar como

$$I(z) = (2\pi)^2 \left| \int_0^{\Omega} e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho d\rho - 2 \int_0^{\varepsilon\Omega} e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho d\rho \right|^2. \quad (3.5)$$

Lo que se busca es expresar a la ecuación (3.5) en términos de la transformada inversa de Fourier de una función de pupila unidimensional equivalente, esto es, en la forma de la ecuación

$$I(s) = \left| \pi\Omega^2 e^{i\pi s} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\zeta) e^{i2\pi\zeta s} d\zeta \right|^2. \quad (3.6)$$

Del mismo modo que en el capítulo 2, es conveniente utilizar el cambio de variable mostrado en la ecuación

$$\zeta \equiv \frac{\rho^2}{\Omega^2} - \frac{1}{2}. \quad (3.7)$$

Es útil reconocer que con este cambio de variable la función  $P(\rho) = \text{circ}(\rho/\Omega)$  se transforma en la función  $Q(\zeta)$  escrita a continuación como la ecuación

$$Q(\zeta) = \text{rect}[\zeta]. \quad (3.8)$$

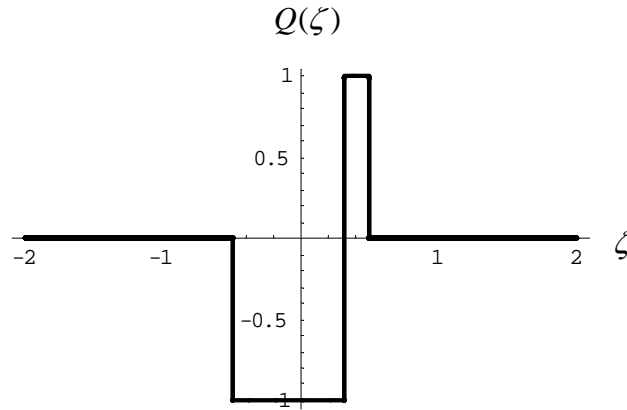
Mientras que la función  $P(\rho) = \text{circ}(\rho/\Omega)$  se transforma en la función mostrada en la ecuación

$$Q(\zeta) = \text{rect}\left[\frac{\zeta + (1 - \varepsilon^2/2)}{\varepsilon^2}\right]. \quad (3.9)$$

Para toda la función de pupila se tiene que la transformación correspondiente es entonces la mostrada en la ecuación

$$Q(\zeta) = \text{rect}[\zeta] \text{sgn}\left[\zeta - \left(\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (3.10)$$

En la figura 3.2 se muestra a la función  $Q(\zeta)$ .



**Figura 3.2)**  $Q(\zeta)$  vs  $\zeta$

Consecuentemente, la ecuación (3.4) se transforma en la forma de la ecuación (3.11).

$$I(z) = (\pi\Omega^2)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}[\zeta] e^{-i\pi\zeta\lambda z\Omega^2} d\zeta - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left[\frac{\zeta + (1 - \varepsilon^2/2)}{\varepsilon^2}\right] e^{-i\pi\zeta\lambda z\Omega^2} d\zeta \right|^2. \quad (3.11)$$

Si se define  $s \equiv -\lambda z\Omega^2/2$ , es posible expresar a las integrales en la ecuación (3.11) con la forma requerida en la ecuación (3.6), como se muestra a continuación en la ecuación (3.12).

$$I(s) = (\pi\Omega^2)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}[\zeta] e^{i2\pi\zeta s} d\zeta - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left[\frac{\zeta + (1 - \varepsilon^2/2)}{\varepsilon^2}\right] e^{i2\pi\zeta s} d\zeta \right|^2. \quad (3.12)$$

Se debe observar que la variable  $s$  es proporcional al error de enfocamiento del frente de onda  $W$  utilizado para describir aberraciones en óptica ondulatoria. La ecuación (3.13) muestra la relación funcional entre ambas variables.

$$s \equiv \frac{W}{\lambda} . \quad (3.13)$$

Al resolver la ecuación (3.12) se obtiene, en términos de la variable  $s$  :

$$I(s) = (\pi\Omega^2)^2 \left| \text{sinc}(s) - 2\varepsilon^2 \text{sinc}(\varepsilon^2 s) e^{-i\pi(1-\varepsilon^2)s} \right|^2 . \quad (3.14)$$

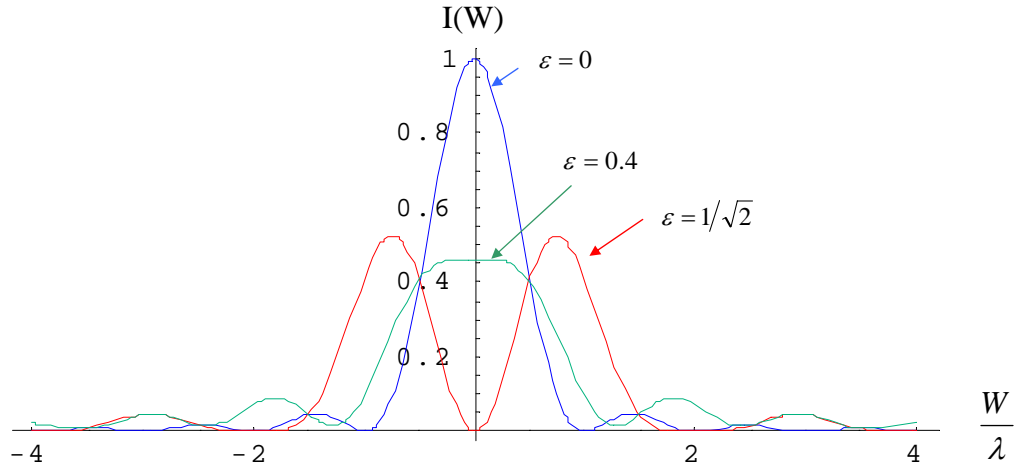
Reduciendo la expresión anterior y sustituyendo el valor de  $s$  se obtiene  $I(z)$  en la forma de la ecuación

$$I(z) = (\pi\Omega^2)^2 \left[ \begin{array}{l} \text{sinc}^2\left(\frac{\lambda\Omega^2}{2} z\right) + 4\varepsilon^4 \text{sinc}^2\left(\frac{\lambda\varepsilon^2\Omega^2}{2} z\right) \\ - 4\varepsilon^2 \text{sinc}\left(\frac{\lambda\Omega^2}{2} z\right) \text{sinc}\left(\frac{\lambda\varepsilon^2\Omega^2}{2} z\right) \cos\left(\frac{\pi\lambda\Omega^2(1-\varepsilon^2)}{2} z\right) \end{array} \right] . \quad (3.15)$$

En términos de la variable  $W$  , la función anterior queda expresada como se muestra a continuación en la ecuación

$$I(W) = (\pi\Omega^2)^2 \left[ \begin{array}{l} \sin^2 c^2\left(\frac{W}{\lambda}\right) + 4\varepsilon^4 \sin^2 c^2\left(\frac{\varepsilon^2 W}{\lambda}\right) \\ - 4\varepsilon^2 \sin c\left(\frac{W}{\lambda}\right) \sin c\left(\frac{\varepsilon^2 W}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi(1-\varepsilon^2)W}{\lambda}\right) \end{array} \right] . \quad (3.16)$$

Esta es la distribución de irradiancia axial a la salida de un sistema óptico con función de pupila de la forma de la ecuación (3.2), y depende de la variable  $W$  y del parámetro  $\varepsilon$  . Si bien es una expresión difícil de estudiar analíticamente, se puede ver que la *psf axial* escrita en (3.16) es proporcional al cuadrado del área de la pupila  $(\pi\Omega^2)^2$  . A continuación, en la figura 3.3, se ilustra la variación de la irradiancia como función de  $W$  .



**Figura 3.3)**  $I(z)$  graficada contra  $(\lambda z \Omega^2 / 2)$  para los valores de  $\varepsilon$  indicados. Todas las curvas mostradas están divididas entre  $(\pi \Omega^2)^2$ .

En la siguiente sección se determina la profundidad de foco para cada uno de los casos que aparecen en la figura 3.3 y se compara esto con resultados del capítulo anterior.

### 3.3) Profundidad de foco de una función de pupila circular de fase binaria.

A diferencia de las respuestas axiales consideradas en el capítulo 2, la función  $I(W)$  obtenida en la sección anterior no siempre tiene su máximo absoluto en  $W = 0$ . Aquí se estudian los casos ilustrados en la figura 3.3.

Para  $\varepsilon = 0$ ,  $I(z)$  toma la misma forma que para una pupila circular. Cuando  $\varepsilon \approx 0.4$  la psf axial es una función que decrece suavemente cerca de  $z = 0$ , lo que aumenta la profundidad de campo del sistema. Otro caso interesante resulta cuando  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ , para el cual se encuentra que en  $W = 0$  la irradiancia sobre el eje óptico es igual con cero; conforme se aleja el plano de observación de dicha posición, la función  $I(W)$  comienza a crecer hasta llegar a valores máximos en  $W \approx -0.73/\lambda$  y  $W \approx 0.73/\lambda$ . Soluciones numéricas aproximadas para la profundidad de foco de los casos anteriores son listadas en la tabla 3.2.

FUNCIÓN DE PUPILA CON DOS FASES	
$\varepsilon$	$\Delta z (\varepsilon)$
0	$\Delta z(0) = \frac{1}{\lambda\Omega^2}$
0.4	$\Delta z(0.4) \approx 2.3\Delta z(0)$
$1/\sqrt{2}$	$\Delta z(0.7) = \Delta z(0)$

**Tabla 3.2)** Profundidad de foco de sistemas ópticos con funciones de pupila con dos fases y simetría radial, para diferentes valores de  $\varepsilon$

Para el caso  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ ,  $\Delta z$  está centrada en  $W \approx -0.73/\lambda$  y  $W \approx 0.73/\lambda$ , lo que significa que existen dos regiones sobre el eje óptico en las cuales las imágenes se pueden formar con buen contraste (sistema bifocal). Estas son las únicas condiciones bajo las cuales se tiene una doble región de profundidad de foco, para las funciones de pupila consideradas hasta ahora en esta tesis. La profundidad focal de una función de pupila anular está escrita en la tabla 2.1, y su valor se describe por la ecuación (3.17).

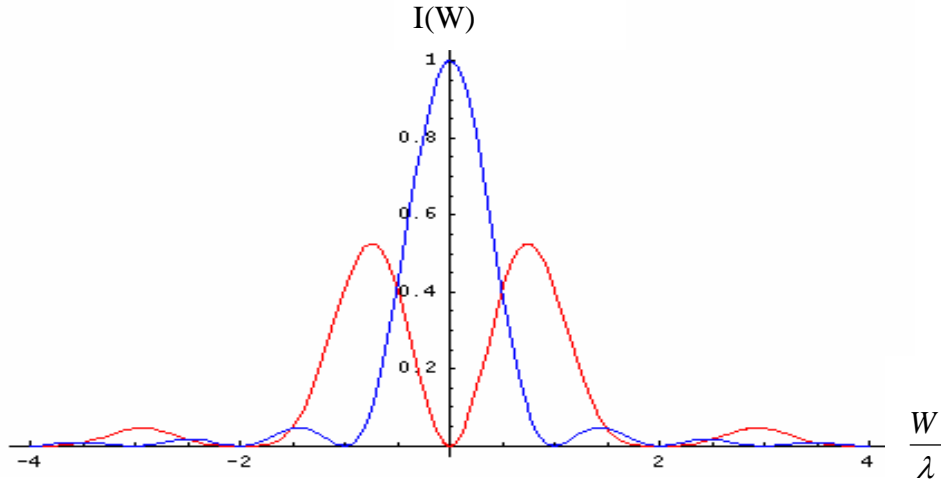
$$\Delta z = \frac{1}{\lambda\Omega^2(1-\varepsilon^2)}. \quad (3.17)$$

Para encontrar el valor de  $\varepsilon$ , que produce que una pupila anular tenga la misma profundidad focal que la pupila de doble fase para  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ , se debe satisfacer la ecuación (3.18).

$$\frac{1}{\lambda\Omega^2(1-\varepsilon^2)} = \frac{1}{\lambda\Omega^2}. \quad (3.18)$$

Para que la ecuación (3.18) se cumpla se requiere que  $\varepsilon = 0$ . Esto indica que el filtro de fase binaria puede producir un sistema bifocal con la misma profundidad focal que una

pupila circular. En la figura 3.4 se compara la psf axial de una función de pupila circular, con la psf axial de la función de pupila de fase binaria con  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ .



**Figura 3.4)** La curva en azul es la psf axial de una función de pupila anular con  $\varepsilon = 0$ ; la curva en rojo es la psf axial de la función de pupila de fase binaria con  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ .

Como se puede observar, la pupila circular permite el paso al sistema de más energía. Sin embargo, el filtro de fase binaria genera dos focos para el sistema, situación que puede ser de interés para algunas aplicaciones, tales como *presión luminosa*.

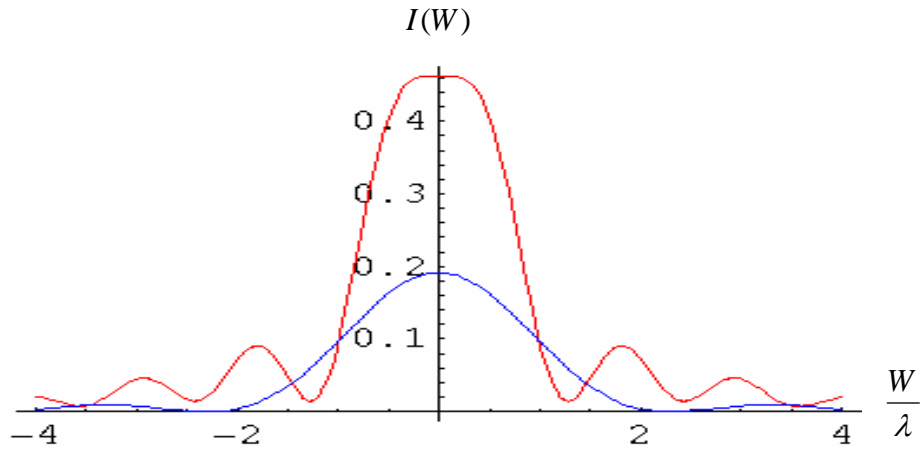
Una ventaja importante de los filtros de fase binaria es que la cantidad de energía que deja pasar al sistema es considerablemente mayor que aquella que permite la función de pupila anular que corresponde a la misma profundidad de foco. Para ilustrar esto, se compara la psf axial del filtro de fase binaria que produce máxima profundidad focal aquella que corresponde a una función de pupila anular con el mismo valor de  $\Delta z$ . Se consideran las ecuaciones (3.19) y (3.20).

$$\frac{1}{\lambda \Omega^2 (1 - \varepsilon^2)} = \frac{2.2}{\lambda \Omega^2} \quad (3.19)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2.2}\right)} \approx \frac{3}{4} \quad (3.20)$$

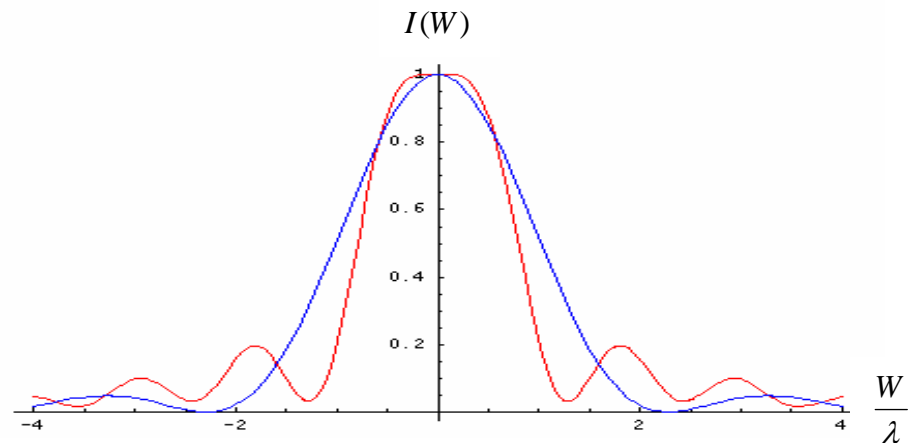


En la figura 3.5 se compara la psf axial de una función de pupila anular con  $\varepsilon \approx 3/4$ , con la psf axial de la función de pupila de fase binaria con  $\varepsilon \approx 0.4$ .



**Figura 3.5)** La curva en azul es la psf axial de una función de pupila anular con  $\varepsilon = 3/4$ ; la curva en rojo es la psf axial de la función de pupila de doble fase con  $\varepsilon \approx 0.4$ . Ambas pupilas tienen la misma profundidad de campo, y sus psf axiales están escaladas por el factor  $(\pi\Omega^2)^{-2}$ .

Para este caso, la función de pupila de fase binaria resulta más conveniente para aumentar la profundidad de foco ya que permite el paso de más energía al sistema que la pupila anular con la misma profundidad focal. No obstante, esta última presenta la ventaja de que su respuesta axial oscila mucho más suavemente que la de la pupila con fase binaria. Las oscilaciones de la psf axial, producidas por el cambio abrupto en la transmitancia de la pupila bifásica, es una manifestación del fenómeno de Gibbs[3]. Para ilustrar esto, se muestra la figura 3.6 con ambas respuestas axiales normalizadas.



**Figura 3.6)** La curva en azul es la psf axial de una función de pupila anular con  $\varepsilon = 3/4$ ; la curva en rojo es la psf axial de la función de pupila de doble fase con  $\varepsilon \approx 0.4$ . Ambas funciones están normalizadas.

La implementación de filtros con saltos de fase permiten un incremento del rango de profundidad focal considerable (alrededor de 2.3 veces mayor que la pupila circular). Presentan, además, una ventaja clara sobre las funciones de pupila anulares; la captación luminosa que se permite con filtros de fase binaria y distribución circular es mucho mayor, aproximadamente el doble, que la que se logra con una pupila anular que produce el mismo incremento en la profundidad de foco. No obstante, la principal desventaja del filtro estudiado en este capítulo puede ser la violenta oscilación de su psf axial correspondiente. Dicha oscilación se debe a la discontinuidad en la función de transmitancia de la función de pupila de fase binaria. Para eliminar este efecto se deben considerar funciones de pupila con cambios de fase continuos.