

CAPÍTULO 2

psf axial de funciones de pupila con simetría radial.

2.1) Introducción

En este capítulo se calcula la *psf axial* para diferentes pupilas con simetría radial. Se provee una interpretación física de esta función y se muestra su utilidad para el estudio de la profundidad de foco de un sistema óptico.

Como se discute en el capítulo 1, de esta tesis los sistemas ópticos pueden ser estudiados como sistemas lineales invariantes al desplazamiento. Desde esta perspectiva un sistema queda completamente definido por su función de respuesta al impulso o por su función de transferencia; esta última se define como la transformada de Fourier de la primera[1].

En un sistema óptico con iluminación no-coherente la respuesta al impulso se conoce como *psf* (por sus iniciales en inglés *point spread function*) y su transformada de Fourier como *OTF* (*optical transfer function*).

Estas funciones describen completamente al sistema en los espacios de coordenadas y de frecuencias espaciales, respectivamente. Si la *psf* es una función $I(x,y,z)$ se le denomina *3-D psf*, porque proporciona información del sistema para cualquier punto del espacio-imagen. Sin embargo, para el estudio de la profundidad de foco de un sistema óptico resulta de utilidad considerar la función $I(x=0, y=0, z) = I(z)$, que describe la salida del sistema sólo sobre el eje óptico Z . A $I(z)$ se le denomina *psf axial* y es posible utilizarla, como se discute en este capítulo, para establecer un criterio límite de profundidad de foco.

2.2) 3-D psf de una función de pupila con simetría radial

La 3-D psf para iluminación no-coherente de un sistema óptico se escribe matemáticamente como lo indica la ecuación

$$I(x, y, z) = |p(x, y, z)|^2, \quad (2.1)$$

en donde

$$p(x, y, z) = \int_{v=-\infty}^{\infty} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} P(\mu, \nu) e^{-i\pi\lambda z(\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu. \quad (2.2)$$

En la ecuación (2.2) se denota como $P(\mu, \nu)$ a la transmitancia en amplitud de la función de pupila del sistema, que se muestra esquemáticamente en la figura 2.1.

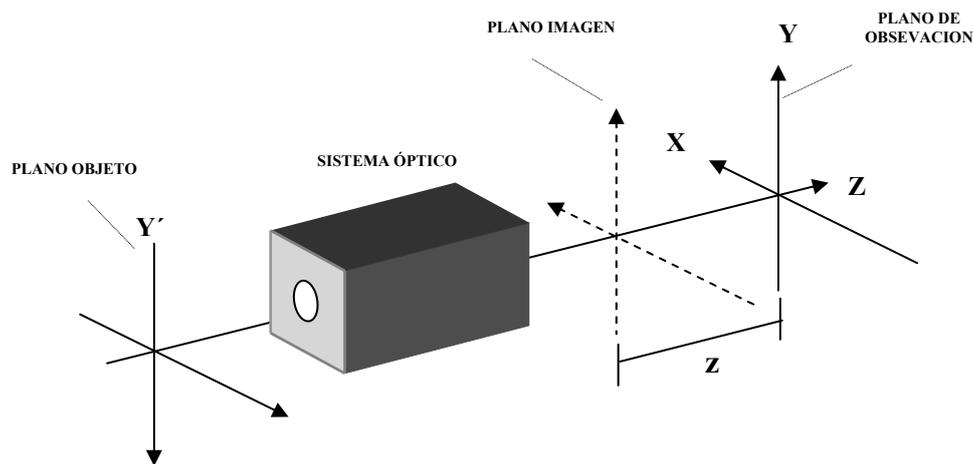


Figura 2.1) Plano de observación para la 3-D psf no-coherente de un sistema óptico

Cuando se consideran casos de pupilas con simetría radial, lo más conveniente es utilizar coordenadas cilíndricas en el espacio imagen, y coordenadas circulares en el espacio objeto, como se ilustra en la figura 2.2.

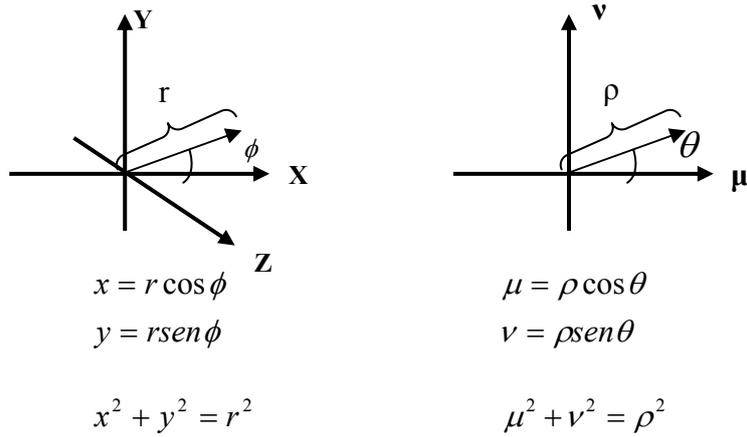


Figura 2.2) Cambios de variable en los espacios objeto e imagen para el estudio de funciones de pupila con simetría circular.

La ecuación (2.2) queda expresada en el este nuevo sistema de coordenadas como lo indica la ecuación (2.3).

$$p(r, \phi, z) = \int_0^{\infty} P(\rho) \rho e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \left[\int_0^{2\pi} e^{i2\pi\rho \cos(\phi-\theta)} d\theta \right] d\rho . \quad (2.3)$$

Debido a su simetría radial, la función de pupila sale de la integral respecto de θ en la ecuación (2.3). Se puede demostrar que la integral entre corchetes en la expresión anterior es proporcional a la función Bessel de primer tipo y orden cero [2], de acuerdo a la ecuación

$$\int_0^{2\pi} e^{i2\pi\rho \cos(\phi-\theta)} d\theta = 2\pi J_0(2\pi\rho) . \quad (2.4)$$

Sustituyendo a la ecuación (2.4) en la ecuación (2.3) se obtiene la ecuación

$$p(r, \phi, z) = \int_0^{\infty} P(\rho) e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho J_0(2\pi\rho) d\rho . \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.5) permiten calcular la 3-D *psf* para iluminación no-coherente de un sistema óptico con cualquier función de pupila que tenga simetría radial. Existen métodos para resolver a la ecuación (2.5), pero sus soluciones para casos donde $z \neq 0$

son de gran complejidad[3]. Por simplicidad, en esta tesis se preferirá trabajar con la *psf* axial, desarrollada en la siguiente sección.

2.3) *psf* axial de un sistema óptico con función de pupila circular.

Una función de pupila circular está definida como lo indica la ecuación (2.6).

$$P(\rho) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & \rho \leq \Omega \\ 0, & \rho > \Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

Cuando se sustituye $P(\rho)$ en la ecuación (2.5), la *3-D psf* no-coherente queda expresada de acuerdo a la ecuación

$$I(r, \phi, z) = \left| \int_0^{\Omega} e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho J_0(2\pi r \rho) d\rho \right|^2. \quad (2.7)$$

La *psf* axial para esta función de pupila se encuentra calculando $I(r = 0, \phi, z) = I(z)$. En la integral en (2.7) el único término que depende de r es la función Bessel. Tomando en cuenta que $J_0(0) = 1$, la respuesta axial se expresa como lo muestra la ecuación

$$I(z) = \left| 2\pi \int_0^{\Omega} e^{-i\pi\lambda z \rho^2} \rho d\rho \right|^2. \quad (2.8)$$

Para simplificar la integral anterior se puede utilizar el cambio de variable[4] definido por la ecuación

$$\zeta \equiv \frac{\rho^2}{\Omega^2} - \frac{1}{2}. \quad (2.9)$$

Este cambio de variable transforma $P(\rho) \rightarrow Q(\zeta)$, y es conveniente ya que convierte a la integral en (2.8) en la transformada de Fourier inversa de una función $Q(\zeta)$, como se muestra a continuación. Combinando (2.8) y (2.9) se tiene que,

$$I(z) = \left| \pi \Omega^2 e^{-i\pi \frac{\lambda z}{2} \Omega^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi \zeta \left(\frac{\lambda z \Omega^2}{2} \right)} d\zeta \right|^2. \quad (2.10)$$

Si se emplea el cambio de variable $s \equiv -\lambda z \Omega^2 / 2$ entonces es posible representar a la ecuación (2.10) en términos de la transformada inversa de Fourier

$$I(s) = \left(\pi \Omega^2 \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\zeta) e^{i2\pi \zeta s} d\zeta \right|^2. \quad (2.11)$$

La variable s está relacionada con el error de enfocamiento W [1] de acuerdo a la ecuación

$$s = \frac{W}{\lambda}. \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.11) se identifica $Q(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$. Se puede entonces hacer la siguiente afirmación: la *psf axial* de una función de pupila circular $P(\rho) = \text{circ}(\rho/\Omega)$ corresponde a la *psf* en foco ($z = 0$) de una función de pupila unidimensional equivalente $Q(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$, en donde ζ y ρ están relacionadas por medio de la ecuación (2.9). Finalmente, se puede encontrar $I(z)$.

$$I(s) = \left(\pi \Omega^2 \right)^2 \left| e^{i\pi s} \text{sinc}(s) \right|^2, \quad (2.13)$$

$$I(z) = \left(\pi \Omega^2 \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\lambda \Omega^2}{2} z \right). \quad (2.14)$$

La notación a utilizar en esta tesis será expresar a las respuestas impulsivas axiales en términos de la variable W . La ecuación (2.14) se puede reescribir entonces en la forma que muestra la ecuación (2.15).

$$I(W) = \left(\pi \Omega^2 \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{W}{\lambda} \right). \quad (2.15)$$

En la figura 2.3 se muestra a la función $I(W)$.

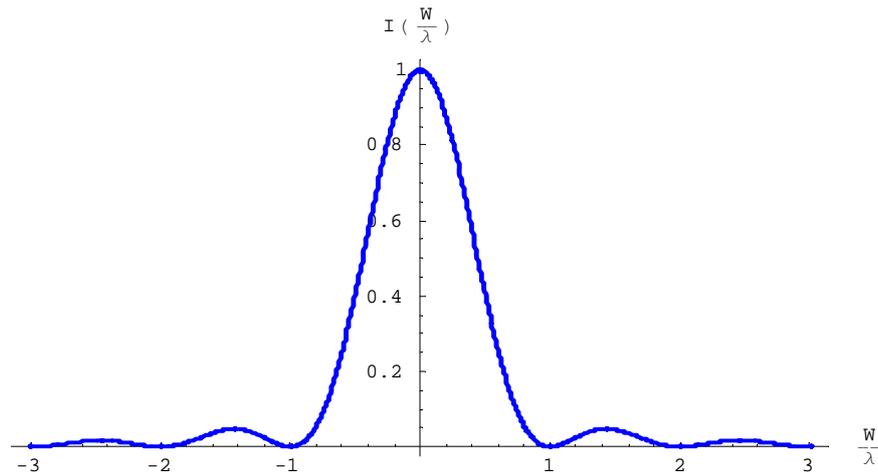


Figura 2.3) psf axial no-coherente de una función de pupila circular.

A lo largo de esta tesis se empleará el resultado en la ecuación (2.15) como la *psf axial* para iluminación no-coherente de una función de pupila circular. La función $I(W)$ proporciona información acerca del sistema únicamente sobre el eje óptico.

2.4) *psf axial* de un sistema óptico con función de pupila anular.

La función de pupila anular se puede escribir como se muestra en la ecuación (2.16).

$$P(\rho) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) - \text{circ}\left(\frac{\rho}{\varepsilon\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & \rho \in [\varepsilon\Omega, \Omega] \\ 0, & \rho \notin [\varepsilon\Omega, \Omega] \end{cases} \quad (2.16)$$

La abertura que está representada por la pupila en la ecuación (2.16) se muestra en la figura (2.4).

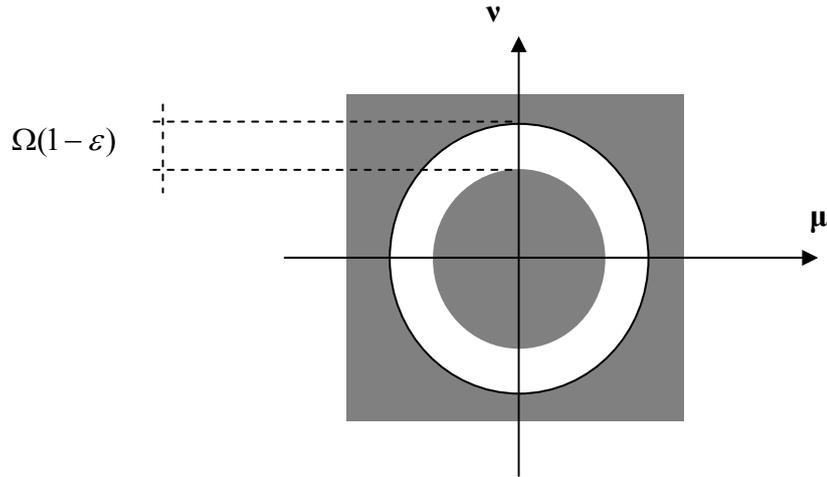


Figura 2.4 representación esquemática de la función de pupila anular

De acuerdo a la ecuación (2.5) se tiene que la distribución de irradiancia axial está descrita por la ecuación (2.17).

$$I(z) = \left| \int_{\varepsilon\Omega}^{\Omega} e^{-i\pi\lambda z\rho^2} \rho d\rho \right|^2. \quad (2.17)$$

Análogamente que para una pupila circular, se quiere proponer un cambio de variable que transforme $P(\rho) \rightarrow Q(\zeta)$ en la ecuación (2.13), donde $Q(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$. El cambio de variable que hace posible esto es el mostrado en la ecuación (2.18).

$$\zeta \equiv \frac{(\rho/\Omega)^2 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} - \frac{1}{2}. \quad (2.18)$$

Esta igualdad para ζ tiene como caso particular el cambio de variable utilizado para la función de pupila circular ($\varepsilon = 0$). A continuación, en la figura 2.5, se representa el cambio de variable de la ecuación (2.18).

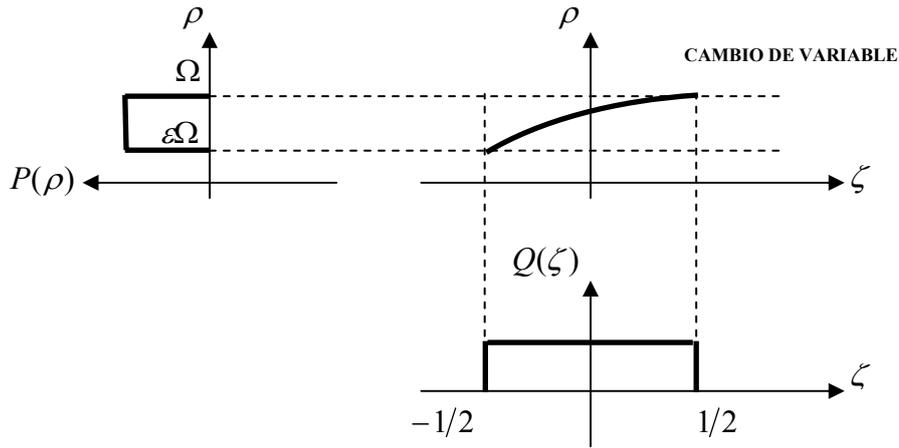


Figura 2.5) Representación esquemática del cambio de variable en la ecuación (2.18).

Combinando las ecuaciones (2.17) y (2.18) se obtiene:

$$I(z) = \left| \pi \Omega^2 (1 - \varepsilon^2) e^{-i\pi \frac{\lambda z}{2} \left[\frac{\Omega^2}{2} (1 + \varepsilon^2) \right]} \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi \zeta \left(-\frac{\lambda z \Omega^2 (1 - \varepsilon^2)}{2} \right)} d\zeta \right|^2, \quad (2.19)$$

$$I(z) = \left| \pi \Omega^2 (1 - \varepsilon^2) e^{-i\pi \frac{\lambda z}{2} \left[\frac{\Omega^2}{2} (1 + \varepsilon^2) \right]} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\zeta) e^{i2\pi \zeta \left(-\frac{\lambda z \Omega^2 (1 - \varepsilon^2)}{2} \right)} d\zeta \right|^2. \quad (2.20)$$

De modo similar al caso de la pupila circular en la sección anterior, se define $s \equiv -\lambda z \Omega^2 (1 - \varepsilon^2) / 2$, dando lugar a la ecuación

$$I(s) = \left| \pi \Omega^2 (1 - \varepsilon^2) e^{-i\pi \frac{\lambda z}{2} \left[\frac{\Omega^2}{2} (1 + \varepsilon^2) \right]} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\zeta) e^{i2\pi \zeta s} d\zeta \right|^2. \quad (2.21)$$

La función $I(s)$ es entonces proporcional a la magnitud al cuadrado de la transformada de Fourier inversa de $Q(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$, que va del espacio ζ al espacio s . La definición de s para una función de pupila anular contiene como caso particular al de la pupila circular ($\varepsilon = 0$). Resolviendo la integral en (2.21) se encuentra la respuesta axial en términos de la variable s mostrada en la ecuación

$$I(s) = \left[\pi \Omega^2 (1 - \varepsilon^2) \right]^2 \text{sinc}^2(s). \quad (2.22)$$

La variable s definida para el caso de la función de pupila anular también es proporcional al error de enfocamiento W , de acuerdo a la ecuación

$$s = \frac{W}{\lambda}(1 - \varepsilon^2) . \quad (2.23)$$

Entonces se puede expresar a la respuesta axial como se muestra en la ecuación

$$I(W) = \left[\pi \Omega^2 (1 - \varepsilon^2) \right]^2 \sin^2 \left[\frac{W}{\lambda} (1 - \varepsilon^2) \right] . \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24) representa a la *psf axial* para iluminación no-coherente de una función de pupila anular. La energía que capta el sistema es proporcional al cuadrado del área donde la transmitancia de la función de pupila es igual con uno, del mismo modo que para la pupila circular. Como lo indica la ecuación (2.24), conforme aumenta ε la captación luminosa se reduce y los ceros de la *psf axial* se alejan del origen. La figura 2.6 muestra la respuesta axial correspondiente para la función de pupila anular.

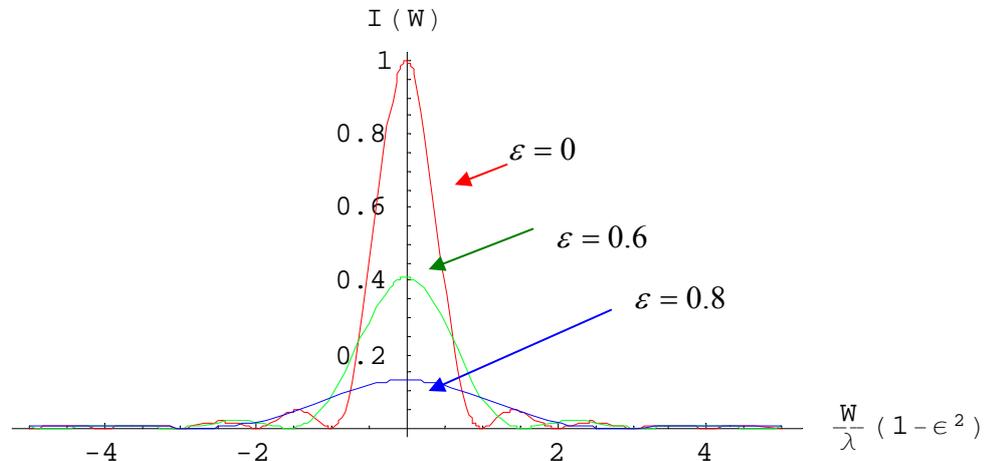


Figura 2.6) Respuesta axial de una función de pupila anular. Todos los casos están divididos entre $(\pi \Omega^2)^2$.

De la figura 2.6 se verifica que efectivamente el incremento ε resulta en el decremento de la energía captada por el sistema. No obstante, el ensanchamiento de la respuesta axial conforme ε crece, representa una ventaja al incrementar la profundidad focal del

sistema. El análisis de la profundidad de foco correspondiente a esta función de pupila se desarrolla en la siguiente sección.

2.5) Criterio límite de profundidad de foco utilizando la *psf axial*

Ya se mencionó en el capítulo 1 que el criterio límite de Rayleigh[5] establece que los valores máximo y mínimo dentro de los cuales se pueden formar imágenes con buen contraste ocurren donde la irradiancia medida sobre el eje óptico es igual 0.8 del valor medido en el plano imagen, también sobre el eje óptico. Utilizando este mismo límite, se puede utilizar la *psf axial* para encontrar la profundidad de campo de sistemas ópticos con las funciones de pupila consideradas en apartados anteriores del presente capítulo. La *psf axial* para funciones de pupila circular y anular es, respectivamente:

$$I(W) = (\pi\Omega^2)^2 \sin^2 c^2 \left(\frac{W}{\lambda} \right), \quad (2.25)$$

$$I(W) = [\pi\Omega^2(1-\varepsilon^2)]^2 \sin^2 c^2 \left[\frac{W}{\lambda}(1-\varepsilon^2) \right]. \quad (2.26)$$

Para que se cumpla $\sin^2 c^2(x_0) = 0.8$, se necesita que $|x_0| \approx 0.25$. Esto implica que los valores máximo y mínimo de z para los cuales se está dentro de la profundidad de foco son los indicados a continuación. Para una pupila circular se tiene que:

$$z_{\min} = -\frac{1}{2\lambda\Omega^2} \quad (2.27a)$$

$$z_{\max} = \frac{1}{2\lambda\Omega^2} \quad (2.27b)$$

Mientras que para una pupila anular se obtiene:

$$z_{\min} = -\frac{1}{2\lambda\Omega^2(1-\varepsilon^2)} \quad (2.28a)$$

$$z_{\max} = \frac{1}{2\lambda\Omega^2(1-\varepsilon^2)} \quad (2.28b)$$

Conviene definir al rango de profundidad focal como $\Delta z = z_{\max} - z_{\min}$. De acuerdo a lo anterior, se obtienen los valores de Δz resumidos en la tabla 2.1.

FUNCIÓN DE PUPILA	PROFUNDIDAD DE FOCO
CIRCULAR	$\Delta z(0) = \frac{1}{\lambda \Omega^2}$
ANULAR	$\Delta z(\varepsilon) = \frac{\Delta z(0)}{(1 - \varepsilon^2)}$

Tabla 2.1

En las figuras que se ilustran a continuación, se describe el rango de profundidad focal conforme se incrementa el valor del parámetro ε , de una pupila anular. En la figura 2.7 $\varepsilon = 0$, mientras que en las figuras 2.8 y 2.9 el valor de ε es respectivamente $\varepsilon = 0.6$ y $\varepsilon = 0.8$.

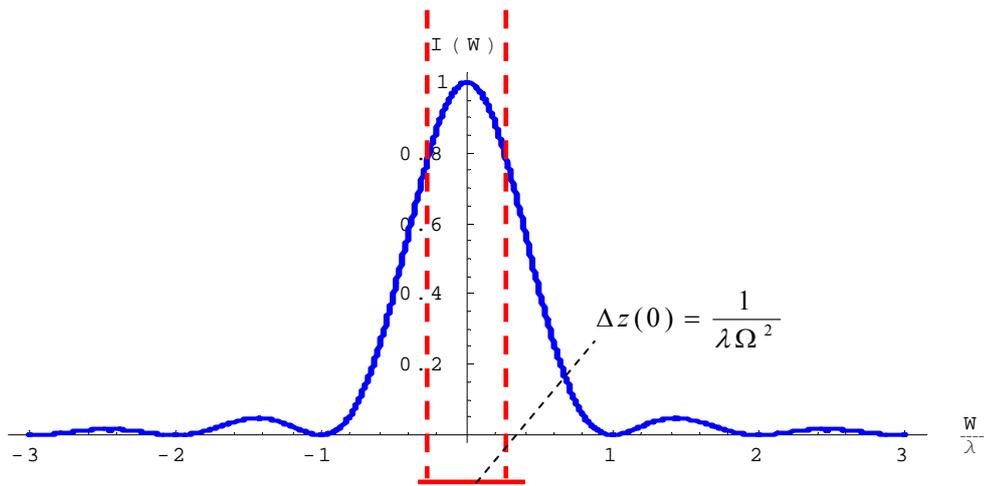


Figura 2.7) psf axial para una pupila anular ($\varepsilon = 0.6$), dividida entre $(\pi\Omega^2)^2$.

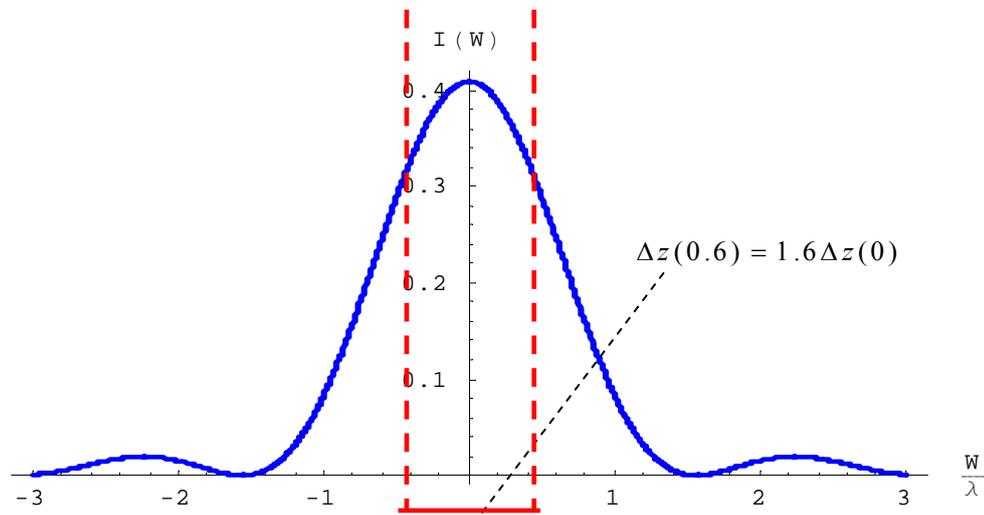


Figura 2.8) psf axial para una pupila circular ($\varepsilon = 0.6$), dividida entre $(\pi\Omega^2)^2$.

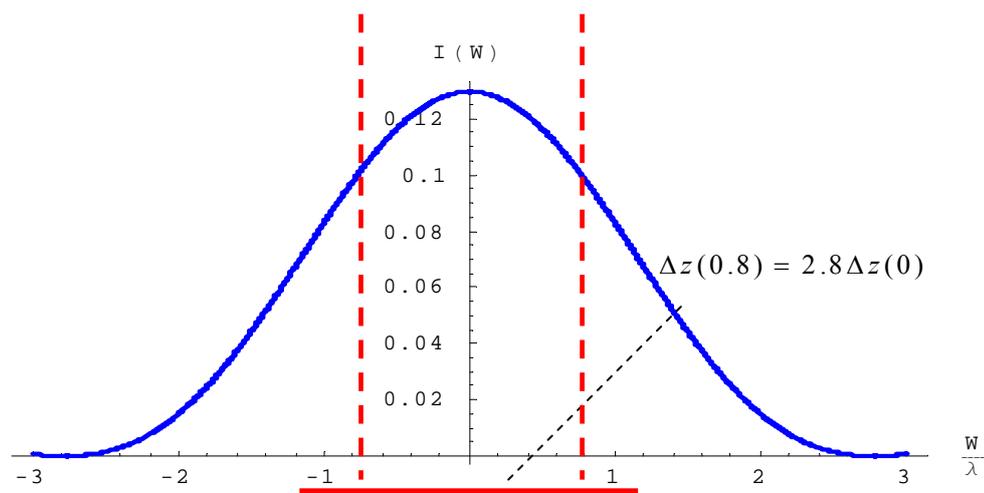


Figura 2.9) psf axial para una pupila circular ($\varepsilon = 0.8$), dividida entre $(\pi\Omega^2)^2$.

De acuerdo a las figuras 2.7, 2.8 y 2.9, es una buena alternativa hacer $\varepsilon \rightarrow 1$ para incrementar la profundidad de foco de un sistema óptico. Sin embargo, como se dijo antes, conforme esto sucede la cantidad de energía que el sistema deja pasar se va reduciendo. Para confrontar las ventajas y desventajas de estas funciones de pupila, se muestra la figura 2.10, en la cual aparece la irradiancia axial en foco y el cociente de profundidad focal de la función de pupila en términos del parámetro ε entre el valor $\Delta z(0)$.

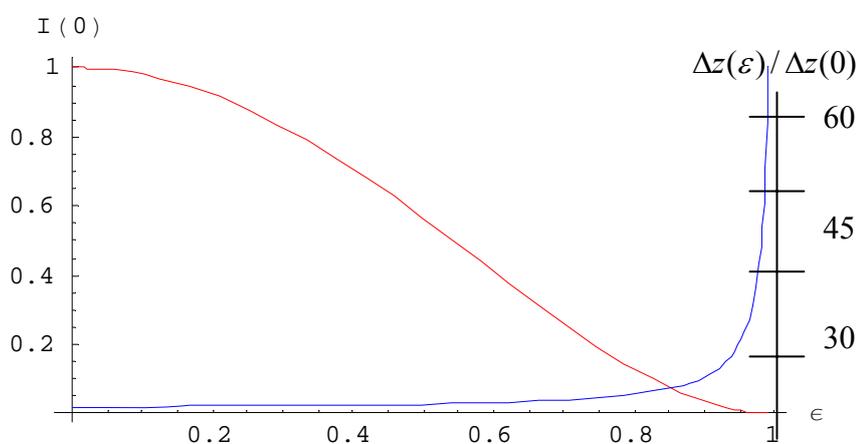


Figura 2.10) La curva en rojo es la irradiancia axial en foco de una función de pupila anular. La curva en azul es la profundidad focal correspondiente.

De acuerdo a los resultados de este capítulo, las funciones pupila anular incrementan el rango de profundidad focal tanto como se quiera. Sin embargo, este tipo de pupilas no siempre resulta de utilidad práctica, especialmente cuando la captación luminosa del sistema óptico se quiere preservar. Dado que cantidad de energía que recibe un sistema con función de pupila anular es proporcional al cuadrado del área del ánulo, conforme se incrementa la profundidad de foco, vía al aumento del parámetro ε , la captación luminosa del sistema se reduce dramáticamente. Por tanto, es necesario buscar nuevos filtros que permitan un incremento de la profundidad focal, sin castigar tan drásticamente la energía que recibe el sistema óptico.