

CAPÍTULO 1

Función de respuesta al impulso de un sistema óptico.

1.1) Introducción

A continuación se describen los conceptos básicos necesarios para modelar el proceso de formación de imágenes, empleando ondas escalares. Así mismo se desarrolla el concepto de profundidad focal.

El modelo más sencillo para describir y predecir la generación de imágenes es el de la óptica geométrica[1]. Este modelo deja de ser útil al considerar los fenómenos de interferencia y difracción. Por esto es conveniente emplear el análisis de sistemas lineales[2] para considerar los efectos de la difracción.

El modelo de sistemas lineales describe el comportamiento del sistema óptico a partir de una función característica asociada a la imagen de un punto luminoso. La función característica se denota como *psf*, por el acrónimo de su nombre en inglés *point spread function*.

Desde esta perspectiva se pueden entender y desarrollar criterios de calidad de imagen del sistema tales como profundidad focal y resolución. Además, por ser una herramienta descriptiva de gran alcance, se puede utilizar como medio para la búsqueda de nuevos métodos para mejorar las características de los sistemas formadores de imágenes.

1.2) Sistemas lineales invariantes al desplazamiento.

Un sistema físico puede ser visto como una caja negra que responde a impulsos externos. Desde esta perspectiva, se han desarrollado técnicas que permiten estudiar a un sistema conociendo no más que una función característica del mismo. Un caso de interés lo constituyen los sistemas físicos lineales e invariantes al desplazamiento, de los cuales se discute a continuación.

Sea $U_{in}(x, y)$ la distribución de amplitud compleja en la entrada del sistema, $U_{out}(x, y)$ la distribución de amplitud compleja en la salida correspondiente, y $S\{ \}$ el operador que representa a la caja negra, entonces se cumple la ecuación (1.1).

$$U_{out}(x, y) = S\{U_{in}(x, y)\}. \quad (1.1)$$

La linealidad de un sistema se escribe matemáticamente como lo muestra la ecuación (1.2).

$$aU_{out}(x, y) + bV_{out}(x, y) = S\{aU_{in}(x, y) + bV_{in}(x, y)\}. \quad (1.2)$$

En la ecuación (1.2), las letras a , b denotan constantes. También puede extenderse la propiedad de linealidad en forma integral, de acuerdo a la ecuación (1.3).

$$S\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)U_{in}(x, y)dxdy\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)S\{U_{in}(x, y)\}d\alpha d\beta \quad (1.3)$$

Por otra parte, si el sistema físico es invariante al desplazamiento se cumple necesariamente la ecuación (1.4).

$$U_{out}(x - \alpha, y - \beta) = S\{U_{in}(x - \alpha, y - \beta)\}. \quad (1.4)$$

Ahora bien, por la propiedad de “coladera” de la delta de Dirac, es claro que se cumple la ecuación (1.5).

$$U_{in}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_{in}(\alpha, \beta)\delta(x - \alpha, y - \beta)d\alpha d\beta. \quad (1.5)$$

Combinando las ecuaciones (1.1) y (1.5), se obtiene la expresión para $U_{out}(x, y)$ que se ilustra en la ecuación (1.6).

$$U_{out}(x, y) = S \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{in}(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right\}. \quad (1.6)$$

Utilizando las propiedades de linealidad y de invarianza al desplazamiento, dadas por las ecuaciones (1.3) y (1.4), la ecuación (1.6) puede reescribirse con la forma de la ecuación (1.7)

$$U_{out}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{in}(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta, \quad (1.7)$$

donde $h(x, y)$ satisface

$$h(x, y) = S \{ \delta(x, y) \}. \quad (1.8)$$

La función $h(x, y)$, que se conoce en general como *función de respuesta al impulso*, caracteriza por completo a un sistema lineal e invariante al desplazamiento, y permite calcular la salida del mismo mediante la integral de convolución de la ecuación (1.7).

En este caso se trata de la convolución de la función $U_{in}(x, y)$ con la repuesta impulsiva $h(x, y)$.

Desafortunadamente, la integral en la ecuación (1.7) no siempre es fácil de calcular, por lo que se puede recurrir al *teorema de la convolución*, el cual afirma que

$$\begin{aligned} U_{out}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{in}(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \\ &\Rightarrow \tilde{U}_{out}(\mu, \nu) = \tilde{U}_{in}(\mu, \nu) \tilde{h}(\mu, \nu). \end{aligned} \quad (1.9)$$

En la expresión (1.9) las funciones con menisco representan a las transformadas de Fourier correspondientes. Las variables μ y ν son las frecuencias espaciales en x y y ,

respectivamente. En general, a la transformada de Fourier de $h(x, y)$ se le denomina *función de transferencia* $H(\mu, \nu)$. Cuando las funciones de respuesta impulsiva y de transferencia describen el proceso de formación de imágenes en sistemas ópticos con iluminación no-coherente, se les llama, respectivamente, *psf (point spread function) no-coherente* y *OTF (optical transfer function)*. A lo largo de esta tesis se utilizarán, indistintamente, las denominaciones *respuesta impulsiva* y *psf no-coherente* para referirse a la función de respuesta al impulso que describe a un sistema óptico.

Mientras que las funciones de entrada y salida de un sistema y su respuesta al impulso están en el espacio de coordenadas, sus transformadas de Fourier se encuentran en uno denominado *espacio de frecuencias*. De acuerdo a (1.9) para encontrar a $U_{out}(x, y)$ también se puede utilizar la integral escrita en la ecuación (1.10).

$$U_{out}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{in}(\mu, \nu) H(\mu, \nu) e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \quad (1.10)$$

Entonces, si se conoce $h(x, y)$, o se conoce $H(\mu, \nu)$, se puede conocer la respuesta del sistema a un estímulo, ya sea mediante la ecuación (1.7) en el espacio de coordenadas, o mediante la ecuación (1.10) en el espacio de frecuencias.

1.3) Difracción de Fresnel

El principio en que se basa la teoría ondulatoria de la luz es que ésta se propaga en forma de ondas [3] que satisfacen a la ecuación.

$$\nabla^2 \Psi(x, y, z, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x, y, z, t) = 0 \quad (1.11)$$

La parte espacial de la luz monocromática o *amplitud compleja* $U(x, y, z)$ debe satisfacer a la ecuación de Helmholtz, que matemáticamente se escribe

$$\nabla^2 U(x, y, z) + k^2 U(x, y, z) = 0. \quad (1.12)$$

En problemas de formación de imágenes, es común emplear la aproximación paraxial a la ecuación de Helmholtz mostrada en la ecuación (1.13).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U(x, y, z) + 2ik \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = 0. \quad (1.13)$$

La integral de Fresnel, mostrada en la ecuación (1.14), expresa la solución integral a la ecuación (1.13).

$$U(x, y, z) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z}}{i\lambda z} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} U(x', y', 0) e^{i\frac{\pi}{\lambda} \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{z}} dx' dy'. \quad (1.14)$$

La ecuación (1.14) expresa a la amplitud compleja $U(x, y, z)$ como la superposición de ondas esféricas paraxiales de amplitud $U(x', y')$, además de que permite encontrar la amplitud compleja en el plano $x'y'$ de una onda que se propaga en el espacio, dado que se conoce su amplitud compleja en el plano xy localizado en $z = 0$. Esta aproximación es válida sólo en la región paraxial. Lo anterior se ilustra en la figura 1.1.

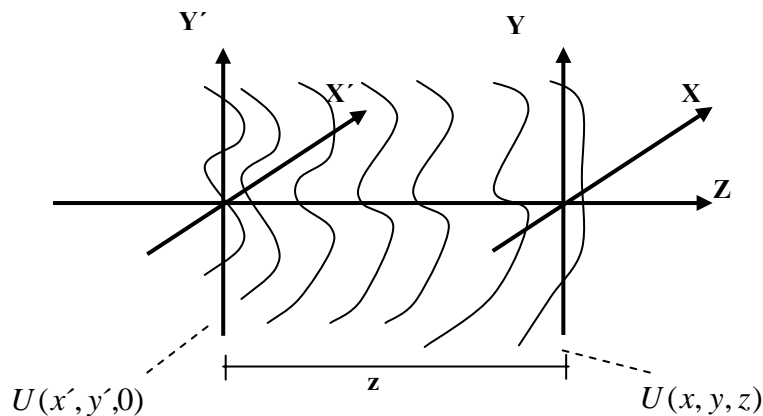


Figura 1.1) Propagación de una onda en el espacio libre. La amplitud compleja en el plano xy se puede ver vista como el patrón de difracción de la amplitud en $x'y'$

La integral en (1.14) es la convolución de las funciones $U(x, y, 0)$ y $\exp[i\pi/\lambda z(x^2 + y^2)]$. Esta última es la función de respuesta al impulso en el espacio

libre. De acuerdo a la sección anterior, también se puede encontrar $U(x, y, z)$ trabajando desde el espacio frecuencial, utilizando la ecuación (1.15).

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, \nu, 0) e^{-i\pi\lambda z(\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(x\mu + y\nu)} d\mu d\nu \quad (1.15)$$

En la ecuación (1.15) $\exp[-i\pi\lambda z(\mu^2 + \nu^2)]$ es la función de transferencia en el espacio libre. La función $U(x', y', 0)$ puede ser, por ejemplo, la amplitud compleja de la luz en algún plano en el que la se encuentre con un obstáculo (pantalla difractiva). Cualquiera de las ecuaciones (1.14) ó (1.15) sirve para calcular el patrón de difracción generado. Cuando se observa difracción a distancias relativamente cortas se le llama *difracción de Fresnel* o *de campo cercano*. En el campo cercano, el patrón de difracción cambia de forma conforme se aleja el plano de observación. Una vez que el plano de observación se encuentra lo suficientemente lejos, al incrementar la distancia entre éste y la pantalla difractiva, la amplitud compleja de la onda difractada no cambia en forma, sólo en tamaño. En este punto el fenómeno se conoce como *difracción de campo lejano* o *Fraunhofer*.

1.4) Difracción de Fraunhofer

La ecuación (1.14) puede reescribirse como se muestra en la ecuación (1.16).

$$U(x, y, z) = \frac{e^{\frac{i2\pi}{\lambda}z} e^{\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{x^2+y^2}{z}\right)}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y', 0) e^{\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{x'^2+y'^2}{z}\right)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x'x+y'y)} dx' dy'. \quad (1.16)$$

El factor de fase cuadrático dentro de la integral es aproximadamente igual a la unidad[2], cuando se exige que

$$z \gg \frac{(x'^2 + y'^2)}{\lambda}. \quad (1.17)$$

Físicamente, esta restricción evita interferencia destructiva, generada por el factor de fase cuadrático dentro de la integral en la ecuación (1.16). De la ecuación (1.16), cuando se satisface la condición en la expresión (1.17), se concluye que la distribución de amplitud compleja en el plano de observación es proporcional a la transformada de Fourier, como lo muestra la expresión (1.18).

$$U(\mu, \nu, z) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y', 0) e^{-i2\pi(\mu x' + \nu y')} dx' dy' . \quad (1.18)$$

En la ecuación (1.18) $\mu = x/\lambda z$ y $\nu = y/\lambda z$. A la consideración mostrada en la expresión (1.17) se le conoce como aproximación de Fraunhofer. En el campo lejano se observa que el patrón de difracción satisface la proporcionalidad descrita por la expresión (1.18). En un gran número de ocasiones en que se estudia sólo la distribución de irradiancia, se pueden omitir las constantes y factores de fase que anteceden a la integral en (1.16) y utilizar (1.18) como una igualdad.

La desigualdad (1.17) resulta tan restrictiva que es más efectivo, experimentalmente, utilizar una lente convergente para visualizar el patrón de difracción de Fraunhofer. Se puede demostrar que la distribución de amplitud compleja en el plano de observación del sistema mostrado en la figura 1.2 cumple también con (1.18), pero con el escalamiento $\mu = x/\lambda f$ y $\nu = y/\lambda f$. Este dispositivo sirve como un computador que realiza una transformada de Fourier.

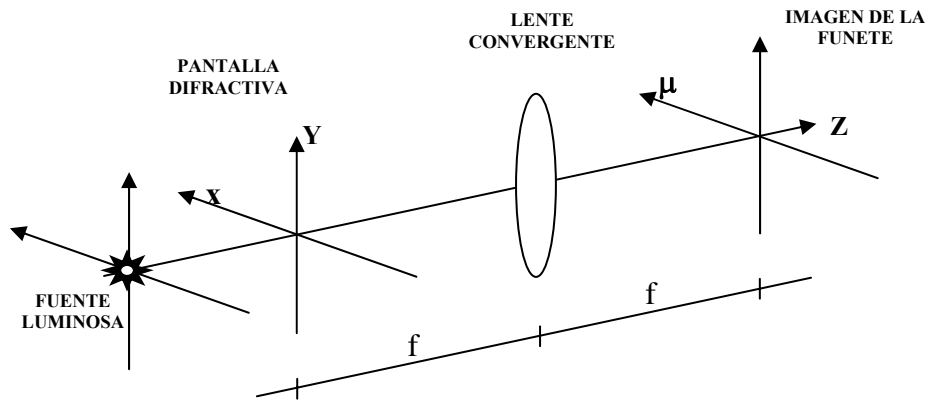


Figura 1.2) Dispositivo óptico para visualizar el patrón de difracción de Fraunhofer. La distribución de amplitud compleja en el plano de observación es proporcional a la transformada de Fourier de la transmitancia de la pantalla difractiva.

1.5) 3-D *psf* de un sistema óptico con iluminación monocromática coherente.

Los sistemas de formación de imágenes que emplean luz monocromática coherente se pueden representar por sistemas lineales en amplitud compleja. La distribución de campo observada debido a varias fuentes es la suma de las contribuciones individuales. Cuando se calcula la irradiancia producida se observa interferencia. Los sistemas ópticos con iluminación coherente pueden ser vistos entonces como sistemas lineales e invariantes al desplazamiento. Se puede demostrar que la función de respuesta al impulso para este caso depende sólo de la función de pupila del sistema. La respuesta impulsiva para este tipo de sistema se conoce como *psf* para iluminación coherente, y se muestra en la ecuación (1.19).

$$p(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(-\lambda z_i \mu, -\lambda z_i \nu) e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \quad (1.19)$$

Donde la función de pupila $P(x, y)$ es aquello que limita la región del espacio en la cual es sistema capta luz. En la ecuación (1.19) la función de pupila esta evaluada en $x = -\lambda z_i \mu$ y en $y = -\lambda z_i \nu$. La función $p(x, y)$ es la respuesta al impulso del sistema para el caso en el que el plano de salida coincide con el plano en el cual se forma la

imagen del objeto según la óptica geométrica en su aproximación paraxial de acuerdo a la ecuación (1.20).

$$\frac{1}{z_i} = \frac{1}{f} + \frac{1}{z_o} \quad (1.20)$$

En la ecuación (1.20) z_i es la posición en la que un elemento óptico forma la imagen de un objeto localizado en z_o . Si el sistema óptico esta formado por más de un elemento, se puede aplicar la ecuación (1.20) para cada componente del mismo para localizar a la imagen y encontrar la magnificación.

Una definición más general de la respuesta impulsiva de un sistema óptico se muestra en la ecuación (1.21), en la que la *psf* depende además de la variable z , permitiendo al plano de observación estar en cualquier posición del eje z .

$$p(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(-\lambda z_i \mu, -\lambda z_i \nu) e^{-i\pi\lambda z(\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \quad (1.21)$$

La variable z se mide desde el plano imagen que predice la ecuación (1.20). A esta última función se le llama *3-D psf* para iluminación coherente, y difiere de la mostrada en la ecuación (1.19) en que el integrando incluye a la función de transferencia del espacio libre para considerar la propagación de la luz en una distancia z después del plano imagen.

1.6) 3-D *psf* de un sistema óptico con iluminación monocromática no-coherente.

En contraste con el caso coherente, los sistemas ópticos con iluminación no-coherente presentan linealidad en irradiancia. Esto debido a que al no haber coherencia no se presenta el fenómeno de interferencia; la irradiancia total en algún plano de observación

es la suma de las contribuciones de irradiancia de cada una de las fuentes presentes. La respuesta impulsiva $I(x, y, z)$ del caso no-coherente es la magnitud al cuadrado de la *psf* para iluminación coherente, como se ilustra en la ecuación (1.22).

$$I(x, y, z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(-\lambda z_i \mu, -\lambda z_i \nu) e^{-i\pi \lambda z (\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \right|^2. \quad (1.22)$$

A la función $I(x, y, z)$ se le conoce como *3-D psf* para iluminación no-coherente. Utilizando el sistema de referencia mostrado en la figura 1.3 se puede reescribir la ecuación (1.22) en la forma de la ecuación (1.23).

$$I(x, y, z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda z_i \mu, \lambda z_i \nu) e^{-i\pi \lambda z (\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \right|^2. \quad (1.23)$$

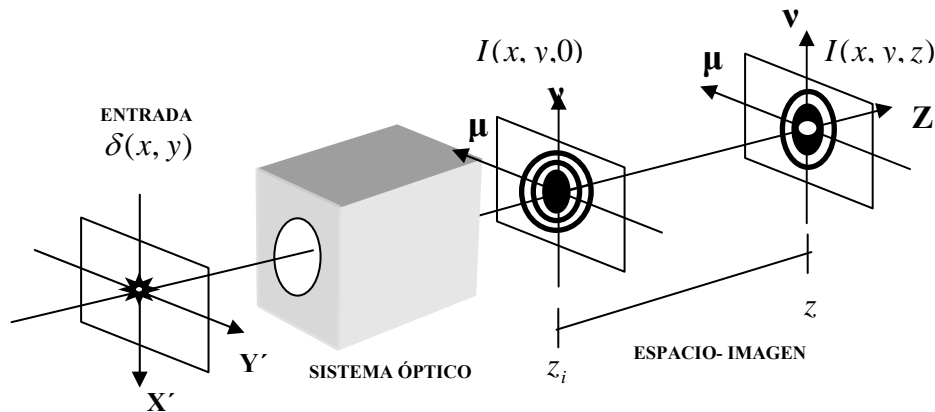


Figura 1.3) 3-D *psf* axial de un sistema óptico con iluminación no coherente. La función $I(x, y, 0)$ es la respuesta axial en el plano imagen que predice la óptica geométrica. La función $I(x, y, z)$ es la respuesta axial a una distancia z del plano imagen.

A lo largo de esta tesis se preferirá utilizar un sistema de referencia invertido, como lo muestra la figura 1.3, para el plano objeto, por permitir ver a la *psf* para iluminación no-coherente como la magnitud al cuadrado de la transformada inversa de Fourier de la función de pupila, después de los cambios de variable $x = \lambda z_i \mu$ y $y = \lambda z_i \nu$. Además, en las ecuaciones (1.21) y (1.23), se preferirá escribir $P(\mu, \nu)$ en lugar de

$P(\lambda z_i, \mu, \lambda z_i, \nu)$. Las ecuaciones (1.24) y (1.25) muestran, respectivamente, la notación a emplear en esta tesis para las *psf* coherente y no-coherente de un sistema óptico.

$$p(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mu, \nu) e^{-i2\pi\lambda z(\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu . \quad (1.24)$$

$$I(x, y, z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mu, \nu) e^{-i2\pi\lambda z(\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \right|^2 . \quad (1.25)$$

1.7) Dispositivo experimental para visualizar a la respuesta impulsiva de un sistema óptico.

Como se vio en la sección 1.4 una lente convergente funciona como un transformador de Fourier. Cuando se utiliza un sistema de referencia similar al de la figura 1.3, en el plano focal del dispositivo mostrado a continuación se obtiene una distribución de irradiancia proporcional a la transformada inversa de Fourier.

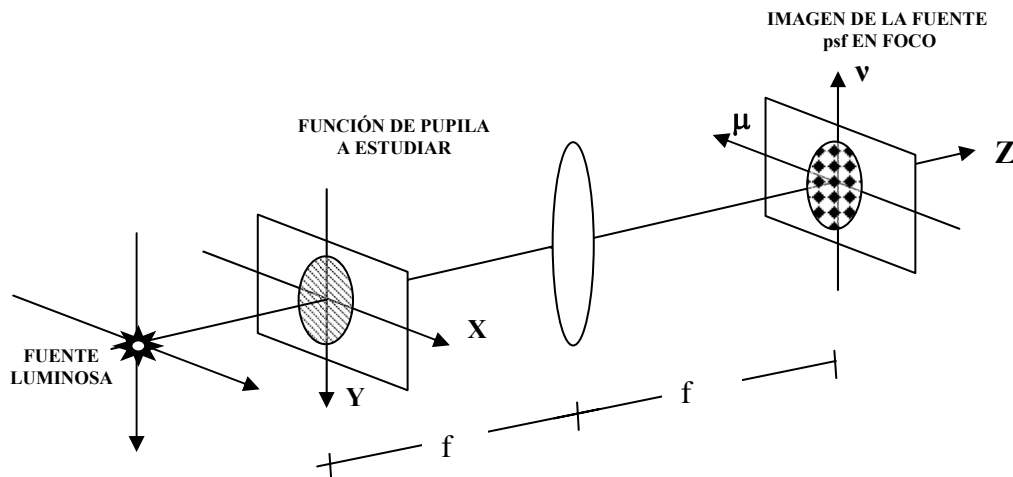


Figura 1.4) dispositivo experimental para visualizar la 3-D *psf* no-coherente de un sistema óptico

Este arreglo experimental permite visualizar a la 3-D *psf* para iluminación no-coherente, de acuerdo a la ecuación (1.25).

$$I(x, y, z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda f \mu, \lambda f \nu) e^{-i\pi \lambda z (\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \right|^2. \quad (1.26)$$

Nótese que en (1.26) se ha cambiado z_i por la distancia focal f de la lente. Similarmente que para el caso coherente, la psf no-coherente se escribirá a lo largo de esta tesis cambiando $P(\lambda f \mu, \lambda f \nu)$ por $P(\mu, \nu)$, como lo muestra la ecuación (1.27).

$$I(x, y, z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mu, \nu) e^{-i\pi \lambda z (\mu^2 + \nu^2)} e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \right|^2. \quad (1.27)$$

1.8) Profundidad focal de un sistema óptico.

La profundidad focal Δz de un sistema óptico es la distancia medida sobre el eje óptico, en el espacio-imagen, en la cual las imágenes de interés tienen un buen contraste. Las distribuciones de irradiancia sobre los planos que se encuentren fuera del rango de la profundidad de foco no son lo suficientemente nítidas para ser consideradas réplicas de sus elementos conjugados en el espacio-objeto. Es necesario establecer un criterio cuantitativo de lo que significa una imagen con “buen contraste”. Uno de los más utilizados es el criterio límite de Rayleigh[1], el cual establece que la profundidad focal de un sistema es el rango en el que la irradiancia axial $I(z)$ es no menor al ochenta por ciento de su valor sobre el plano imagen que predice la óptica geométrica. Las figuras 1.5(a) y 1.5(b) ejemplifican todo lo anterior.

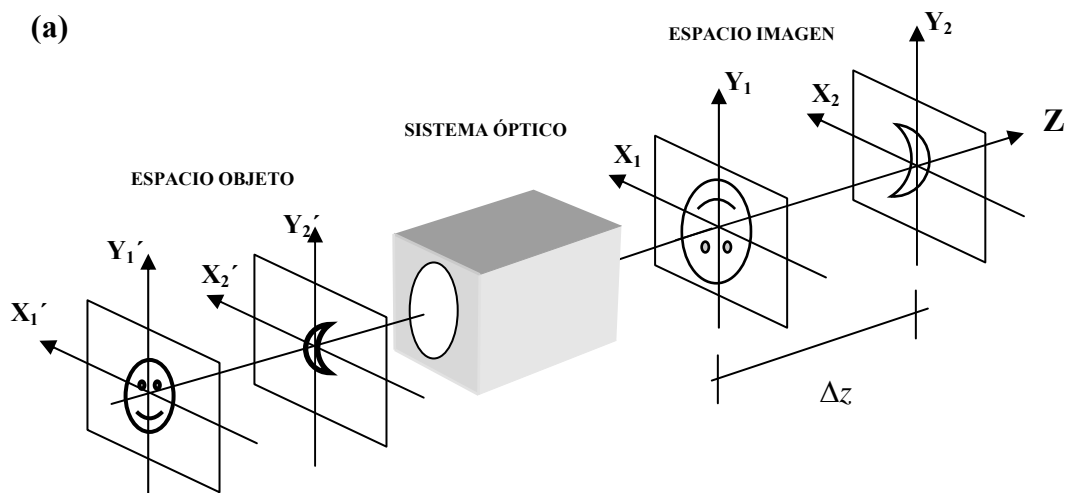


Figura 1.5) (a) Rango en el que las imágenes formadas por un sistema óptico tienen buen contraste.

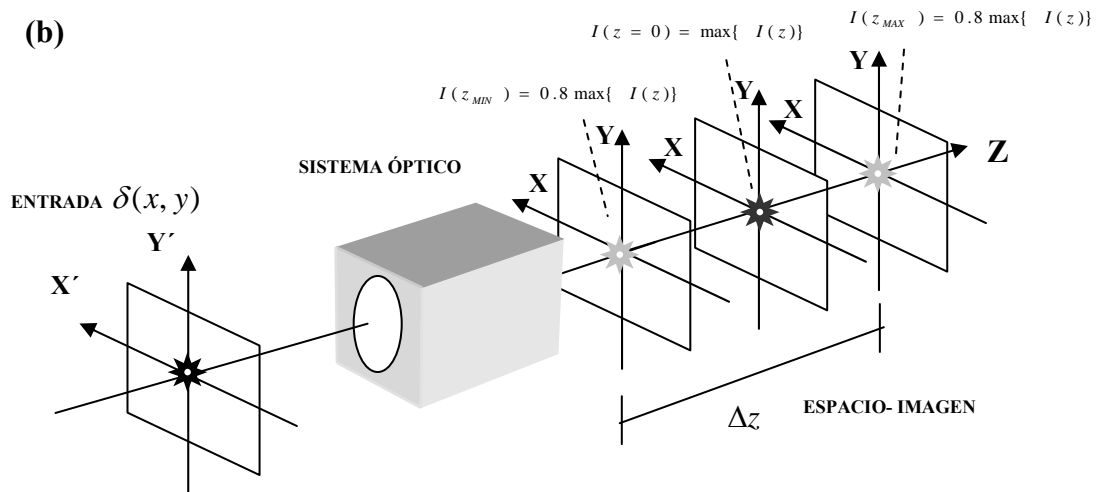


Figura 1.5) (b) Rango en que la psf axial vale no menos del ochenta por ciento de su valor máximo.

En esta tesis se utilizará el criterio de Rayleigh para estudiar la profundidad focal de sistemas ópticos con distintas funciones de pupila. En el siguiente capítulo se explica a detalle a la función conocida como respuesta impulsiva axial, y se utiliza de modo similar que lo hacen otros autores [4,5], para estudiar la profundidad focal correspondiente para diferentes funciones de pupila.