Capítulo 5

Cálculo de la Fuerza de Casimir

Una vez entendido el modelo hidrodinámico, y utilizando las ecuaciones de Fresnel deducidas en la sección anterior, regresamos a la ecuación (2.68) para calcular la integral en el caso de no localidad (utilizando el modelo hidrodinámico), así como el límite local de éste $\beta \to 0$, que coincide con la respuesta transversal del modelo hidrodinámico (Modelo de Drude).

Como ya mencionamos anteriormente, las ondas longitudinales pueden ser exitadas sólo si la onda tiene polarización p. Es por eso que para campos con polarizacón s, la fuerza de Casimir entre metales con dispersión espacial no presentará cambio alguno con respecto al caso local. Para facilitar el cálculo consideraremos únicamente la contribución de la polarización p a la fuerza por unidad de area, dada por

$$\frac{F_z}{A} = -\frac{\hbar c}{2\pi^2} \int Q dQ \int_Q^\infty d\kappa \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 - Q^2}} \frac{1}{(\xi^p - 1)}. \tag{5.1}$$

Asimismo, para simplificar este trabajo nos restringiremos al cálculo de la fuerza en sistemas unidimensionales. En el problema unidimensional se suelen considerar únicamente campos electromagnéticos que se propagan en la dirección z, lo cual es equivalente a escoger un valor fijo del vector de onda $Q = 0$ y no sumar sobre modos con distinta $\vec{Q}$. La ec. (2.57) muestra que la fuerza en un caso unidimensional podría obtenerse de la ec. (5.1) reemplazando

$$\int QdQ \to 2\pi/A. \tag{5.2}$$

Sin embargo, cuando la luz incide normalmente sobre una superficie metálica, el campo eléctrico es paralelo a la interface, por lo cual no induce acumulación de cargas y no genera plasmones; la distinción entre polarización p y s se pierde para $Q = 0$. Esto nos lleva a considerar un problema unidimensional generalizado en el cual permitimos propagación con ángulos finitos respecto al eje z, i.e., $\vec{Q} \neq 0$, pero no realizamos la suma sobre distintas $\vec{Q}$'s. Entonces la fuerza sobre una de las placas está dada por

$$F_z = -\frac{\hbar c}{\pi}\int_Q^\infty d\kappa \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 - Q^2}} \frac{1}{(\xi^p - 1)} \tag{5.3}$$

Para evitar el polo presente en el límite inferior $\kappa = Q$, es preferible integrar con respecto a la frecuencia ω. Para esto utilizamos que

$$Q^2 + k^2 = q^2 < 0, \tag{5.4}$$

$$Q^2 - \kappa^2 = q^2 < 0, \tag{5.5}$$

$$QdQ - \kappa d\kappa = qdq, \tag{5.6}$$

y para $\vec{Q}$ fija

$$qdq = -\kappa d\kappa. \tag{5.7}$$

Como q es imaginario, entonces podemos expresarlos como $q = iu$ en términos de la variable real $u = \sqrt{\kappa^2 - Q^2}$, así como expresamos $k = i\kappa$. Utilizando esta definición de q llegamos a que

$$udu = \kappa d\kappa \tag{5.8}$$

Asimismo, podemos expresar la frecuencia $\omega = qc$ como $\omega = iw$, por lo cual $du = dw/c$. De esta forma logramos que todas las variables del integrando sean reales, y que la varible de integración sea una variable real w. Haciendo el respectivo cambio de variable en (5.3)

$$F_z = -\frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty dw \frac{\sqrt{Q^2 + w^2/c^2}}{\xi^p - 1}, \tag{5.9}$$

donde $\xi^p = e^{2L\sqrt{Q^2+w^2/c^2}}/(r_1^p r_2^p)$ y r_1^p y r_2^p son los coeficienes de reflexión de las placas 1 y 2 respectivamente para polarización p.

A continuación aplicaremos la fórmula (5.9) al caso particular de metales, considerando por separado el caso local descrito por el modelo de Drude y el no local descrito por el modelo hidrodinámico.

5.1. Fuerza de Casimir entre metales locales

En este caso utilizamos el coeficiente de reflexión de la ec. (4.18) la cual escribimos como

$$r_\alpha^p = \frac{\epsilon_\alpha k - k_\alpha}{\epsilon_\alpha k + k_\alpha}. \tag{5.10}$$

Aquí, $\alpha = 1, 2$ designa a cada una de las placas, denotamos con $k = i\kappa$ a la componente del vector de onda en el vacío perpendicular a la superficie donde

$$\kappa = \sqrt{Q^2 + w^2/c^2}, \tag{5.11}$$

$k_\alpha = i\kappa_\alpha$ es la componente correspondiente dentro del material α, con

$$\kappa_\alpha = \sqrt{\epsilon_\alpha w^2/c^2 + Q^2}, \tag{5.12}$$

ϵ_α es la función dieléctrica local de cada medio, la cual suponemos descrita por el modelo de Drude (3.73), y que escribimos como

$$\epsilon_\alpha(iw) = 1 + \frac{\omega_{p\alpha}^2}{w^2 + w/\tau_\alpha}, \tag{5.13}$$

donde $\omega_{p\alpha}$ y τ_α son la frecuencia de plasma y el tiempo medio de colisiones del medio α. Notamos que en este caso, en que ω y k son cantidades imaginarias, ϵ_α, κ_α y

$$r^p_\alpha = \frac{\epsilon_\alpha \kappa - \kappa_\alpha}{\epsilon_\alpha \kappa + \kappa_\alpha} \tag{5.14}$$

son cantidades reales, por lo cual el integrando en la ec. (5.9) es una cantidad real que decae exponencialmente conforme $w \to \infty$.

5.2. Fuerza de Casimir entre metales con dispersión espacial

Para calcular la fuerza de Casimir tomando en cuenta algunos efectos de la dispersión espacial tales como la propagación de ondas longitudinales emplearemos los resultados obtenidos arriba para el modelo hidrodinámico. En este caso utilizamos el coeficiente de reflexión (4.29), que escribimos como

$$r^p_\alpha = \frac{k\epsilon_\alpha - k_\alpha + Q^2(\epsilon_\alpha - 1)/l_\alpha}{k\epsilon_\alpha + k_\alpha - Q^2(\epsilon_\alpha - 1)/l_\alpha} \tag{5.15}$$

donde ahora ϵ_α denota a la parte transversal del la respuesta dieléctrica del medio α, la cual coincide con la función dieléctrica de Drude (5.13). La parte longitudinal no aparece explícitamente pues el vector de onda $(\vec{Q}, l_\alpha)$ del campo longitudinal en cada medio satisface la relación de dispersión (3.46) y por lo tanto, la componente longitudinal de la función dieléctrica es cero. Las demás cantidades que aparecen en la ec. (4.29) coinciden con sus contrapartes en la sección anterior. Igualando a cero la función dieléctrica hidrodinámica (3.72) obtenemos

$$1 - \frac{\omega^2_{p\alpha}}{\omega^2 + i\omega/\tau_\alpha - \beta^2_\alpha(Q^2 + l^2_\alpha)} = 0. \tag{5.16}$$

Aquí introdujimos además de las cantidades $\omega_{p\alpha}$ y τ_α discutidas en la sección 5.1, el parámetro de no localidad β_α de cada medio. Recordando que la integral (5.9) es sobre frecuencias imaginarias $\omega = iw$, despejamos

$$l_\alpha^2 = -\left(\frac{w^2 + w/\tau_\alpha + \omega_{p\alpha}^2}{\beta_\alpha^2} + Q^2\right) \tag{5.17}$$

De aquí concluimos que las l_α también son cantidades imaginarias que podemos expresar como $l_\alpha = i\mathcal{L}_\alpha$, donde

$$\mathcal{L}_\alpha^2 = \frac{w^2 + w/\tau_\alpha + \omega_{p\alpha}^2}{\beta_\alpha^2} + Q^2, \tag{5.18}$$

y obtenemos finalmente que

$$r_\alpha^p = \frac{\kappa\epsilon_\alpha - \kappa_\alpha - Q^2(\epsilon_\alpha - 1)/\mathcal{L}_\alpha}{\kappa\epsilon_\alpha + \kappa_\alpha + Q^2(\epsilon_\alpha - 1)/\mathcal{L}_\alpha}. \tag{5.19}$$

Verificamos que r_α^p es una cantidad real también en este caso. Esta será la amplitud de reflexión que sustituiremos en la ecuación (5.9) para calcular la fuerza de Casimir considerando las ondas de plasma.