

## CAPITULO 2

### Difracción de Fraunhofer

#### Introducción

El fenómeno de difracción es observado cuando la propagación de un haz de luz es limitada por una apertura u obstruida por un objeto. Es común explicar el impacto de aperturas o pantallas en la propagación luminosa en términos de la construcción de Huygens.

Por un lado, el tratamiento de Huygens supone que un frente de onda que se propaga (a través del espacio) se representa como la superposición de puntos luminosos (de área infinitesimal); los cuales radian ondas esféricas secundarias. Estas ondas secundarias, al propagarse una distancia infinitesimal, forman un nuevo frente de onda. Este nuevo frente de onda representa la posición del frente de onda original después de su propagación, como se muestra en la figura 2.1

De igual manera, las pantallas difractivas se consideran compuestas de orificios microscópicos que al ser iluminados por una onda incidente, cada uno de estos se genera una onda esférica. En este tipo de tratamiento, la interferencia es la superposición discreta de ondas esféricas; mientras que el fenómeno de difracción es la superposición continua de ondas esféricas /1-10/.

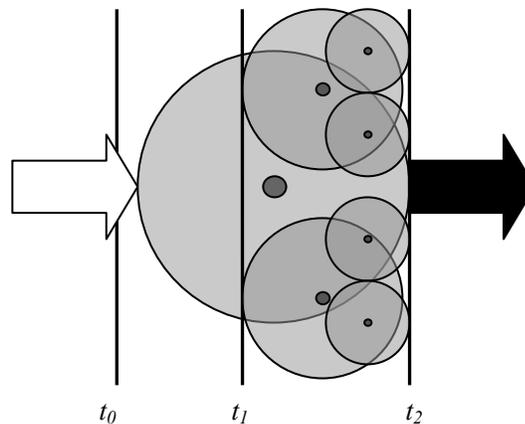


Figura 2.1 Descripción de Huygens de la propagación en el espacio de una onda plana. Puntos luminosos en el frente de onda radian ondas esféricas secundarias. Tanto teórica como experimentalmente, las ondas secundarias son radiadas principalmente en la dirección de la propagación.

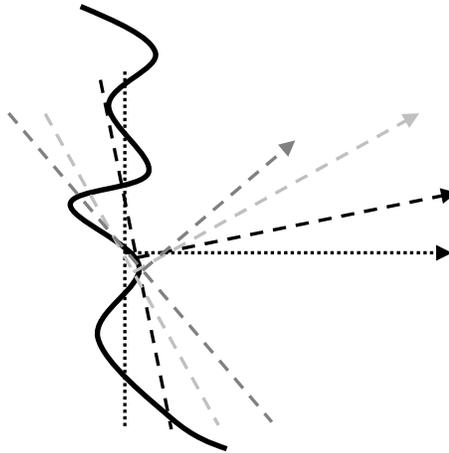


Figura 2.2 Frente de Onda expresado como la superposición de 2 ondas planas.

Por otro lado, en la difracción de Fraunhofer se supone un frente de onda que se propaga (a través del espacio) como la superposición de ondas planas secundarias; como se muestra en la Figura 2.2. Estas ondas planas secundarias, al propagarse en el espacio sufren de retrasos de fase dependiendo de su inclinación. Al superponer las ondas planas, tomando en cuenta los retrasos de fase, se obtiene un nuevo frente de onda. Este nuevo frente de onda representa la posición del frente de onda original después de su propagación.

### Transmitancia

La conveniencia de descomponer a las pantallas difractivas en ondas planas radica en poder asociar a cada onda plana una nueva dirección, una nueva amplitud y un retraso de fase. De tal modo que la influencia que una pantalla física, como la mostrada en la Figura 2.3, se expresa en términos de cambios de dirección, de amplitud y retrasos de fase en el plano de la pantalla. Para el caso unidimensional, la variable ( $z$ ) representa el eje óptico en ( $x,y$ ), ejes perpendiculares a ( $z$ ) //  $z$ , la transmitancia esta definida por la función  $P(x)$  que transforma a la amplitud compleja de la onda inicial descrita por:

$$U_0(x, z) = |U_0(x, z)| \exp \{i \psi_0(x, z)\} \dots \dots \dots (2.1)$$

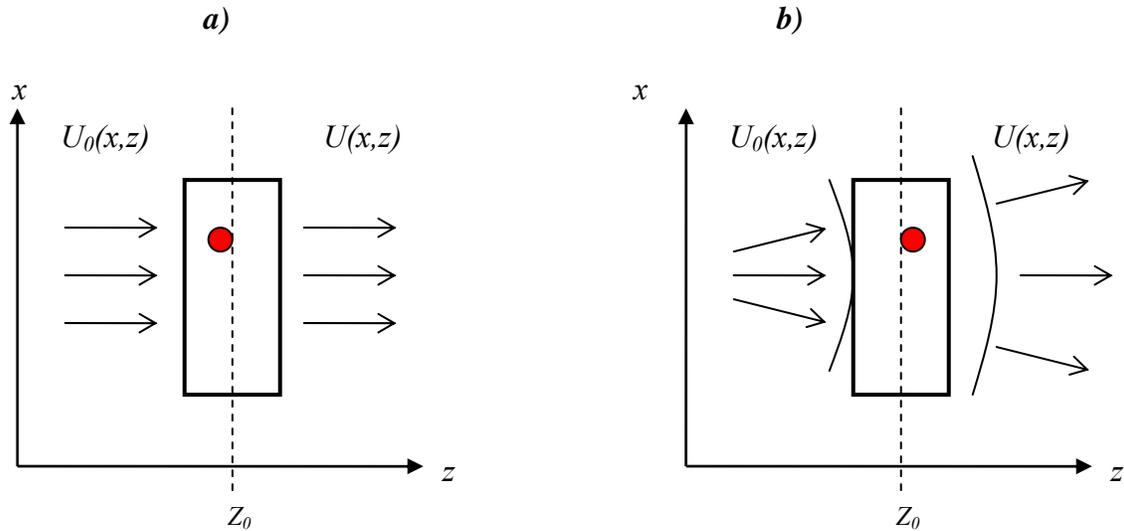


Figura 2.3- Esquema de la incidencia de a) una onda plana y b) una onda esférica sobre una pantalla de ancho infinitesimal

La amplitud compleja inicial es transformada en la amplitud compleja de la onda final de manera que se sostiene,

$$U(x, z) = |U(x, z)| \exp \{i\psi(x, z)\} \quad ; \dots\dots\dots(22)$$

A través de la relación:

$$U(x, z_0) = P(x) \cdot U_0(x, z_0) \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

La relación anterior incorpora la atenuación a cada punto x:

$$|P(x)| = \frac{|U(x, z)|}{U_0(x, z)} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

De igual manera incorpora un retraso de fase descrito como:

$$\exp \{i\varphi(x)\} = \exp \{i\psi(x, z) - i\psi_0(x, z)\} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

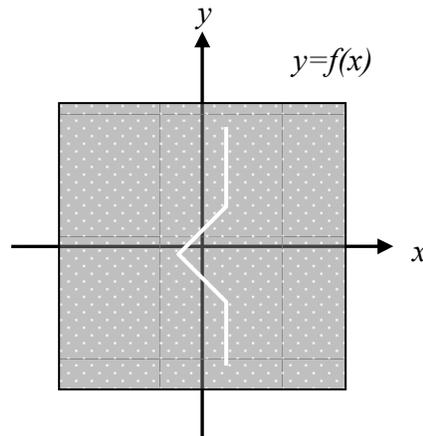


Figura 2.4- Diagrama de una rendija muy estrecha en un fondo opaco, del tipo empleado en el presente trabajo.

En este trabajo es necesario representar la transmitancia bidimensional como

$$U(x, y, z_0) = P(x, y) \cdot U_0(x, y, z_0) \dots\dots\dots(2.6)$$

En el plano  $z = z_0$ . En particular se considera que

$$P(x, y) = \delta(y - f(x)) \dots\dots\dots(2.7)$$

En la ecuación 2.7 se denota como  $\delta$  a la delta de Dirac, que describe a una rendija de perfil  $f(x)$  muy estrecha en un fondo opaco, como se indica en la figura 2.4

### Transformada de Fourier

El fenómeno de la difracción de Fraunhofer es descrito en términos de un sistema lineal invariante al desplazamiento. Este sistema puede entonces ser analizado a través de la

herramienta matemática conocida como la transformada de Fourier. La transformada de Fourier bidimensional de una función  $F(x,y)$  se encuentra definida como

$$\tilde{F}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \exp[-i2\pi(x\mu + y\nu)] dx dy \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

De igual manera, la transformada de Fourier inversa bidimensional se define como:

$$F(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mu, \nu) \exp[i2\pi(x\mu + y\nu)] d\mu d\nu \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

Donde las variables  $x$  y  $y$  representan las coordenadas reales en el plano objeto, mientras que las variables  $\mu$  y  $\nu$  representan las direcciones de propagación, las cuales se interpretan como las frecuencias espaciales de la difracción de Fraunhofer.

La función  $F(x,y)$  describe entonces la distribución de amplitud compleja del objeto, mientras que la función inversa,  $\tilde{F}(\mu, \nu)$  describe la distribución de la amplitud compleja del patrón de difracción.

Los planos del objeto y su transformada de Fourier se encuentran separados por una distancia  $f$ , la distancia focal de la lente  $/\mathbf{1}/$ . Es importante considerar que el patrón de difracción de Fraunhofer es obtenido por medio del uso de una lente positiva delgada, en la cual las frecuencias espaciales están relacionadas a las coordenadas por medio de las ecuaciones:

$$\mu = \frac{x}{\lambda f}, \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

$$\nu = \frac{y}{\lambda f} \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

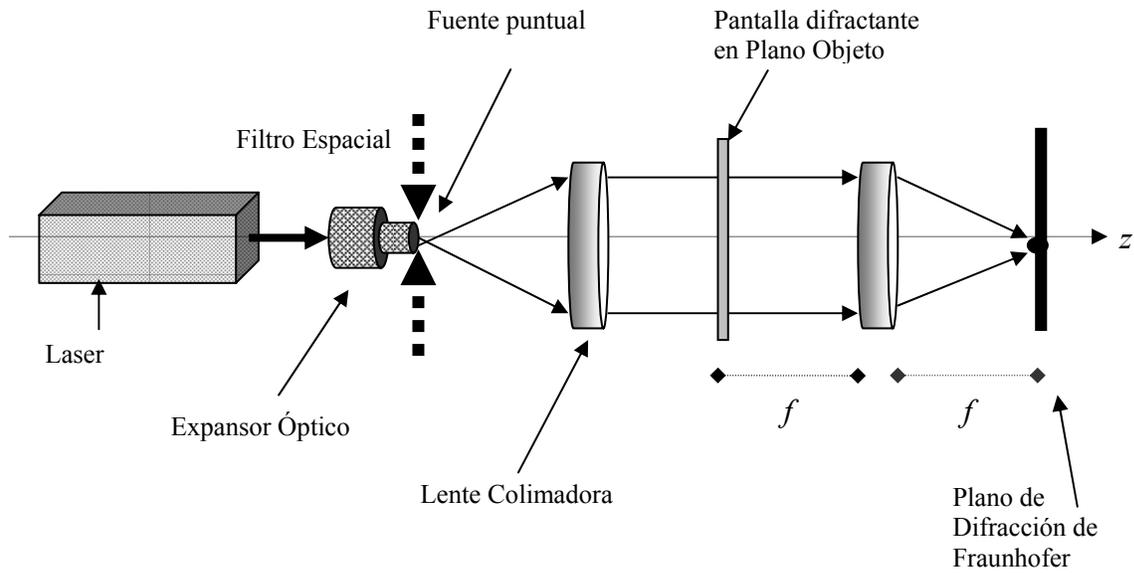


Figura 2.5- Esquema del dispositivo óptico empleado. Por medio del dispositivo podemos obtener en el plano de observación el patrón de difracción de la pantalla difractante a estudiar.

Donde las dimensiones de  $(\mu, \nu)$  son de  $[L^{-1}, L^{-1}]$  y  $\lambda$  es la longitud de onda. Para el presente trabajo, las condiciones experimentales asignan un valor numérico a  $\lambda f$ .

## Dispositivo Óptico

El dispositivo óptico experimental empleado para el análisis del patrón de difracción de Fraunhofer se encuentra ilustrado en la figura 2.5. El arreglo experimental consta de una fuente puntual que es empleada para generar ondas planas al colimar un haz en la primera lente. Las ondas planas son a su vez empleadas para iluminar de manera uniforme las pantallas difractivas con estructuras fractales, ubicado a la distancia focal  $f$  de la lente colimadora y al que denominaremos en adelante plano objeto.

La transmitancia en amplitud en el plano del objeto es representada por la ecuación:

$$U_0(x, y) = \delta(x)\delta(y) \dots\dots\dots(2.12)$$

Donde  $\delta(y)$  denota el ancho de la rendija. En el caso del plano de difracción de Fraunhofer, o el plano de observación, la distribución de amplitud compleja esta descrita por

$$\tilde{U}_0(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \exp[-i2\pi(x\mu + y\nu)] dx dy \dots\dots\dots(2.13)$$

Donde al sustituir dentro de (2.13) la ecuación (2.12) obtenemos la relación:

$$\tilde{U}_0(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y) \exp[-i2\pi(x\mu + y\nu)] dx dy \dots\dots\dots(2.14)$$

Esta relación puede ser redistribuida de manera que:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(\mu, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp[-i2\pi(x\mu)] dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \exp[-i2\pi(y\nu)] dy \dots\dots\dots(2.15) \\ &= 1 \end{aligned}$$

La relación anterior nos indica que la distribución de amplitud compleja es constante a lo largo de todo el plano de difracción de Fraunhofer. Esto nos garantiza una iluminación uniforme en el plano de difracción de Fraunhofer.

La distribución de la amplitud compleja atrás de la pantalla esta descrita por:

$$\tilde{U}(\mu, \nu) = \tilde{P}(\mu, \nu) \cdot \tilde{U}_0(\mu, \nu) \dots\dots\dots(2.16)$$

Es posible sustituir en esta relación el resultado obtenido en la ecuación (2.15), con lo que es posible reformular la distribución de la amplitud compleja detrás de la pantalla como:

$$\tilde{U}(\mu, \nu) = \tilde{P}(\mu, \nu) \dots\dots\dots(2.17)$$

Esta descripción nos indica que la distribución de amplitud compleja es la transmitancia de la pantalla. Por otro lado, en el plano de Fraunhofer, la distribución de amplitud compleja es proporcional a la transformada de Fourier bidimensional de la función detrás de la pantalla.

$$U(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, \nu) \exp[i2\pi(x\mu + y\nu)] d\mu d\nu \dots\dots\dots(2.18)$$

En esta relación puede ser sustituido el resultado obtenido en la ecuación (2.17), con lo cual se obtiene que la distribución de amplitud compleja en el plano de Fraunhofer esta descrita por:

$$U(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\mu, \nu) \exp[i2\pi(x\mu + y\nu)] d\mu d\nu \dots\dots\dots(2.19)$$

Con el resultado descrito por la ecuación (2.19) se visualiza que, para el caso de una fuente puntual, la transmitancia en el plano del objeto es proporcional a la transformada de Fourier inversa bidimensional de la distribución de amplitud compleja en el plano de difracción de Fraunhofer.

En el presente trabajo las funciones que harán de pantallas difractivas son representaciones de curvas matemáticas con estructura fractal generadas mediante las iteraciones iniciales de la curva de Koch.

### **La curva de Koch**

La curva triádica de Koch puede ser producida por el siguiente procedimiento /11-14/:

Consideramos un segmento de línea  $K_0$  de longitud  $L$ , sobre el cual  $K$  será generado. Asumimos que el generador también tiene longitud  $L$ , concordando con aquel de  $K_0$ . Una

curva de Koch  $K_1$  de nivel 1 es producida al reemplazar el segmento  $K_0$  por el generador (el generador en sí es considerado como  $K_1$ ). Una curva de Koch  $K_2$  de nivel 2 es producida al reemplazar cada segmento de  $K_1$  por el mismo  $K_1$  reducido en escala por un factor de 3. Una curva  $K_3$  de nivel 3 es producida reemplazando cada segmento de  $K_1$  por  $K_2$  reducido en escala por un factor de 3.

El procedimiento es repetido en cascada para producir una curva de Koch  $K_N$  de nivel  $N$ . La curva triádica de Koch se define como la curva  $K_N$  en el límite cuando  $N \rightarrow \infty$ . El nivel de la curva de igual manera determina el nivel de auto-similaridad de la curva.

Consideremos un iniciador  $K_0$  que yace en el origen sobre el eje x, en nuestro caso un segmento de línea unitaria visualizado en la figura 2.6. Denotamos su expresión matemática como  $K_0(\bar{r})$ , donde  $\bar{r} = (r; \varphi) = (x, y)$ , un vector con radio  $r$  y ángulo polar  $\varphi$  son las coordenadas polares variables y

$$x = r \cos \varphi \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

$$y = r \sin \varphi \quad \dots\dots\dots(2.21)$$

Las ecuaciones 2.20 y 2.21 son las coordenadas cartesianas asociadas. (La notación (;) y (,) es empleada para distinguir entre las representaciones en coordenadas polares y en coordenadas cartesianas respectivamente de un vector). Entonces el generador  $K_1$ , visualizado en la figura 2.6, puede ser expresado en términos de un operador de traslación  $T[\bar{d}(k)]$ , un operador de rotación  $R[\theta(k)]$  y un operador de amplificación  $M[m]$  de manera que se cumple la relación:

$$K_1(\bar{r}) = M\left[\frac{1}{3}\right] \sum_{k=1}^4 T[\bar{d}(k)] R[\theta(k)] K_0(\bar{r}) \quad \dots\dots\dots(2.22)$$



Figura 2.6- Representación geométrica de a) el iniciador  $K_0$  y b) el generador  $K_1$  obtenido a partir de la aplicación de los operadores de traslación, rotación y amplificación descritos. El generador entonces se aplica sobre cada segmento de línea de cada iteración para generar la siguiente curva.

Donde

$$K_0(\bar{r}) = \begin{cases} \delta(y), & |x| \leq 2 \\ 0, & \text{de cualquier otra manera} \end{cases} \dots\dots\dots (2.23)$$

Las operaciones de traslación, rotación y amplificación son definidas como:

$$T[\bar{d}(k)]f(\bar{r}) = f(\bar{r} - \bar{d}(k)), \dots\dots\dots (2.24)$$

$$R[\theta(k)]f(\bar{r}) = f(r; \varphi - \theta(k)), \dots\dots\dots (2.25)$$

$$M[m]f(\bar{r}) = f(\bar{r}/m), \dots\dots\dots (2.26)$$

k	$\varepsilon(k)$	$\alpha(k)$	$\theta(k)$
1	1	$\pi$	0
2	1/2	$2\pi/3$	$\pi/3$
3	$1/2$	$\pi/3$	$-\pi/3$
4	1	0	0

Tabla 2.1- Distintos valores de los parámetros  $\varepsilon(k)$ ,  $\alpha(k)$  y  $\theta(k)$  necesarios para la construcción de la curva de Koch.

Estas operaciones, al actuar sobre una función arbitraria  $f(\bar{r}) = f(r; \varphi) = f(x, y)$  expresan un objeto geométrico fractal bidimensional. En el caso de  $\bar{d}(k) = (L\varepsilon(k); \alpha(k))$  es un vector de transición con magnitud  $L\varepsilon(k)$  y el ángulo de fase  $\alpha(k)$ . El parámetro  $\varepsilon(k)$  representa un escalamiento de la longitud original, mientras que los parámetros  $\alpha(k)$  y  $\theta(k)$  representan el ángulo de fase de traslación y el ángulo de rotación respectivamente. Los valores de  $\varepsilon(k)$ ,  $\alpha(k)$  y  $\theta(k)$  con  $(k=1,2,3,4)$  en la ecuación 2.22 están dados por la tabla de valores 2.1, dependiendo estrictamente de  $k$ .

### Transformada de Fourier de la Curva de Koch

Como hemos visto, la distribución de la Amplitud Compleja  $\tilde{F}(\bar{q}) = \tilde{F}(\mu, \nu)$  en el campo de difracción de Fraunhofer de un objeto  $F(\bar{r})$  es expresado por:

$$\tilde{F}(\bar{q}) = \tilde{F}(\mu, \nu) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \exp[-i2\pi(x\mu + y\nu)] dx dy, \dots\dots\dots(2.27)$$

En donde  $\bar{q} = (q, \phi) = (\mu, \nu)$  es un vector de frecuencias espaciales con radio  $q$  y el ángulo polar  $\phi$  y las componentes cartesianas

$$\mu = q \cos \phi = \frac{x_f}{\lambda f} \dots\dots\dots(2.28)$$

$$\nu = q \sin \phi = \frac{y_f}{\lambda f} \dots\dots\dots(2.29)$$

En las relaciones anteriores,  $x_f$  y  $y_f$  son los componentes cartesianos de las coordenadas espaciales en el plano de observación,  $\lambda$  es la longitud de onda de la onda electromagnética empleada para iluminar y  $f$  es la longitud focal de la lente. Al denotar un

operador de una Transformada de Fourier Bidimensional como  $\Phi$ , la ecuación puede ser expresada como:

$$\tilde{F}(\bar{q}) = \Phi F(\bar{r}) \quad \dots\dots\dots(2.30)$$

Las tres operaciones para la creación de la curva de Koch de nivel N, definidas en las ecuaciones 2.24, 2.25 y 2.26 tienen con respecto a la Transformada de Fourier /11/, las propiedades:

$$\begin{aligned} \Phi T[\bar{d}]F(\bar{r}) &= \exp[i2\pi\varepsilon Lq \cos(\phi - \alpha)]\Phi F(\bar{r}), \\ &= \exp[i2\pi\varepsilon Lq \cos(\phi - \alpha)]\tilde{F}(\bar{q}), \quad \dots\dots\dots(2.31) \end{aligned}$$

$$\Phi R[\theta(k)]F(\bar{r}) = R[\theta(k)]\Phi F(\bar{r}) = \tilde{F}(q; \phi - \theta), \quad \dots\dots\dots(2.32)$$

$$\Phi M[m]F(\bar{r}) = mM[1/m]\Phi F(\bar{r}) = m\tilde{F}(m\bar{q}), \quad \dots\dots\dots(2.33)$$

En la ecuación 2.33 podemos asumir que la operación de amplificación, aunque afecta la longitud de la línea, no cambia su ancho (definido por la delta de Dirac ( $\delta$ ) en la ecuación 2.12).

De acuerdo a las propiedades establecidas, la transformada de Fourier  $\tilde{K}_1(\bar{q})$  de la ecuación 2.22, que corresponde a la amplitud compleja del campo de difracción de Fraunhofer puede ser expresada como:

$$\tilde{K}_1(\bar{q}) = \frac{1}{3} M[3] \sum_{k=1}^4 \exp\{i2\pi\varepsilon(k)Lq \cos[\phi - \alpha(k)]\} R[\theta(k)]\tilde{K}_0(\bar{q}), \quad \dots\dots\dots(2.34)$$

En donde

$$\tilde{K}_0(\bar{q}) = \frac{L \sin(\pi L q \cos \phi)}{\pi L q \cos \phi} = L \operatorname{sinc}(L q \cos \phi) \quad \dots\dots\dots(2.35)$$

Debido a la recursiva aplicación de la operación de reemplazo en el espacio del objeto, la difracción de Fraunhofer  $\tilde{K}_N(\bar{q})$  de la curva triádica de Koch  $K_N$  es descrita por:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_N(\bar{q}) &= \left\{ \frac{1}{3} M[3] \sum_{k=1}^4 \exp\{i2\pi\varepsilon(k)Lq \cos[\phi - \alpha(k)]\} R[\theta(k)] \right\}^N \tilde{K}_0(\bar{q}) \quad \dots\dots\dots(2.36) \\ &= \sum_{k_1=1}^4 \sum_{k_2=1}^4 \dots \sum_{k_N=1}^4 \exp\left\{ i2\pi L q \sum_{p=1}^N 3^{-p} \varepsilon(k_p) \cos[\phi - \alpha(k_p) - \Theta_{p-1}] \right\} \times R[\Theta_N] M^N[3] \tilde{K}_0(\bar{q}), \end{aligned}$$

En la relación expresada se realiza una sustitución de manera que,

$$\Theta_v = \sum_{s=1}^v \theta(k_s), \quad \dots\dots\dots(2.37)$$

Después de sustituir la expresión obtenida previamente para  $\tilde{K}_0(\bar{q})$ , la expresión para  $\tilde{K}_N(\bar{q})$  llega a la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_N(\bar{q}) &= 3^{-N} L \sum_{k_1=1}^4 \sum_{k_2=1}^4 \dots \sum_{k_N=1}^4 \exp\left\{ i2\pi L q \sum_{p=1}^N 3^{-p} \varepsilon(k_p) \cos[\phi - \alpha(k_p) - \Theta_{p-1}] \right\} \dots\dots\dots(2.38) \\ &\quad \times \operatorname{sinc}[3^{-N} L q \cos(\phi - \Theta_N)] \end{aligned}$$

La ecuación 2.38 modela entonces en términos matemáticos la distribución de amplitud compleja del patrón de difracción de Fraunhofer de una curva de Koch de nivel N. El resultado anterior se ejemplifica con el caso particular de  $K_0$ . Podemos obtener la expresión analítica para la transformada de Fourier de  $K_0$ ,  $\tilde{K}_0$ .

$$\tilde{K}_0(\bar{q}) = L \operatorname{sinc}(Lq \cos \phi) \dots\dots\dots(2.39)$$

El resultado obtenido en la ecuación 2.39 es análogo al resultado conocido para la transformada de Fourier de un segmento de línea de longitud L en coordenadas polares. Por otra parte, para el caso particular de  $K_1$  desarrollamos la expresión:

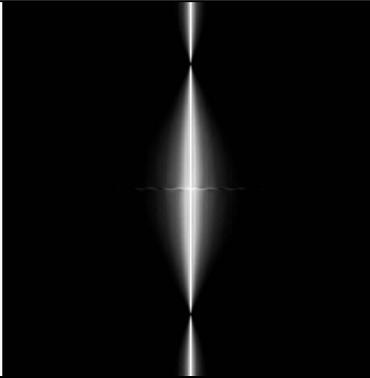
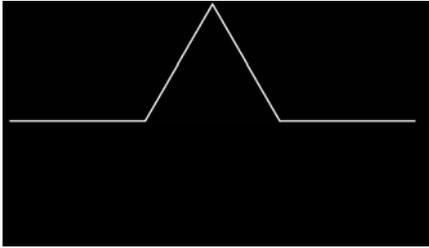
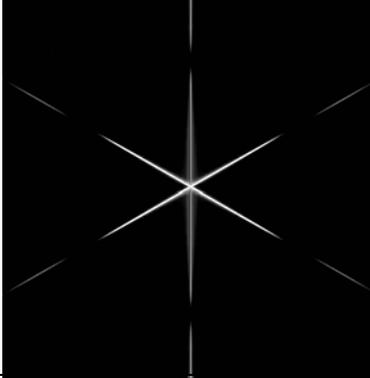
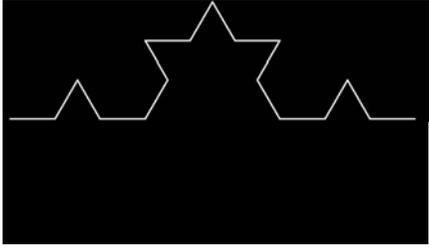
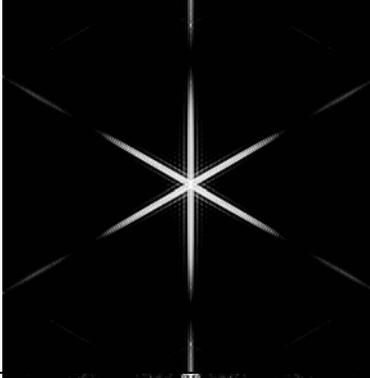
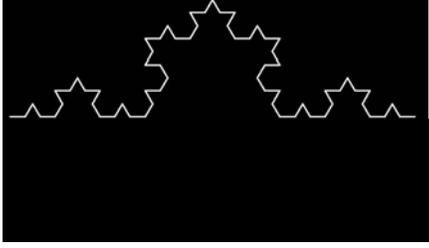
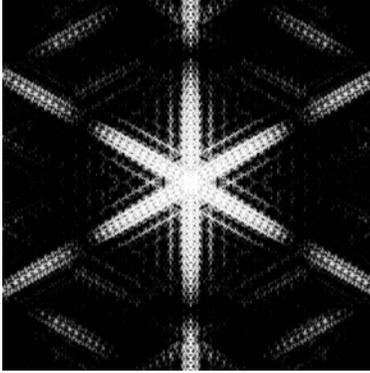
$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(\bar{q}) = 3^{-1} L [ & \exp\{i \frac{2}{3} \pi Lq \cos(\phi - \pi)\} \cdot \operatorname{sinc}(\frac{1}{3} Lq \cos(\phi)) + \\ & \exp\{i \frac{1}{3} \pi Lq \cos(\phi - \frac{2}{3} \pi)\} \cdot \operatorname{sinc}(\frac{1}{3} Lq \cos(\phi - \frac{1}{3} \pi)) + \dots\dots\dots(2.40) \\ & \exp\{i \frac{1}{3} \pi Lq \cos(\phi - \frac{1}{3} \pi)\} \cdot \operatorname{sinc}(\frac{1}{3} Lq \cos(\phi + \frac{1}{3} \pi)) + \\ & \exp\{i 2\pi Lq \cos(\phi)\} \cdot \operatorname{sinc}(\frac{1}{3} Lq \cos(\phi))] \end{aligned}$$

La ecuación 2.40 esta integrada por cuatro términos exponenciales, siendo éstos la expresión para la transformada de Fourier bidimensional en coordenadas polares, correspondientes a cada uno de los cuatro segmentos de línea que componen la curva de Koch de nivel 1,  $K_1$ , visualizada en la figura 2.6b. Finalmente, en la siguiente tabla (tabla 2.2) podemos apreciar simulaciones numéricas de las transformadas de Fourier de las curvas de Koch correspondientes a los niveles N=0,1,2,3,..,7.

A lo largo del capítulo se han desarrollado las bases teóricas necesarias para la descripción del fenómeno de difracción de Fraunhofer por la curva de Koch. Para las primeras dos iteraciones, fue posible realizar simulaciones numéricas en base a los resultados analíticos. No obstante por motivos de recursos computacionales para realizar la transformada de iteraciones mayores se recurrió a una Transformada de Fourier tomada directamente de la imagen de la curva desarrollada en Mathematica, por medio del software

Jview. Para obtener buenas aproximaciones numéricas fue necesario generar las curvas gráficas en alta resolución con bordes bien definidos evitando de esta manera el fenómeno de aliasing.

Se encontró el operador que en el plano de Fourier expresa los cambios fractales y se ejemplificaron instancias particulares del mismo. De igual manera, se llevaron a cabo simulaciones numéricas por medio del software analizador de imágenes Jview.

Nivel de la Curva	Curva de Koch resultante	Transformada de Fourier de la Curva
0		
1		
2		
3		

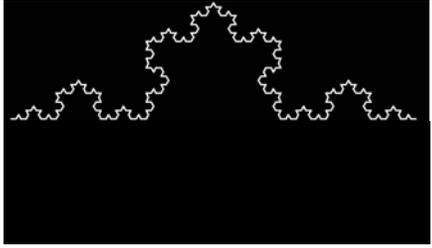
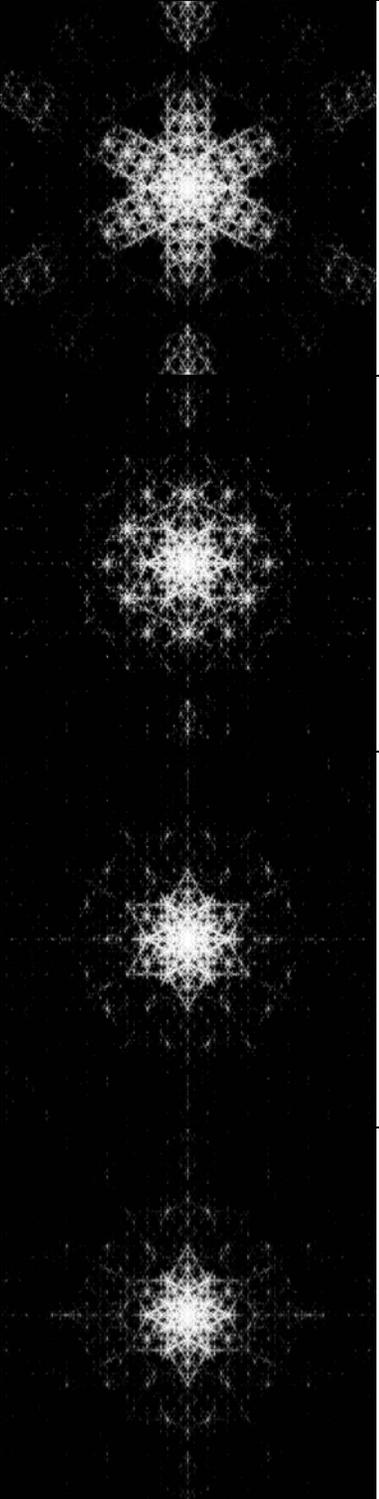
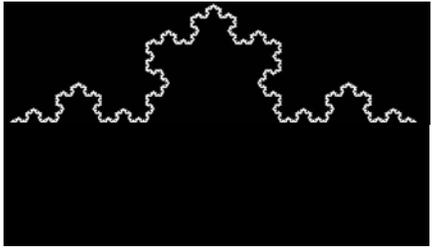
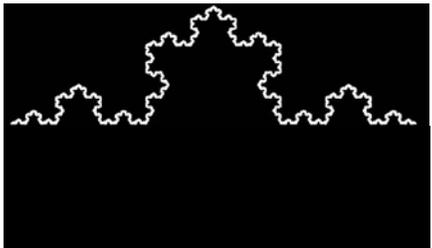
4		
5		
6		
7		

Tabla 2.2- En la columna derecha, simulaciones teóricas de las transformadas de fourier bidimensionales correspondientes a los niveles  $N=0,1,2,3,\dots,7$  de la curva de Koch visualizados en la columna central.