Capítulo 3

Descripción del sistema.

3.1 El modelo geométrico

La representación del fenómeno de eclipse lunar, mediante un modelo geométrico de rayos se puede describir de la siguiente manera:

Si se observa el diagrama de eclipse total de luna descrito en la sección 2.1, podemos observar que existen tres elementos importantes que intervienen en el fenómeno, el sol (como fuente luminosa), la luna (como pantalla de proyección) y la tierra (como el objeto opaco).

Si se pretende representar este modelo mediante modelo geométrico de rayos, podemos suponer un arreglo como se muestra en la figura 3.1:

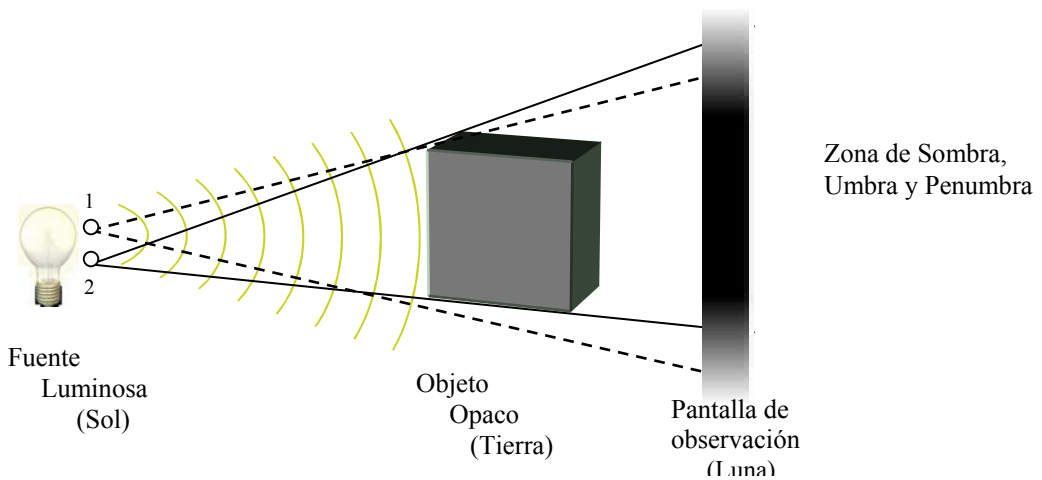


Figura 3.1 Sombra producida por un objeto opaco, delimitada por rayos.

En este modelo, podemos suponer que si una fuente luminosa emite una onda esférica hacia un plano de observación, y esta onda incidente es bloqueada parcialmente por un objeto opaco, las zonas de umbra y penumbra pueden ser confinadas trazando dos pares de rayos incidentes 1 y 2 provenientes de la fuente emisora en diferentes puntos, hacia el plano de observación, como se muestra en la figura 3.2.

Mediante este esquema podemos diferenciar tres zonas, 1) la zona de completa iluminación, que es el área en donde el objeto no alcanza a bloquear el paso de luz, 2) la zona de penumbra, la cual se crea mediante la superposición entre la zona brillante y la zona oscura, y 3) la zona de umbra, la cual carece de toda iluminación de la fuente.

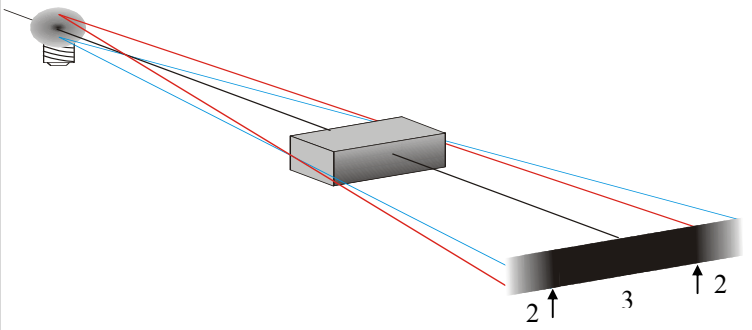


Figura 3.2 Zonas producidas por la sombra del objeto.

Como se muestra en la figura 3.2, no existe un límite bien definido entre la umbra y la penumbra, por el contrario las dos zonas se fusiona gradualmente, creando confusión sobre el área en donde deja de existir la penumbra y comienza la umbra. Además, como se mencionó en la sección 2.4, para llevar a cabo el análisis por geometría de rayos, será necesario que la fuente cumpla ciertas condiciones.

Finalmente, para que este modelo se pueda aplicar, primero será necesario reconocer todos los elementos que afectan a este sistema, y buscar una forma de controlar esas variables.

3.2 Reconocimiento de variables en el sistema.

El desarrollo del modelo teórico, así como la implementación del sistema experimental dependerán de las distintas variables que el fenómeno físico presenta. Reconociendo como variables todos aquellos elementos que puedan influir de alguna forma en la penumbra, es decir, aquellos elementos que ante alguna causa, produzcan algún efecto. Razón por la cual será prioritario reconocer las causas y establecer condiciones fijas para cada uno de esos efectos.

Una primera descripción del proceso de generación de sombras se comentó en la sección anterior, en donde se pudo observar que los principales elementos que intervienen en la proyección de una sombra son***: la fuente emisora de luz, el tamaño y forma del objeto opaco y el plano de observación***. Sin embargo es posible que algunos elementos adicionales afecten el comportamiento del sistema, como por ejemplo: ***la distancia de la fuente emisora al plano de observación, la distancia del objeto opaco al plano de observación, la frontera umbra penumbra, y el ruido externo***.

Una vez reconocidas estas variables, será necesario analizar cada una de ellas para identificar cual debe ser la variable causal y cual de ellas va a recibir el efecto, así como determinar cual de las demás debe permanecer constante.

Evidentemente si lo que se busca es una relación entre distancia de un objeto y su penumbra, entonces la variable causal será la posición del objeto opaco. Por lo tanto lo que resta es analizar cual de todos los elementos va a recibir el efecto de la variable posición y caracterizarlo, así como tratar de evitar que los demás elementos infieran en esta relación.

3.2.1 La fuente emisora de luz.

La fuente emisora de luz es un elemento que indudablemente infiere sustancialmente en el sistema, por lo cual será necesario establecer algunos parámetros deseables.

Como se mencionó en la sección 2.4, si se desea simplificar el análisis teórico mediante el análisis de geometría de rayos, es necesario que la onda de luz sea producida por una fuente puntual que irradie potencia a una tasa constante y uniformemente en todas direcciones, es decir que sea un radiador isotrópico. Verificando los tipo de fuentes luminosas existentes, observamos que están grupadas en dos grandes familias: Fuentes luminosas incandescentes y Fuentes luminosas luminiscentes.

La primera de origen térmico como el sol y la segunda emitida por vapor de algún gas.

a) Fuentes Luminosas Incandescentes.

Bombilla de filamento. Este tipo de fuente luminosa adolece de no tener una distribución de intensidad luminosa uniforme, pues como se observa en la figura 3.3, la distribución varía respecto al ángulo y distancia en forma de lóbulos, por lo que no cumple con la condición de uniformidad en todas direcciones.

Desafortunadamente la mayoría de las fuentes de luz incandescentes presentan el mismo comportamiento, razón por la cual se excluye como posible fuente luminosa.

b) Fuentes Luminosas Luminiscentes.

Estas son fuentes luminosas de descarga de vapor de algún gas a baja presión. La pared interior del tubo de descarga de vidrio tiene una capa de material fluorescente, que se excita por efecto de la radiación ultravioleta generada por la descarga, emitiendo luz. Mediante una adecuada selección del material fluorescente se puede variar el tono de luz.

Para su funcionamiento requieren una impedancia limitadora y en algunos casos necesitan del calentamiento de sus electrodos. Sin embargo, algunas de estas lámparas presentan una

distribución luminosa que varía con respecto a la temperatura del gas, como se muestra en la figura 3.4, por lo que no cumple con la condición de radiación de potencia a una tasa constante.

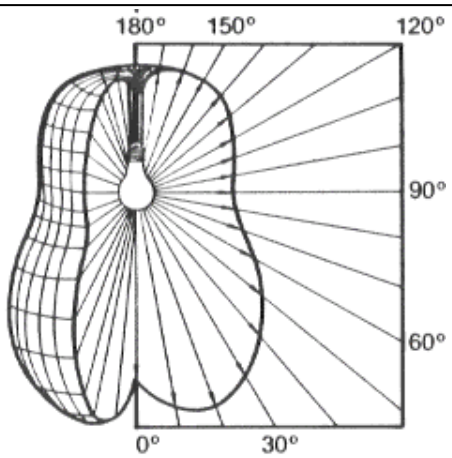


Figura 3.3 Distribución de intensidad luminosa de lámpara incandescente.

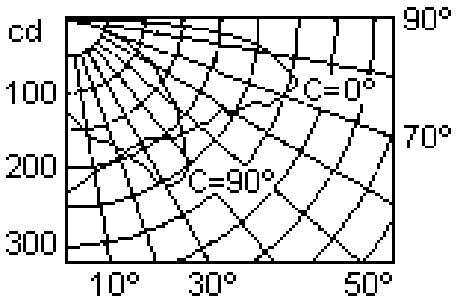


Figura 3.4 Distribución de intensidad luminosa de lámpara luminiscente.

Aunque sabemos que realmente no existe un radiador isotrópico, sin embargo el tipo de fuente luminosa que más se aproxima a los parámetros necesarios es el rayo láser. Su funcionamiento consiste en un tubo de descarga lleno de gas, el cual se calienta hasta excitar las moléculas de este, produciendo la emisión de un haz luminoso característico en forma de rayo luminoso. Este haz se emite en una longitud de onda específica, y no se dispersa, sino que mantiene una emisión coherente y estable.

La tabla 3.1 proporciona información de los parámetros del laser seleccionado:

Tipo de vapor de gas	Helio-Neon
Potencia de salida	10 mW
Longitud de onda	632.8 nm
Polarización	Aleatoria
Diametro del haz	3.5 mm

Tabla 3.1 Características de la fuente luminosa seleccionada

Estas propiedades del laser permiten tener una radiación de potencia constante, reduce las pérdidas por atenuación en la onda luminosa, permite analizar la propagación de la onda por medio del trazo de rayos, y además reduce considerablemente la fusión gradual entre la umbra y la penumbra, como se muestra en la figura 3.5, permitiendo localizar con más exactitud la frontera, gracias a que el haz luminoso se emite en una sola longitud de onda.

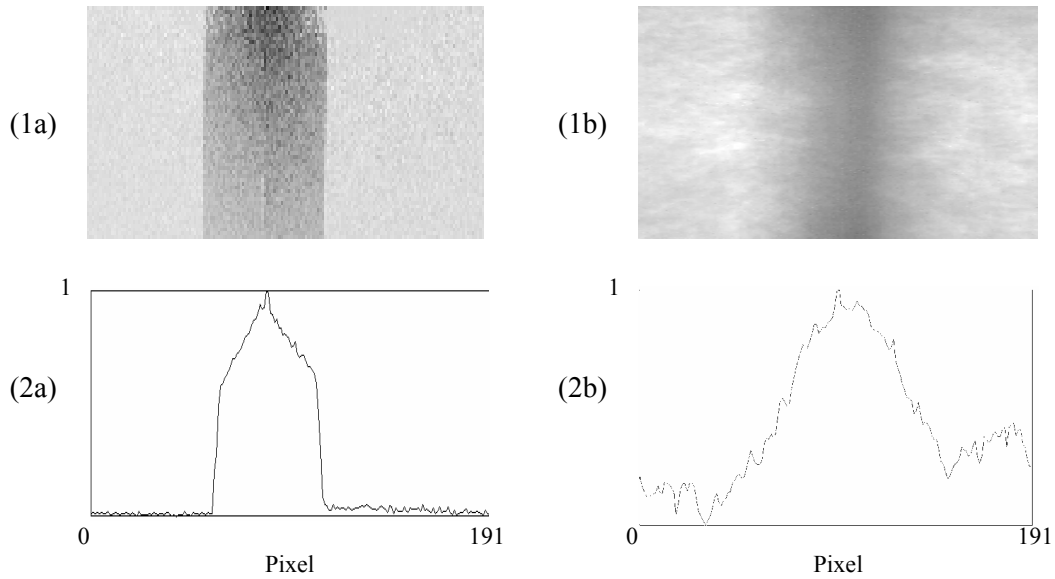


Figura 3.5 (1a) Sombra procesada digitalmente, producida por una fuente laser, (2a) Perfil de intensidad luminosa, (1b) Sombra producida por una fuente incandescente, (2b) Perfil de intensidad luminosa.

Una desventaja del laser es que el haz luminoso se emite con un diámetro muy pequeño, como se observa en la tabla 3.1, el diámetro del haz luminoso es de apenas 3.5 mm; esto provoca la necesidad de expandirlo mediante una lente a modo que este pueda cubrir sobradamente al objeto opaco, sin embargo al introducir una lente esta a su vez introducirá ruido a la imagen provocado por las impurezas de la lente y a partículas de polvo en el aire, así como también por defectos que pudiera tener el mismo haz luminoso, ocasionando fluctuaciones de intensidad luminosa en el frente de onda, como se observa en la figura 3.6-(a). No obstante, es posible emplear un arreglo óptico conocido como filtro

espacial, el cual nos permite obtener una fuente puntual que irradia potencia a una tasa constante y uniforme en dirección normal al plano de detección, es decir prácticamente obtenemos un radiador isotrópico.

El arreglo consiste simplemente en una lente covergente y un pequeño orificio, como se muestra en la figura 3.7.

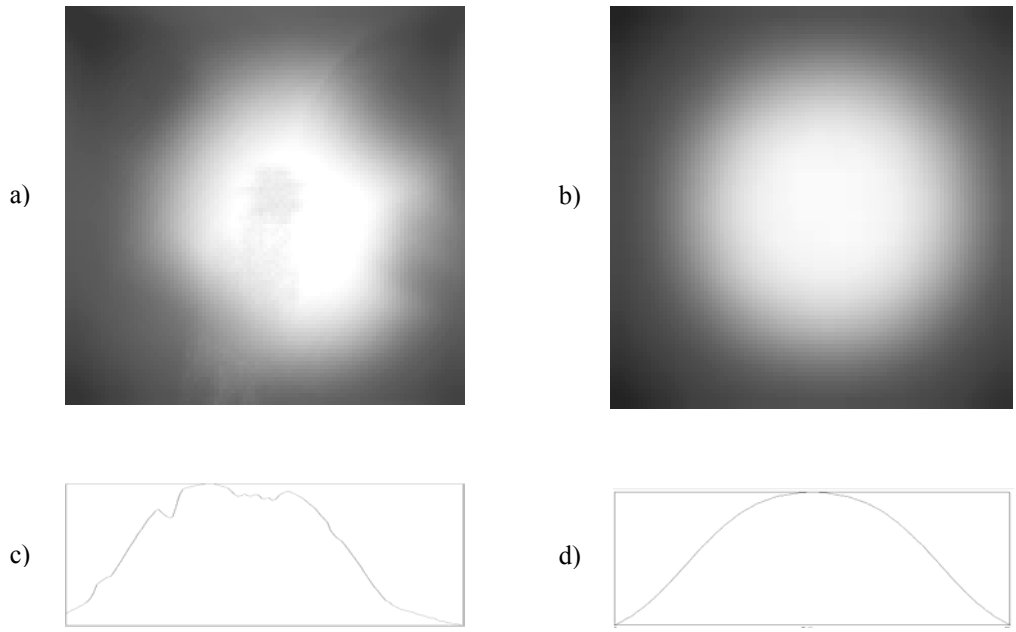


Figura 3.6 (a) Imagen del haz luminoso con ruido, (c) Perfil de intensidad luminosa, (b) Imagen del haz luminoso sin ruido, (d) Perfil de intensidad luminosa.

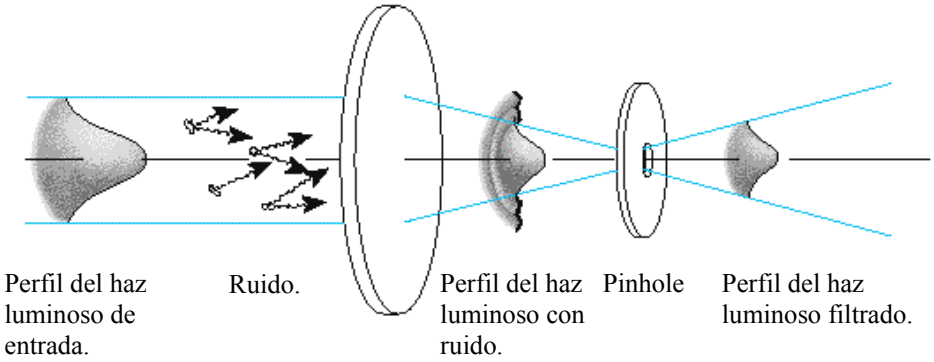


Figura 3.7 Principio de operación de un filtro espacial.
Scientific & Laboratory Products, "*The 1994 Newport Catalog*", Pag. 1.14 Irvine, CA, USA

En este arreglo se observa como el haz laser se enfoca a un pequeño punto por la lente, y entonces pasa a través de un pequeño orificio. El tamaño del orificio es dos o tres veces el tamaño del diámetro del punto de enfoque. Debido a que los rayos de "ruido" no están alineados con el eje óptico el haz laser, estos se focalizan en puntos que están sobre el eje óptico, por lo tanto, los rayos de "ruido" no se transmiten a través del orificio[1] .

En la figura 3.6 (b), podemos observar como el haz luminoso ha sido filtrado y ahora muestra un perfil de intensidad luminosa más uniforme, con una pequeña pérdida de intensidad de menos del cinco por ciento.

Finalmente, a fin de tener una fuente luminosa laser que genere la penumbra como en la figura 3.1, será necesario utilizar dos fuentes laser de las mismas características que emitan simultáneamente su haz luminoso al plano de observación para lograr tener una distribución luminosa razonablemente constante.

3.2.2 El tamaño y forma del objeto opaco.

Dependiendo de la forma del objeto, así como de su tamaño y posición va a depender la forma de la sombra que se proyecta. Consecuentemente podemos tener tantas formas de sombra como formas de objeto existan.

Evidentemente sería imposible tratar de analizar cada uno de los objetos, sin embargo a fin de poder realizar un primer reconocimiento cuantitativo del fenómeno, en este trabajo se analizó el caso particular de objetos con forma simétrica, especialmente se seleccionó por conveniencia del sistema las formas cilíndricas, y únicamente se varió el diámetro de los cilindros. No obstante, el análisis teórico se podrá aplicar también a objetos de diferentes formas, siempre y cuando se realicen algunas variantes en el análisis de la penumbra.

[1] Rami Arieli: ***"The Laser Adventure"*** Cap. 8 Secc 1, pag. 18.

Respecto al tamaño de los objetos, existen limitantes en el sistema que se deben considerar. Si llamamos al tamaño mínimo posible del objeto ***límite inferior***, y al tamaño máximo ***límite superior***, entonces de acuerdo a la ecuación 2.3 sabemos que el límite inferior teórico es de 1 micra; sin embargo para objetos demasiados pequeños, la respuesta del sistema no es muy confiable, como se observa en la gráfica 3.1; adicionalmente, otra limitante inferior es el mismo tamaño del pixel. Como se mencionó en la sección 2.7 La penumbra va a ser analizada mediante procesos digitales, de tal forma que *si las transiciones de tamaño o intensidad luminosa ocurridas en la penumbra, son indetectables por el pixel, entonces será imposible calcular estos cambios*.

Por otra parte, el límite superior teórico se verá acotado por el ángulo que subtiende el haz luminoso, como se muestra en la figura 3.8:

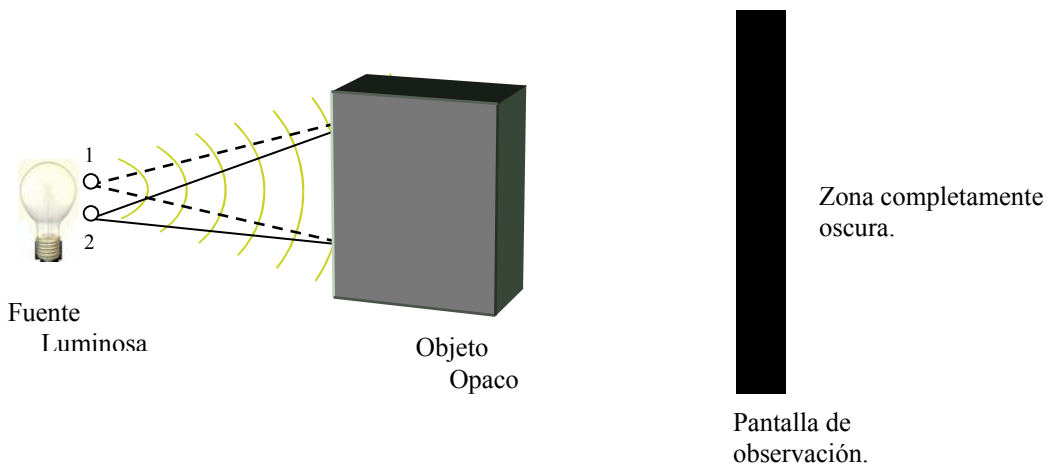
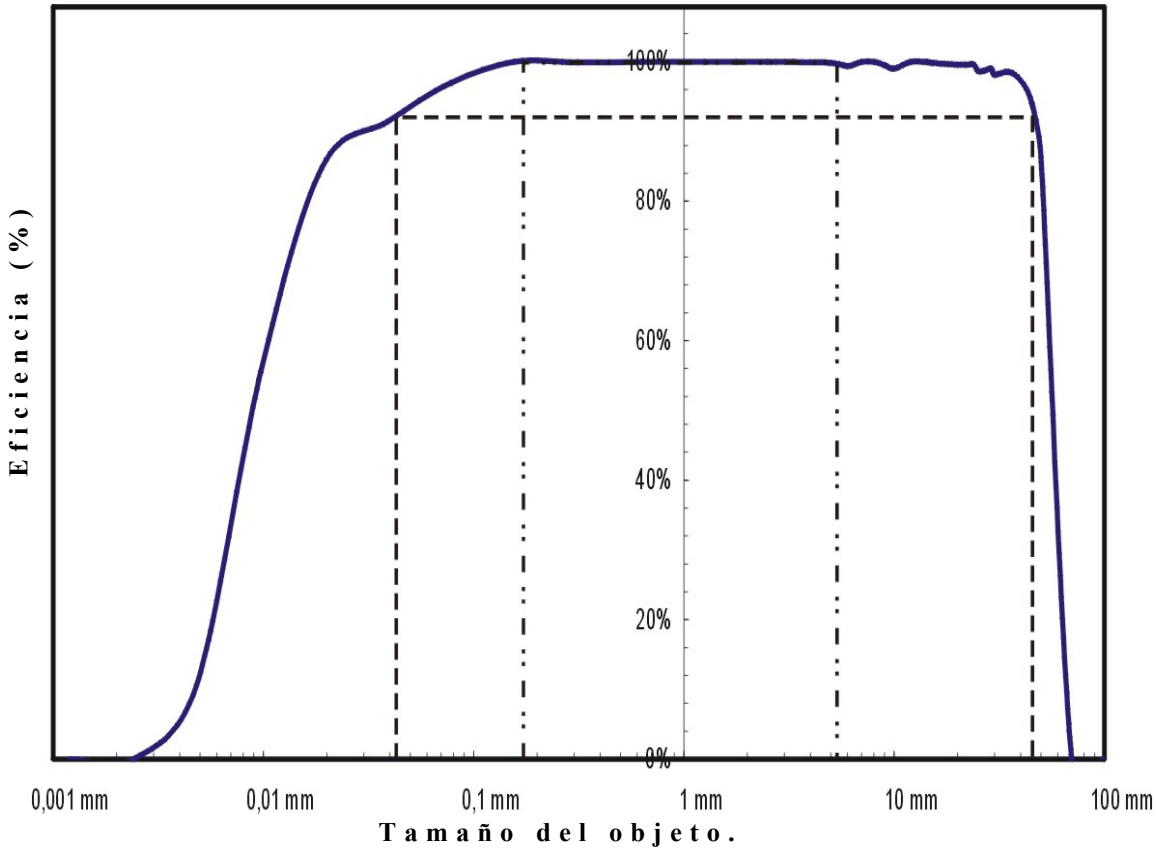


Figura 3.8 Haz luminoso completamente bloqueado por el objeto.

Como se observa en la figura anterior, si el objeto es más grande que el tamaño angular del cono de luz, este va a bloquear por completo el haz luminoso y únicamente habría una zona oscura en la pantalla de observación. Adicionalmente existe otra limitante inherente al campo de visión de la cámara empleada para capturar las imágenes, como se comentó en la

sección 2.7, pues al digitalizar la imagen, la cámara tiene un campo de visión finito de 2.64×2.64 mm. Nuevamente, como en el caso anterior, la respuesta del sistema no es muy confiable para objetos muy grandes, como se observa en la gráfica 3.1:



Gráfica 3.1 Respuesta del sistema al tamaño del objeto.

Finalmente podemos concluir, que si se desea una mayor exactitud en el sistema, los objetos teóricamente deben tener un tamaño mayor a 0.3 mm y menor a 8.0 mm, sin embargo se puede aumentar el margen de tamaño desde 0.06 mm hasta 70.0 mm con una confiabilidad de datos del 90 %.

3.2.3 El plano de observación.

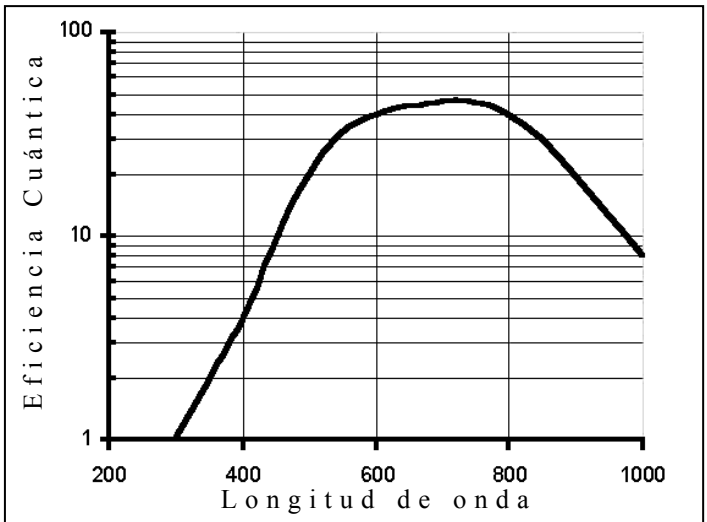
Una parte importante del sistema es el plano de observación, que es el lugar en donde se proyecta la sombra del objeto. Este plano, también llamado plano de detección, tiene las siguientes características: posición normal a la onda incidente, superficie plana y con un coeficiente de transmitancia del 90%. El material empleado es una hoja de acrílico pulido de 12 cm x 15 cm.

La detección de la sombra se hace a través de una cámara digital, la cual tiene las siguientes características:

Resolución	192×165 pixels
Tamaño de pixel	13.75μm×16μm
Área sensora	2.64×2.64 mm
Nivel de resolución	8 bits/pixel

Tabla 3.2 Características de la cámara digital.

Esta cámara está posicionada a 2.0 cm del plano de observación, como se muestra en la figura 3.9, en donde se observa que esta cuenta con un sistema óptico que proyecta la imagen de la sombra hacia la pantalla CCD, en donde mediante una malla empaquetada de electrodos de polisilicio colocados sobre la superficie de un chip, generan electrones al ser impactados los fotones sobre la superficie; esta señal es periódicamente leída y amplificada generando una corriente eléctrica que es proporcional al número de fotones que llegaron al pixel. Finalmente se asigna para cada valor leído en el pixel, un valor digital como se mencionó en la sección 2.7. Cabe señalar, que para obtener valores digitales que representen correctamente los valores de intensidad luminosa, la longitud de onda del haz incidente debe estar entre 600 y 800 nanómetros, como se muestra en la gráfica 3.2:



Gráfica 3.2 Respuesta del ccd a la longitud de onda.

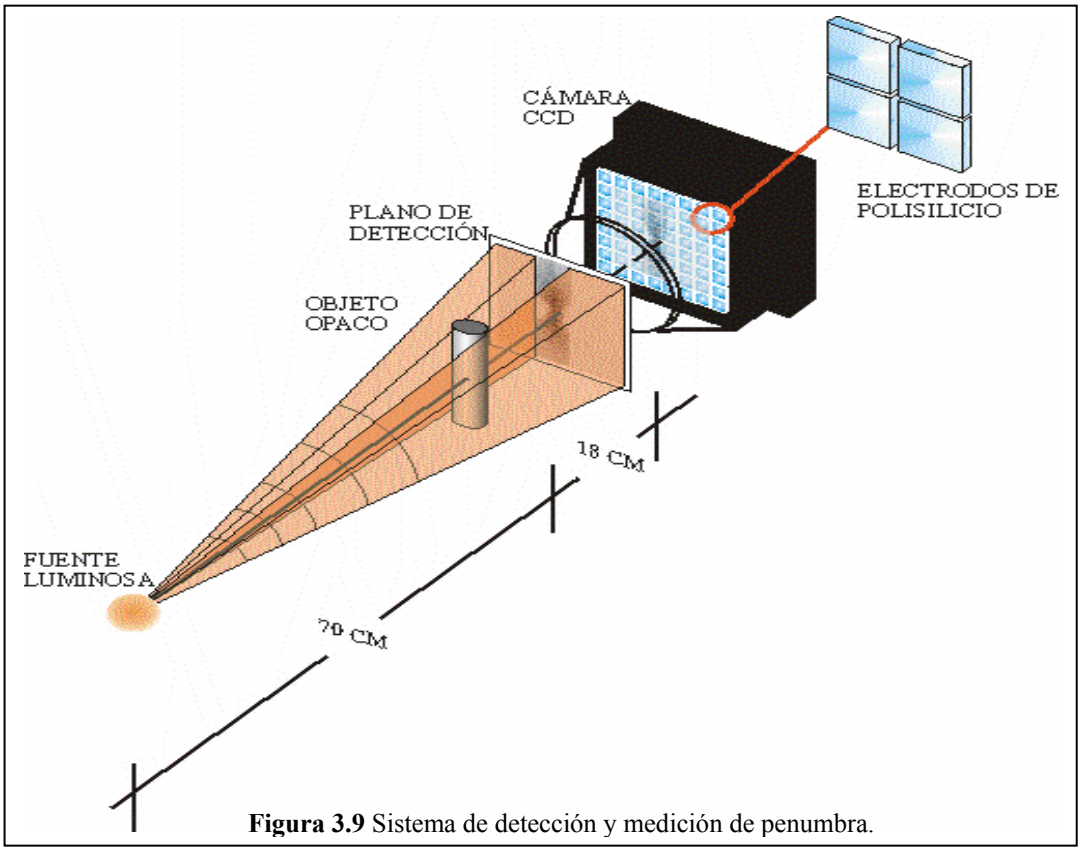


Figura 3.9 Sistema de detección y medición de penumbra.

Nuevamente, mediante las características del ccd, podemos delimitar ciertos parámetros necesarios para que la cámara funcione correctamente en el sistema:

- ✓ Para que la cámara detecte cambios de posición en la imagen de la penumbra, estos desplazamientos deben ser al menos de 16μ, que es el tamaño físico de un electrodo de la malla ccd.
- ✓ Para que la cámara detecte cambios de intensidad luminosa en la imagen de la penumbra, la intensidad luminosa debe ser capaz de generar al menos un electrón/pixel.
- ✓ El campo de visión, es decir el área que se proyecta hacia el ccd es de 11.5 mm.

3.2.4 Elementos adicionales al sistema.

Como se mencionó al inicio de la sección 3.1, algunos elementos adicionales que pueden afectar el comportamiento del sistema, son: *a) La distancia de la fuente emisora al plano de observación, b) La distancia del objeto opaco al plano de observación. c) La frontera umbra penumbra, y d) El ruido externo.*

a) ***La distancia de la fuente emisora al plano de observación***. En el caso de la distancia de la fuente emisora al plano de observación, esta se mantendrá fija durante todo el experimento, siendo una distancia de 83 cm, como se ilustra en la figura 3.9.

Esta distancia proporciona una superposición de los dos haces luminosos en el plano de observación, de tal forma que ambas fuentes contribuyan de forma balanceada en la proyección de la penumbra, como se muestra en la siguiente figura:

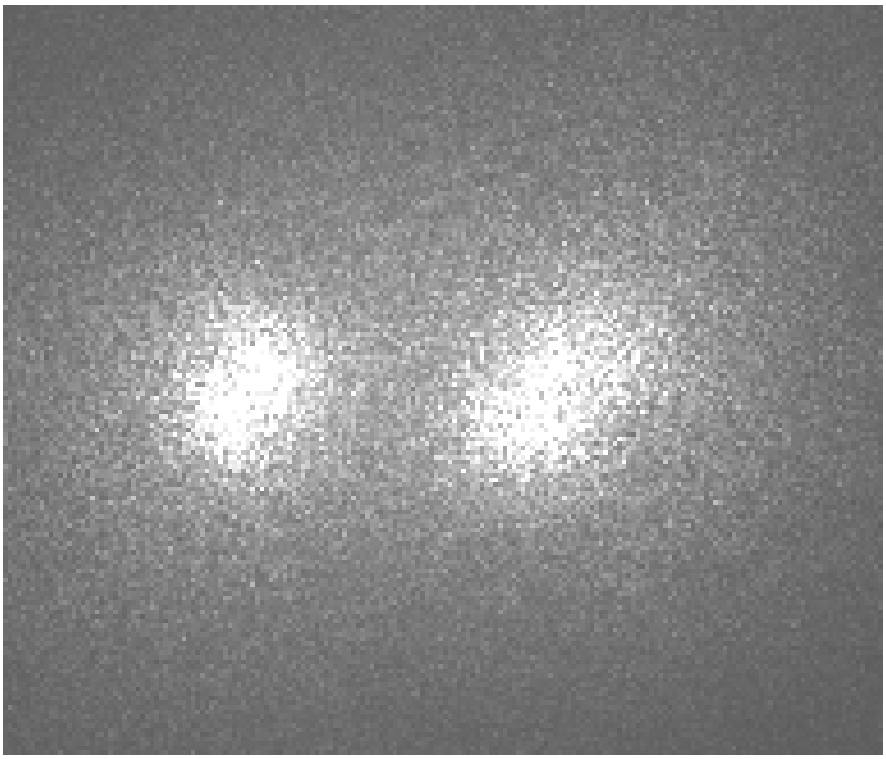


Figura 3.10 Distribución luminosa en el plano de observación.

b) ***La distancia del objeto opaco al plano de observación***. Para la distancia del objeto opaco al plano de observación, esta será la variable independiente, es decir, al variar la distancia del objeto opaco al plano de detección, producirá un cambio en el tamaño de la penumbra, siendo ensanchada o agotada como se observa en la figura 3.10.

En la figura 3-10 (a) se observa la zona en donde se superponen los dos haces luminosos S_1 y S_2, proyectados sobre el plano de observación. Sumándose las intensidades en esa área ($I_1 + I_2$).

Así mismo se observa que no existe sombra debido a que el objeto se encuentra

fuera del cono de iluminación, sólo existe la zona de superposición.

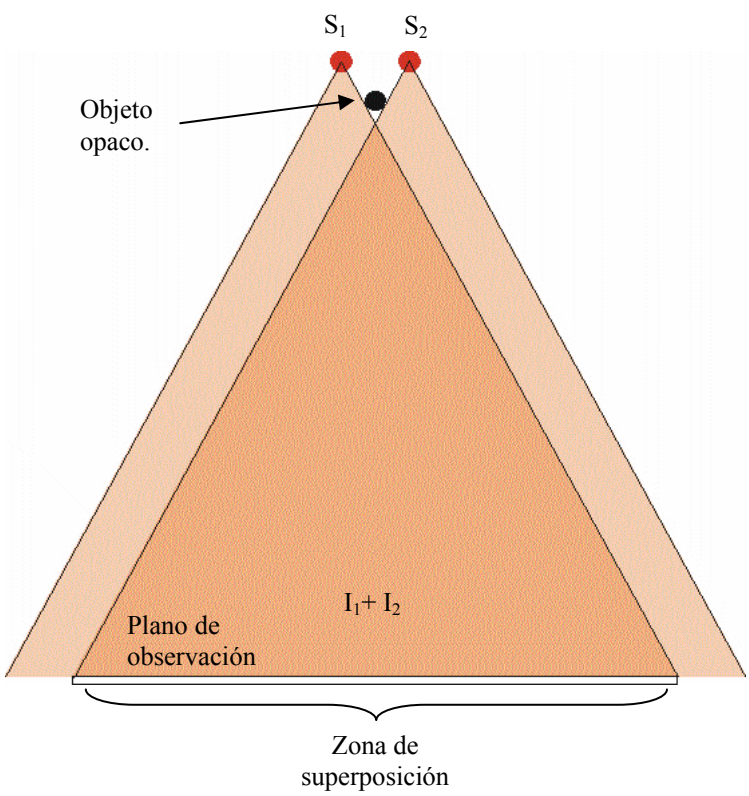


Figura 3.10 (a) Relación penumbra v.s distancia del objeto.

En la figura 3.10 (b) se puede observar como el objeto opaco se ha desplazado en dirección normal hacia el plano, produciendo una zona de penumbra (P_1 y P_2), y una zona intermedia de superposición ($I_1 + I_2$). También se observa que la zona P_1 está formada por la obstrucción o sombra (O_2) del haz proveniente de S_2 más la proyección del haz incidente S_1. De igual forma sucede con la zona P_2. Por otra parte se observa que en el centro de la sombra, la zona de superposición reduce su área a medida que la penumbra aumenta la propia.

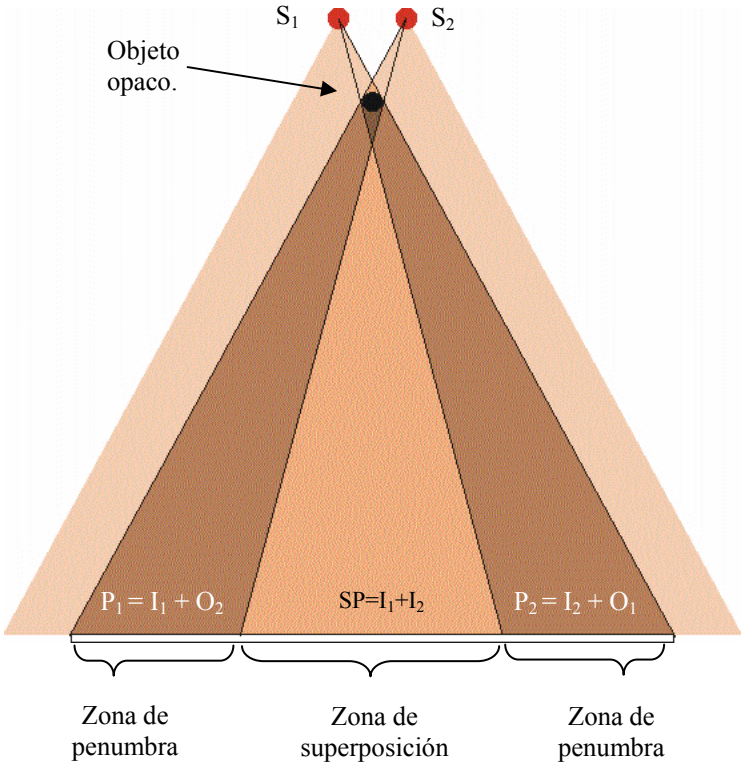


Figura 3.10 (b) Relación penumbra v.s distancia del objeto.

En la figura 3.10 (c) se puede verificar que después de que el objeto ha pasado la posición anterior, la penumbra alcanza su máxima área y a partir de ese punto comienza a decrecer a medida que el objeto continúa acercándose al plano, asimismo el área de superposición decrece, y aparece una segunda zona de superposición exterior ($I'_1 + I'_2$).

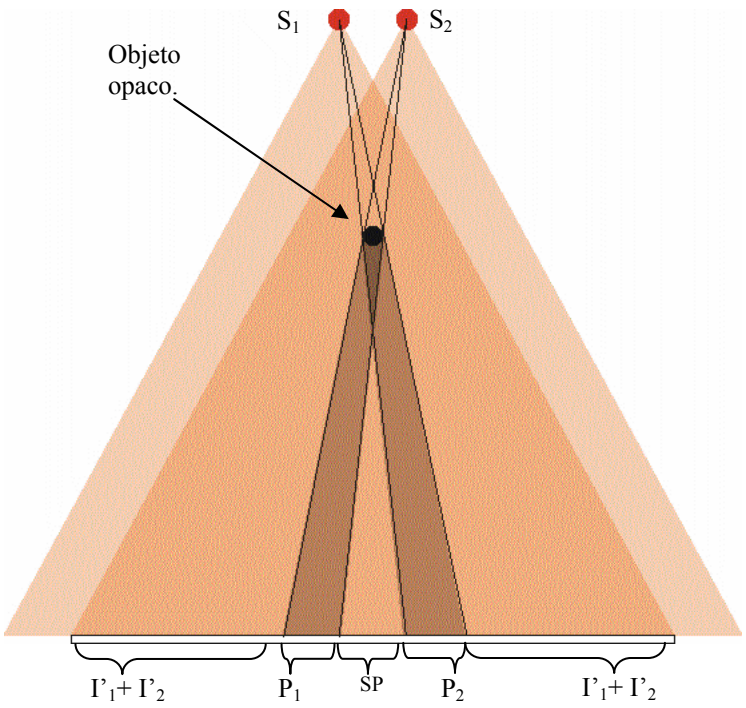


Figura 3.10 (c) Relación penumbra v.s distancia del objeto.

En la figura 3.10 (d) se puede observar el momento en el que los limites interiores de la penumbra P_1 y P_2 coinciden, así como la zona de superposición desaparece.

A partir de este punto, las zonas P_1 y P_2 comenzarán a superponerse, produciéndose la zona de umbra como se muestra en la figura 3.10 e).

A la zona limitada por el inicio de la penumbra P1, y el final de la penumbra P2, se le llamará la zona W.

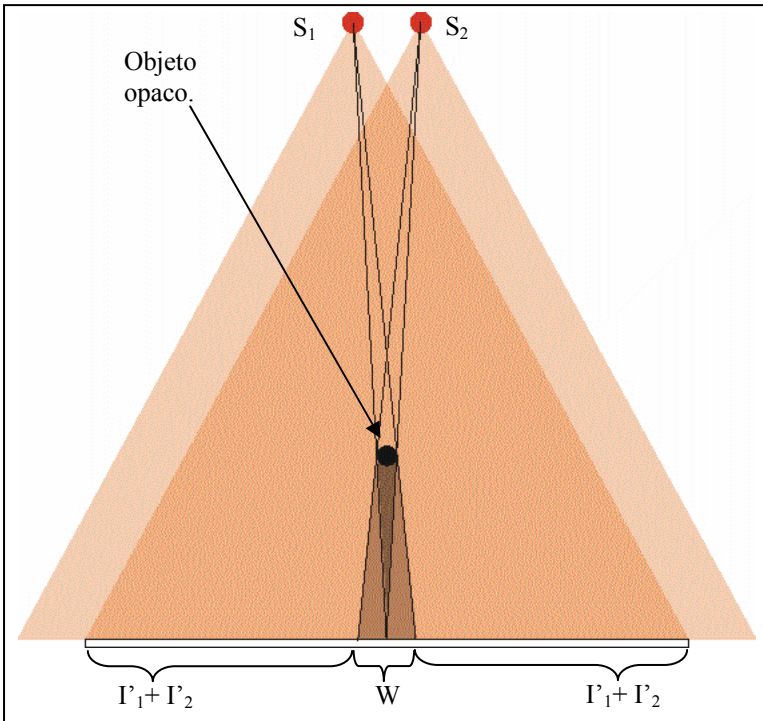


Figura 3.10 (d) Relación penumbra v.s distancia del objeto.

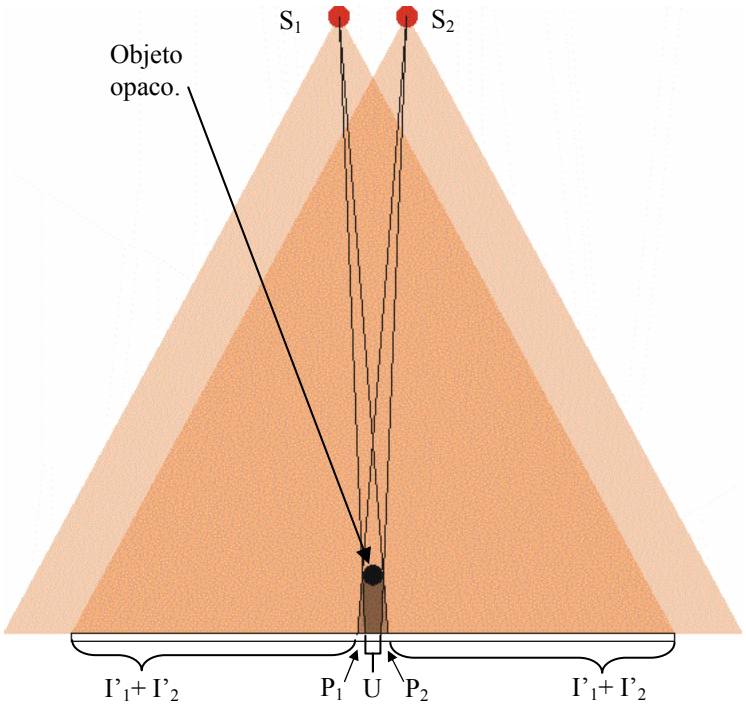


Figura 3.10 (e) Relación penumbra v.s distancia del objeto.

Ahora en la figura 3.10 (e) podemos observar que aparece una nueva zona más oscura que la penumbra, llamada *umbra (U)*. Esta zona carece completamente de cualquier luz proveniente de la fuente luminosa. Así mismo se observa que la penumbra nuevamente se divide en dos partes, las cuales a medida que el objeto se acerca al plano, estas se separan y se reducen.

Finalmente podemos ver en la figura 3.10 (f) que cuando el objeto toca el plano de observación, la penumbra desaparece, debido a que la zona de sombra y la zona de superposición dejan de sobreponerse. La zona de umbra ahora adquiere el tamaño del objeto que la produce.

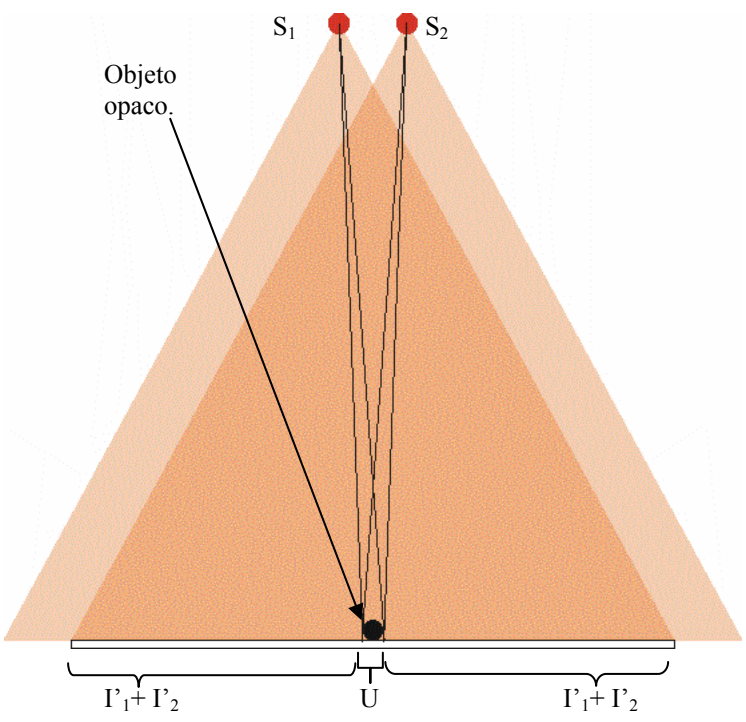


Figura 3.10 (f) Relación penumbra v.s distancia del objeto.

Esta cualidad que presenta la penumbra, de estar presente en todo momento, induce a reconocerla como la variable dependiente de la posición y tamaño del objeto.

c) ***La frontera umbra-penumbra.*** Como se demostró en el apartado b) la penumbra varía conforme el objeto se acerca a la pantalla de observación.

Si se observa la forma de la penumbra en la figura 3.10 (d), podemos notar que esta forma puede ser análogamente representada por un pulso cuadrado, en donde la amplitud del pulso sería dado por el valor que tome el pixel en la zona de penumbra, y el ancho del pulso sería proporcionado por los límites entre la zona de penumbra y la zona de superposición. Recordando que para valores de intensidad luminosa altos, el valor del pixel es cero, como se comento en la sección 2.7, entonces si se grafica la imagen obtenida en el plano de observación, podemos ver que para la zona de superposición, la amplitud del pulso es cero, y para la zona de penumbra, el valor del pulso aumenta de acuerdo al tono de gris que registre el pixel, considerando que se está realizando el análisis mediante el modelo geométrico de trazo de rayos, podemos aproximar las variaciones de intensidad luminosa mediante un pulso de amplitud constante y un ancho de pulso que varía de acuerdo a la posición del objeto opaco, como se ilustra en la figura 3.11.

Si ahora el objeto continúa moviéndose hacia el plano de observación, se obtendría un pulso como se muestra en la figura 3.12 (b). Si finalmente el objeto se desplaza de regreso a la fuente, el pulso ahora tendría la forma que se ilustra en la figura 3.12 (c).

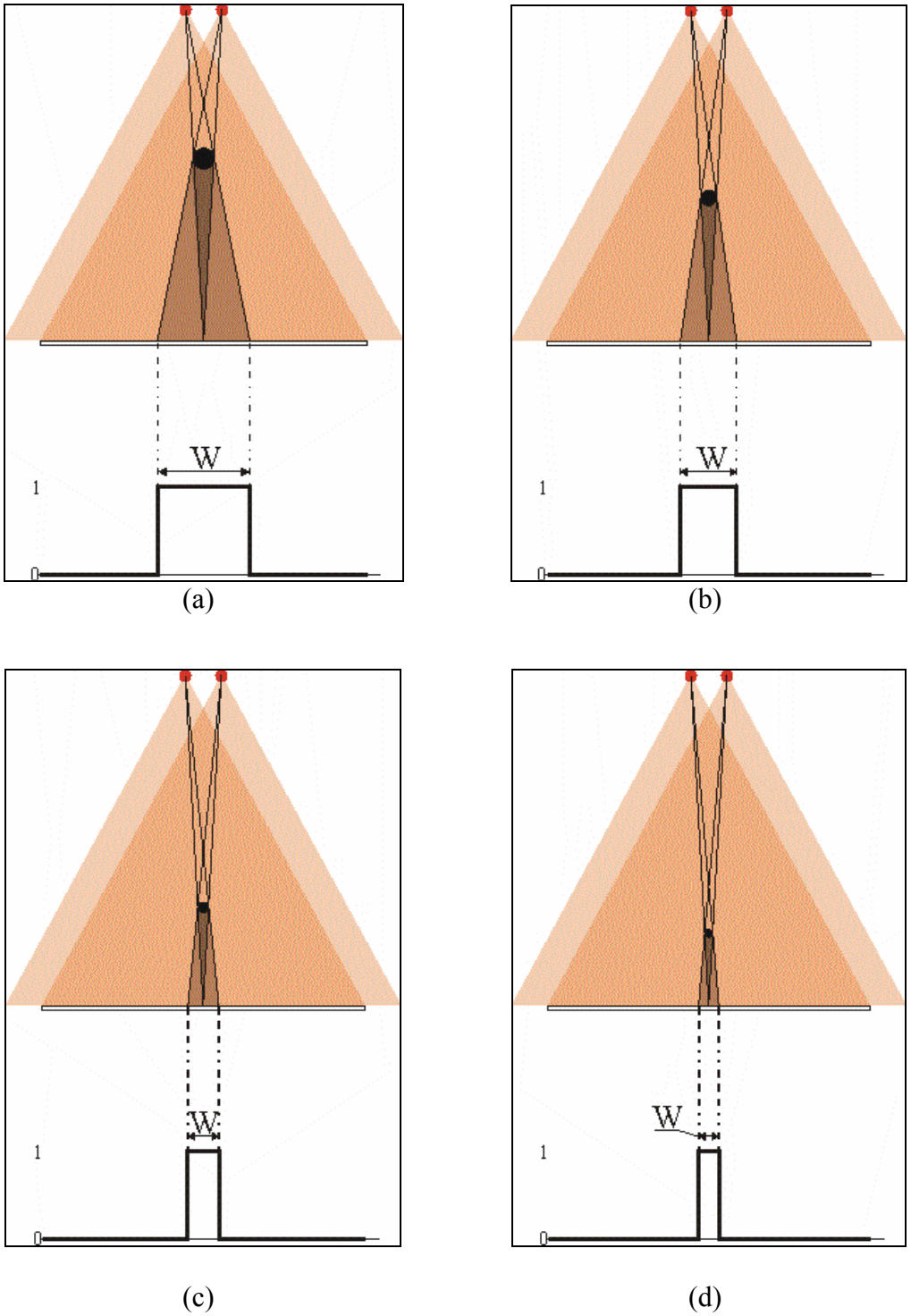
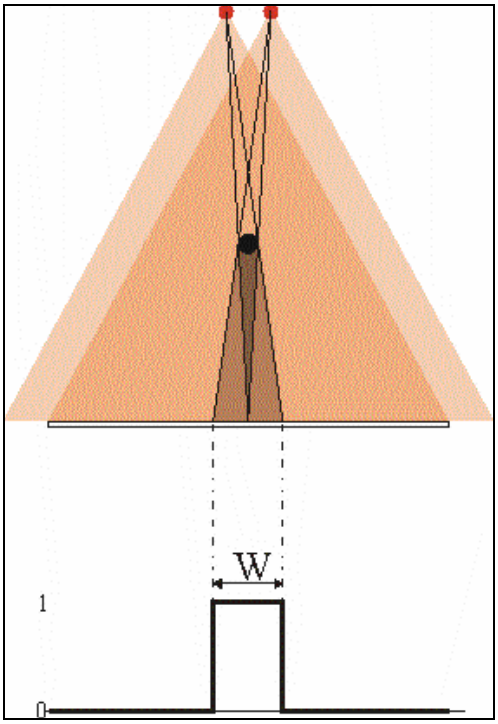
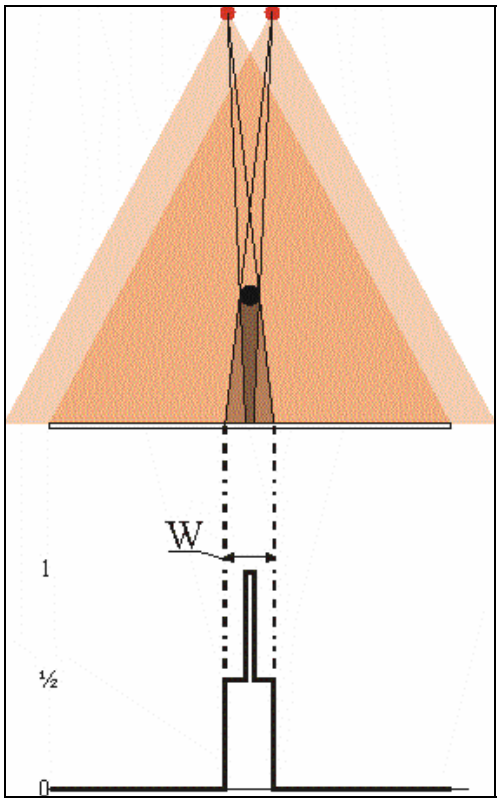


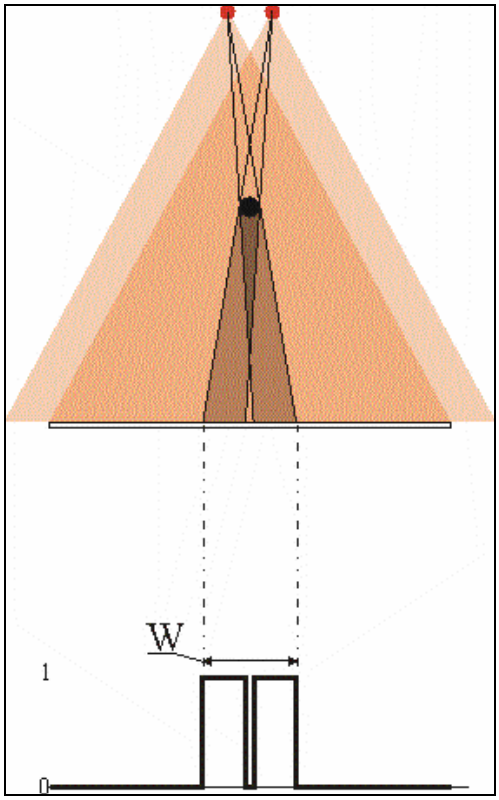
Figura 3.11 Diferentes anchos de pulso para diferentes diámetros del objeto, en (a) el objeto se encuentra a una distancia *l* del plano, y en (d) el objeto se encuentra a *l*/2.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.12 Diferentes anchos de pulso para el mismo objeto, en (a) el objeto se encuentra en la posición cero, en (b) el objeto se desplaza de la posición cero, hacia el plano de observación, y en (c) se desplaza de la posición cero hacia la fuente.

d) ***El ruido externo.*** Finalmente la última variable a considerar, la cual introduce variaciones al sistema es el ruido externo. Este se encuentra presente en las imágenes capturadas, y es producido por fallas en los mismos instrumentos empleados. Una fuente de ruido es provocada a causa de variaciones de potencia que el laser presenta, provocando una variación de intensidad en la zona de superposición, desplazando la media de la distribución de densidad hacia la orilla, como se ilustra en la figura 3.13.

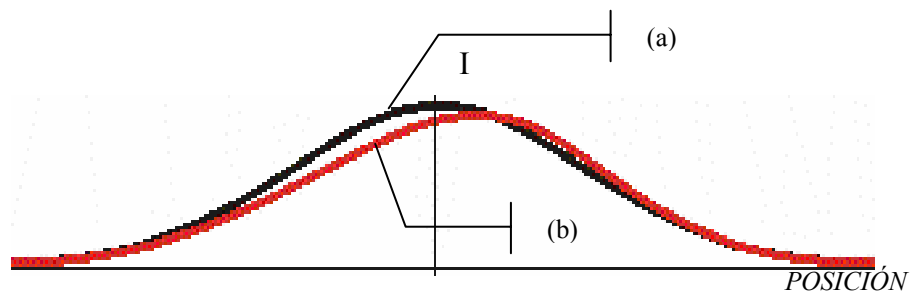


Figura 3.13 Perfil de intensidad, (a) centrado, (b) desplazado hacia la derecha.

Esto provoca que la intensidad luminosa en la zona de superposición, se "cargue" ligeramente hacia la derecha, ya que al sumarse las intensidades en esa zona, el valor máximo de la distribución estaría desplazado del centro. Para solucionar esto se implementó un elemento óptico conocido como atenuador, el cual permite reducir la intensidad del haz luminoso hasta encontrar la adecuada, como se muestra en la figura 3.14 :

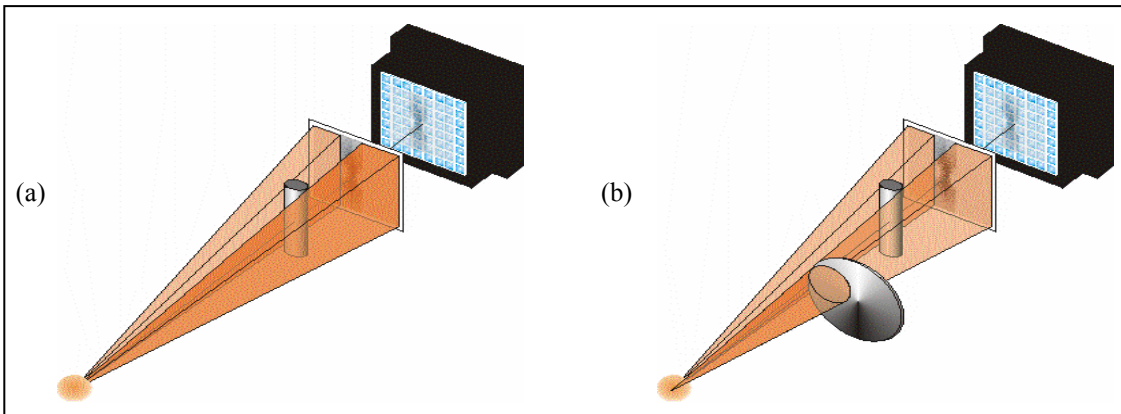


Figura 3.14 En (a), los haces luminosos tienen diferente intensidad luminosa, en (b) la intensidad se atenúa para tener el mismo valor en ambos.

Este ruido presente en el sistema, inevitablemente es también detectado por la cámara ccd y adicionado a las imágenes obtenidas, como se muestra en la figura 3.15:

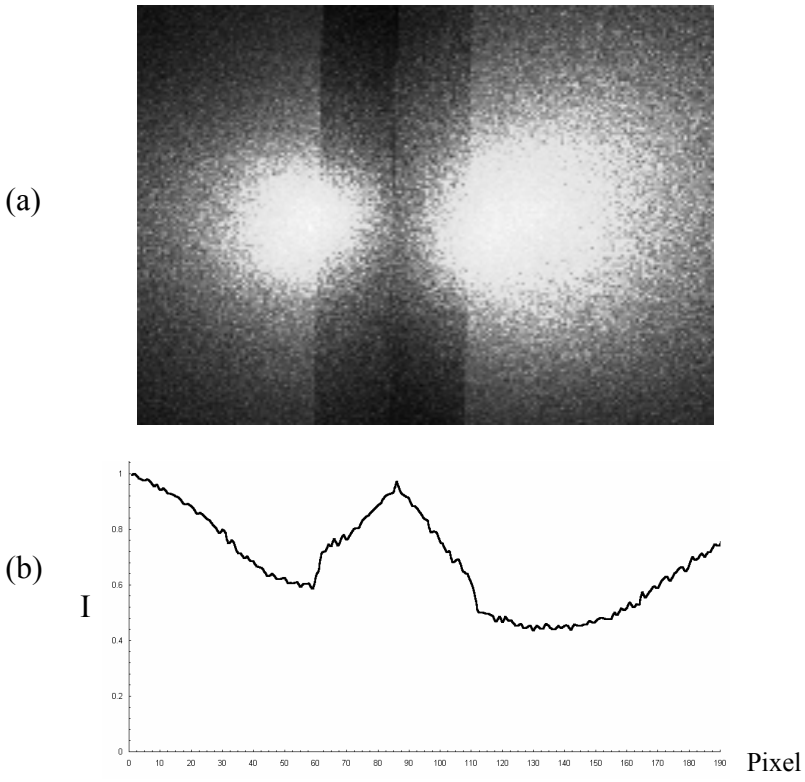


Figura 3.15 En la figura (a), se muestra a la imagen obtenida, junto con la penumbra y el ruido de fondo, en (b) el perfil de intensidad normalizado.

consecuentemente es necesario emplear alguna técnica para tratar de reducir la influencia de este ruido en los datos obtenidos.

Para lograr este objetivo es posible manipular la imagen digitalmente, como se mencionó en la sección 2.7, y tratar a las imágenes como matrices de valores discretos. Por lo tanto si en la imagen obtenida se encuentra el ruido producido por el sistema, podemos entonces capturar una imagen que únicamente contenga información del ruido en el sistema y restársela a la imagen con los datos de la penumbra, para disminuir la influencia del ruido, como se muestra en la figura 3.16:

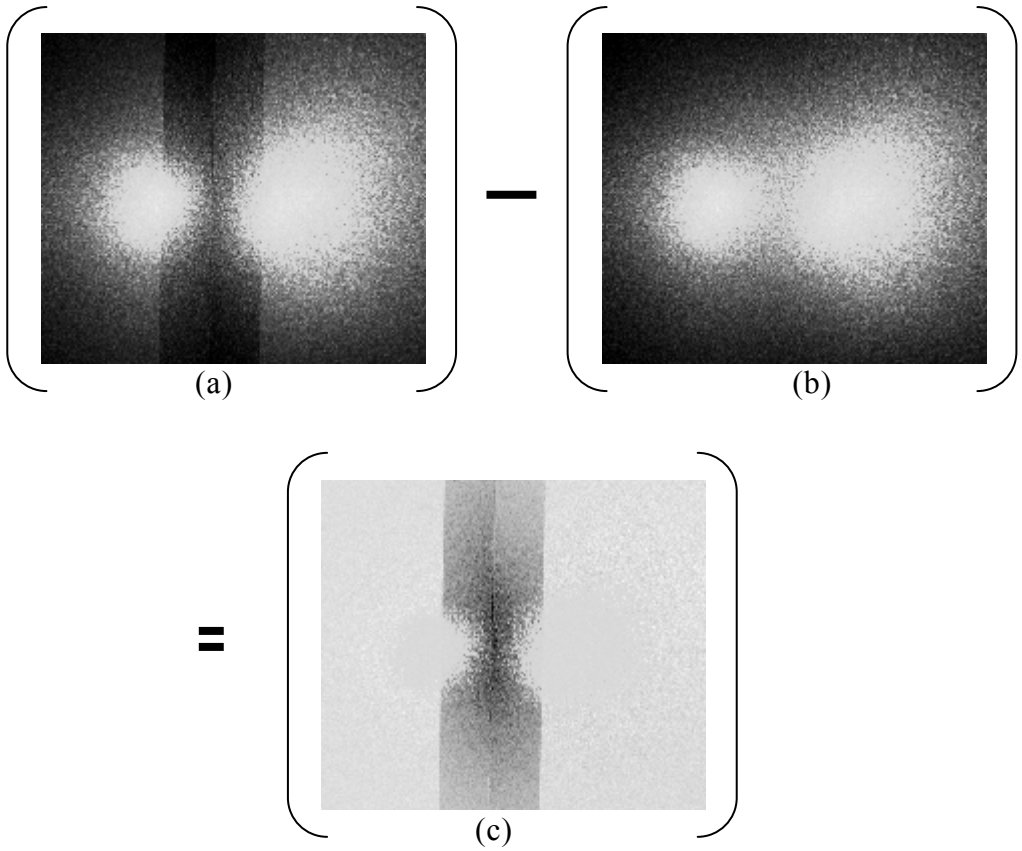


Figura 3.16 La figura (a) muestra la imagen de la penumbra mas el ruido de fondo, en (b) se muestra únicamente el fondo, y en (c) se le ha restado a la imagen de la penumbra el fondo.

fuera del cono de iluminación, sólo existe la zona de superposición.

En la imagen (a) de la figura 3.16 se observa como la penumbra no es muy clara pues se difumina con el fondo, en (c) se observa como al restarle el ruido de fondo, la zona de penumbra es mucho más notoria.

La ecuación que representa este proceso es:

$$\begin{pmatrix} (I+R)_{1,1} & (I+R)_{1,2} & (I+R)_{1,3} & \cdots\cdots & (I+R)_{1,192} \\ (I+R)_{1,1} & (I+R)_{1,1} & (I+R)_{1,1} & \cdots\cdots & (I+R)_{1,1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (I+R)_{165,1} & (I+R)_{165,2} & (I+R)_{165,3} & \cdots\cdots & (I+R)_{165,165} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (R)_{1,1} & (R)_{1,2} & (R)_{1,3} & \cdots\cdots & (R)_{1,192} \\ (R)_{1,1} & (R)_{1,1} & (R)_{1,1} & \cdots\cdots & (R)_{1,1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (R)_{165,1} & (R)_{165,2} & (R)_{165,3} & \cdots\cdots & (R)_{165,165} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} (I)_{1,1} & (I)_{1,2} & (I)_{1,3} & \cdots\cdots & (I)_{1,192} \\ (I)_{2,1} & (I)_{2,2} & (I)_{2,3} & \cdots\cdots & (I)_{2,192} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (I)_{165,1} & (I)_{165,2} & (I)_{165,3} & \cdots\cdots & (I)_{165,192} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

El tamaño de la matriz corresponde al tamaño de la imagen en pixeles, siendo de 165 renglones por 192 columnas y valores discretos positivos para cada elemento de la matriz, dentro de un intervalo de 0 a 255.

3.3 Deducción del modelo teórico.

La propuesta del modelo teórico se desarrolló aprovechando las cualidades geométricas que presenta la sombra del objeto proyectada sobre el plano de observación. De tal forma que si se observa la figura 3.12 a, b y c, se podrá notar que la distancia del objeto al plano de observación esta siendo definida mediante un par de triángulos, en donde la altura medida desde la base hasta la arista superior, coincide con la distancia del objeto al plano de detección, así como la separación entre las aristas superiores coincide con el diámetro del objeto, tal como se muestra en la figura 3.17.

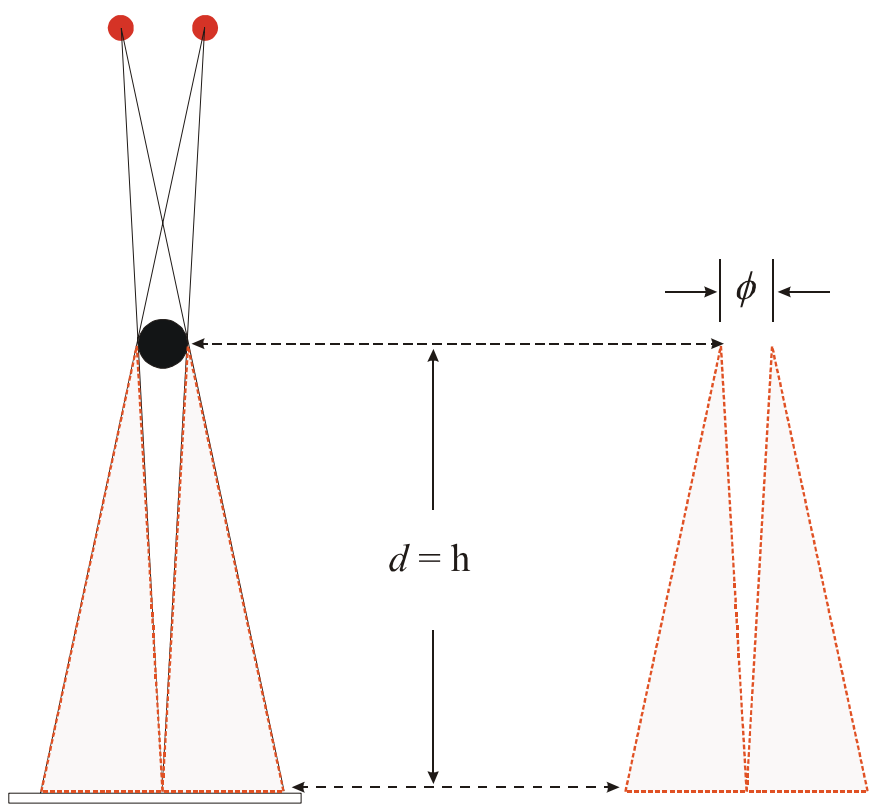


Figura 3.17 Reconocimiento de zonas de triángulos.

Si ahora, establecemos que la separación entre las fuentes luminosas esté determinado por D, y la distancia de las fuentes luminosas a la pantalla de observación sea l, entonces el modelo geométrico que describe la forma de penumbra de la figura 3.12 a) esta dado por la siguiente grafica:

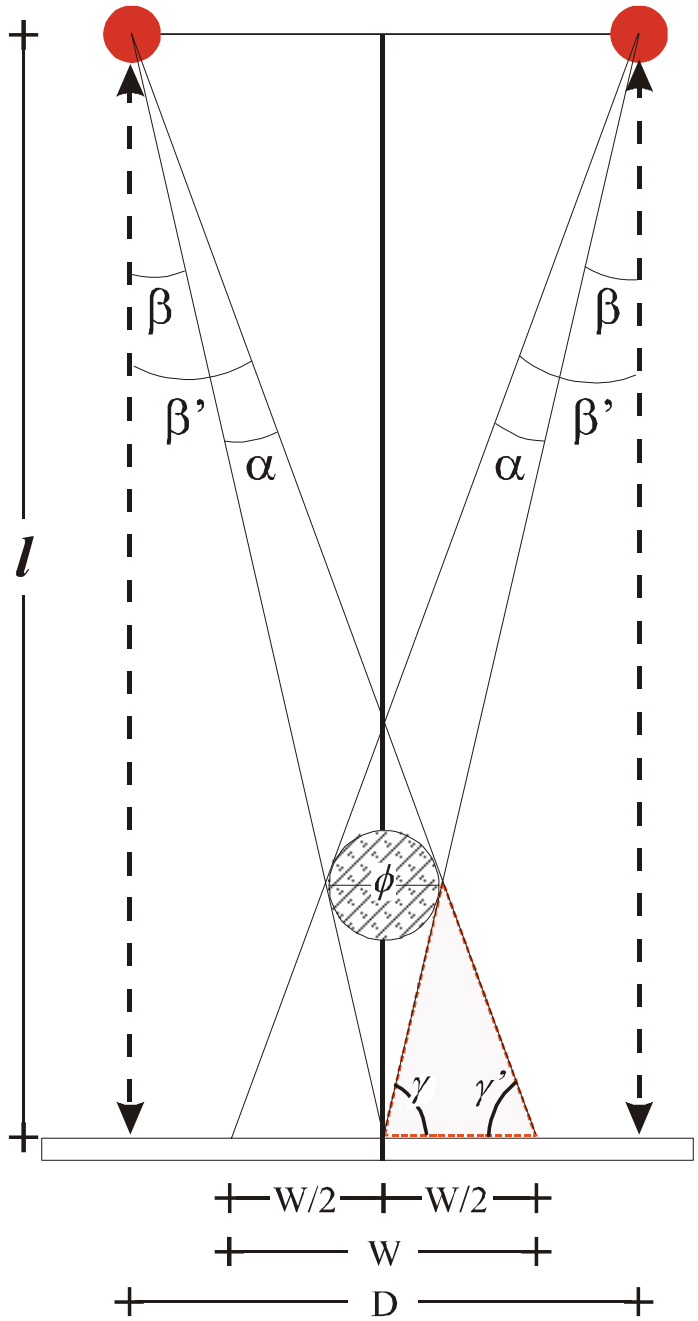


Figura 3.18 Análisis geométrico del sistema con superposición y umbra cero.

En la figura 3.18 podemos observar que el triángulo que forma la penumbra, en ausencia de superposición y umbra, tiene los ángulos internos γ y γ', en donde mediante la relación de ángulos internos alternos, se deduce que:

$$\beta = \tan^{-1}\left[\frac{D/2}{l}\right] \tag{3.2a}$$

$$\beta' = \tan^{-1}\left[\frac{(D/2)+(W/2)}{l}\right] \tag{3.2b}$$

Por lo tanto, los ángulos que subtienden los lados del triángulo con respecto a su base son:

$$\gamma = 90-\beta \text{ y } \gamma' = 90 + \beta' \tag{3.3}$$

Mediante esta relación de ángulos, podemos describir nuevamente el triángulo dividiéndolo en dos triángulos rectángulos, como se muestra en la figura 3.19:

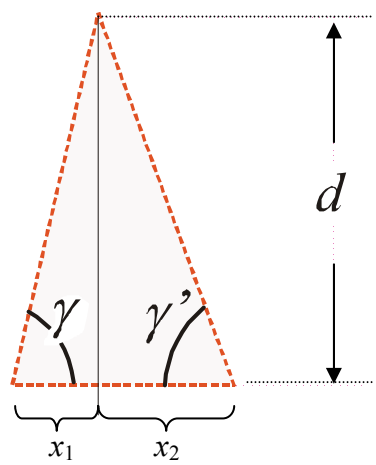


Figura 3.19 Triángulo rectángulo interno.

Estos triángulos presentan como base el segmento x_1 y x_2, en donde:

$$W/2 = x_1 + x_2, \tag{3.4}$$

por lo tanto, mediante relación trigonométrica podemos decir que:

$$\frac{d}{x_1} = \tan\gamma, \qquad \text{así como} \qquad \frac{d}{x_2} = \tan\gamma', \tag{3.5}$$

De tal forma que si sustituimos la ecuación 3.5 en la 3.4, obtenemos:

$$\frac{W}{2} = d\left(\frac{1}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\gamma'}\right) \tag{3.6}$$

Posteriormente, si despejamos para *d*, obtenemos la relación entre la distancia del objeto al plano de observación y su penumbra:

$$d = \left(\frac{W}{\frac{2}{\tan\gamma} + \frac{2}{\tan\gamma'}}\right) \tag{3.7}$$

Finalmente, para obtener el diámetro del objeto que produce la penumbra, podemos deducir que la distancia del centro del objeto hacia la arista superior de uno de los triángulos, corresponde con la mitad del ancho de la penumbra W/2, como se ilustra en la figura 3.20:

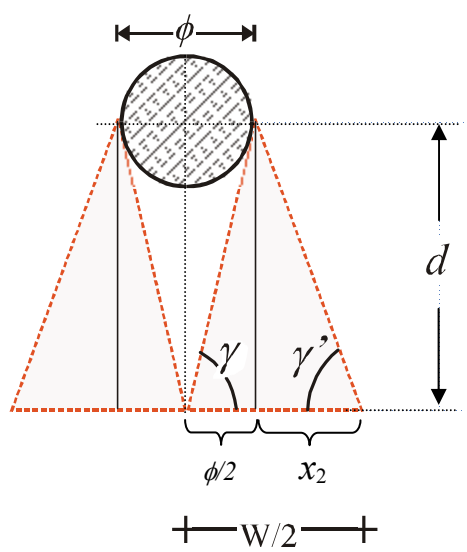


Figura 3.20 Relación arista-diámetro del objeto.

por lo tanto:

$$\phi/2 = W/2 - x_2 \tag{3.8}$$

y sustituyendo la relación 3.5 en 3.8 obtenemos la relación que calcula el diámetro del objeto que produce la penumbra:

$$\phi = W - \frac{2d}{\tan\gamma'} \tag{3.9}$$

Ahora, si la penumbra presenta las zonas de superposición o umbra, se verá afectada la base del triángulo W/2, por lo tanto, el modelo matemático que describe la relación entre la distancia del objeto al plano de observación, así como el diámetro del objeto es:

Términos:

D: Separación entre fuentes.

W: Zona de inicio hasta fin de la penumbra.

SP: Zona de superposición.

U: Zona de umbra.

l : Distancia fuente-pantalla de observación.

***d*: Distancia objeto-pantalla de observación.**

***ϕ*: Diámetro del objeto que produce la sombra.**

$$\gamma = 90 - \tan^{-1}\left[\frac{D + SP - U}{2l}\right]$$

$$\gamma' = 90 - \tan^{-1}\left[\frac{D + W}{2l}\right] \tag{3.10}$$

$$d = \frac{W + SP - U}{\frac{2}{\tan\gamma} + \frac{2}{\tan\gamma'}} \tag{3.11}$$

$$\phi = W - \frac{2d}{\tan\gamma'} \tag{3.12}$$

Se puede observar de las ecuaciones anteriores, que para calcular la distancia del objeto al plano de observación, así como el diámetro del objeto que la produce, basta únicamente conocer la separación de las fuentes luminosas (D) y la distancia de las fuentes luminosas al plano de observación.

3.4 La interfaz gráfica.

Una vez establecido el modelo matemático que correlaciona la distancia del objeto con la penumbra, se diseñó una interfaz gráfica que mediante la manipulación de las imágenes obtenidas, calcula la distancia y diámetro de diferentes objetos.

Esta interfaz gráfica se diseñó mediante el programa MATLAB versión 6.0 el cual, es una poderosa herramienta de computo y desarrollo de aplicaciones, diseñado para llevar a cabo proyectos en donde se encuentren implicados elevados cálculos matemáticos y la visualización gráfica de los mismos. MATLAB integra análisis numérico, cálculo matricial, procesamiento de señales y visualización gráfica, así como un conjunto de herramientas complementarias de procesamiento de imágenes.

Estas herramientas, permitieron desarrollar un programa que ejecuta los procesos y cálculos necesarios para implementar el sistema, como se muestra en la figura 3.21:

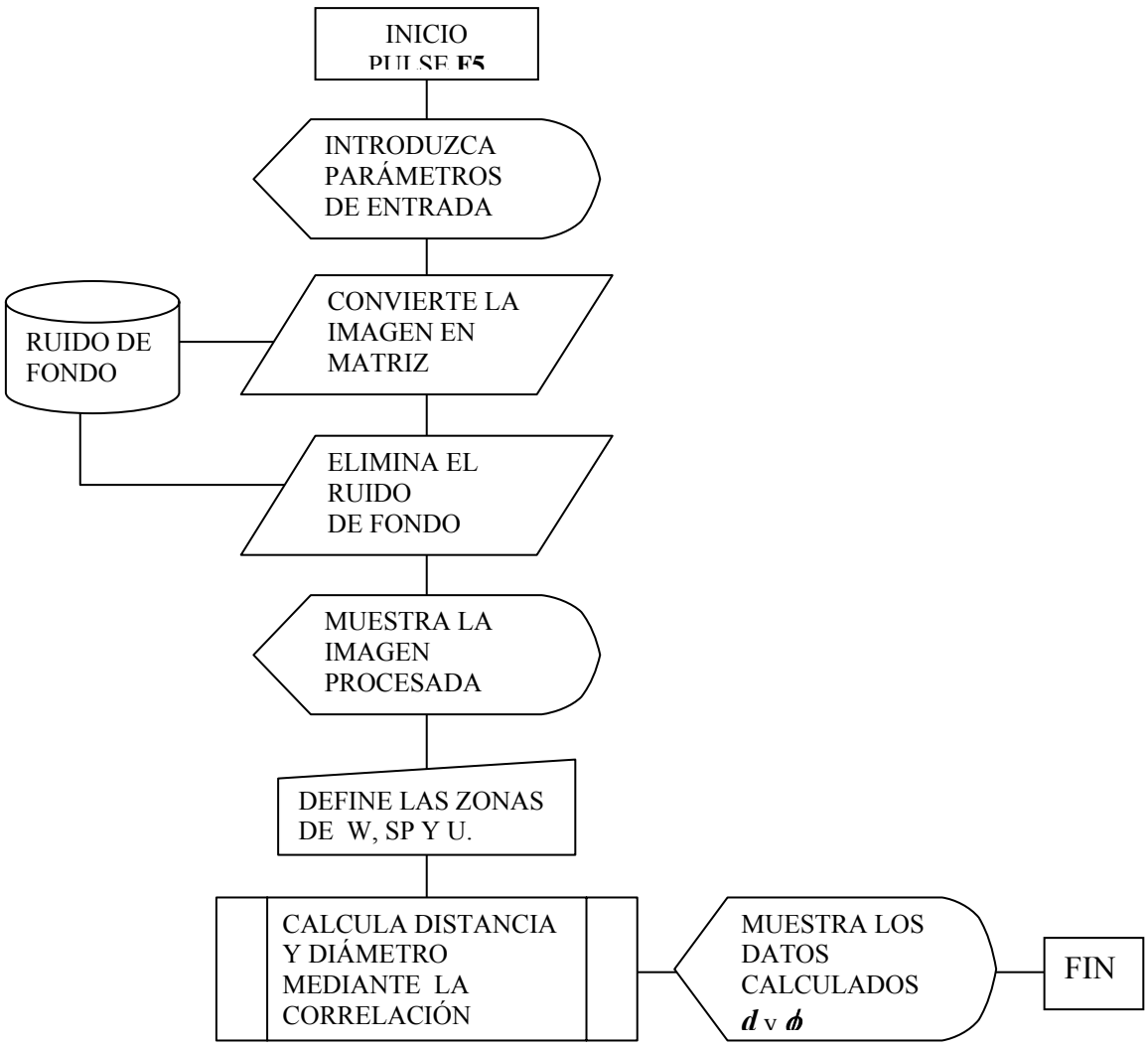


Figura 3.21 Diagrama de flujo de la interfaz gráfica.

Finalmente, mediante el programa desarrollado que se muestra en el apéndice A, se implementó la interfaz de usuario que se describe en el siguiente apartado.

3.4.1 Guía de usuario.

PENUMBRA Ver 1.0

El presente programa realiza los cálculos matemáticos y de procesamiento digital con imágenes de la penumbra que previamente hallan sido capturadas con la cámara CCD, y devuelve la distancia del objeto al plano de observación, así como el diámetro del objeto, con una precisión de 0.1 mm.

Requerimientos del programa:

- Las imágenes ha analizar, deben tener extensión *.tif.
- Es necesario que la resolución horizontal de la imagen sea de 192 pixeles, de lo contrario será necesario modificar en el programa la línea correspondiente al campo de visión.
- Estas imágenes deben estar en el mismo directorio en el que se encuentre el programa.
- El nombre del programa desarrollado es PENUMBRA.M
- Para poder ejecutar el programa, es necesario contar con MATLAB versión 6.0 o superior, y además tener instaladas las herramientas de procesamiento de imágenes.
- La versión de MATLAB 6.0 requiere al menos de WINDOWS 98, y 128 MB mínimo de memoria RAM.

Instrucciones para uso del programa:

1. Ejecutar el programa MATLAB.
2. Dar doble clic sobre el icono correspondiente al programa PENUMBRA.M.
3. Presionar la tecla **F5** para ejecutar el programa.

4. Al iniciar el programa, se deberá introducir algunos parámetros de entrada, como el nombre de la imagen que se desea analizar, así como el nombre de la imagen que contiene el ruido de fondo. Sin embargo el programa de inicio asigna valores preestablecidos, los cuales pueden ser modificados, como se muestra en la figura 3.22:

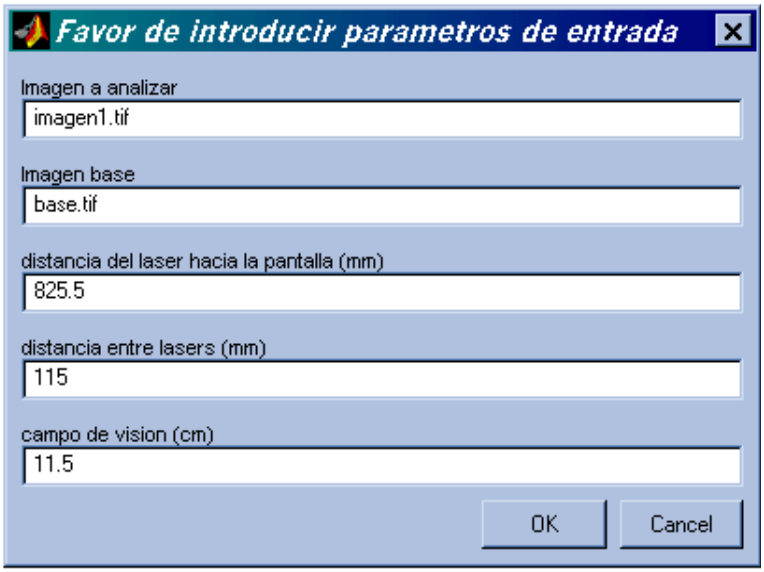


Figura 3.22 Entrada de datos al programa.

5. Una vez introducidos los parámetros de entrada, el programa procesará las imágenes eliminando el ruido de fondo de la imagen a analizar, mediante la ecuación 3.1.

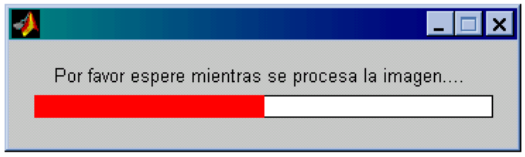
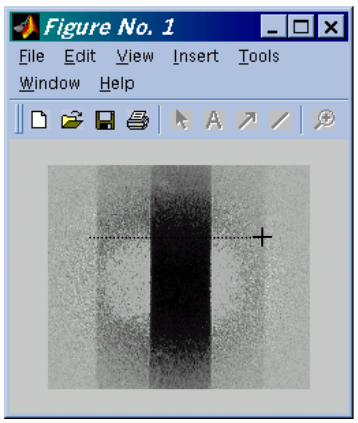
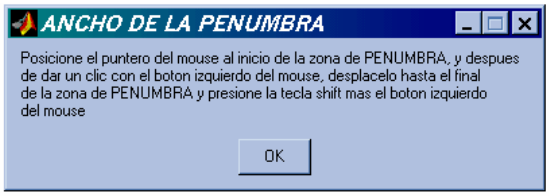


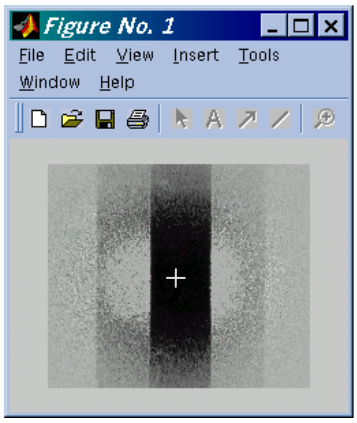
Figura 3.23 Procesamiento digital de la imagen.

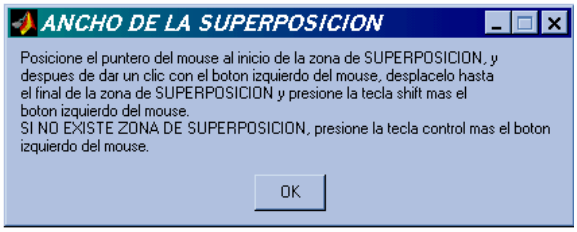
6. Al finalizar el proceso, se mostrará la imagen en pantalla y se pedirá reconocer manualmente las diferentes zonas de penumbra, umbra y superposición, como se observa en la figura 3.24:



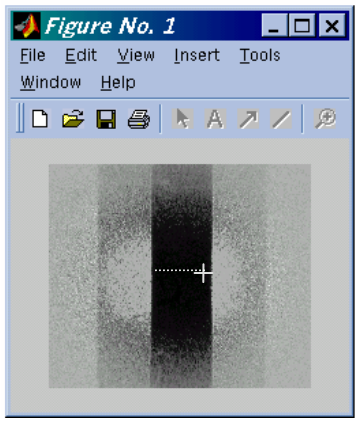


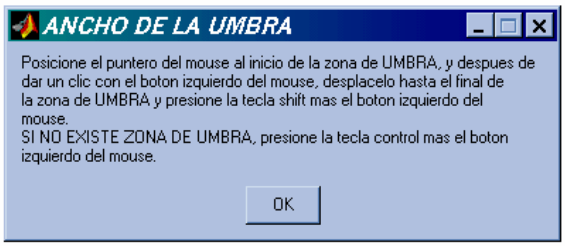
(1a) (1b)





(2a) (2b)

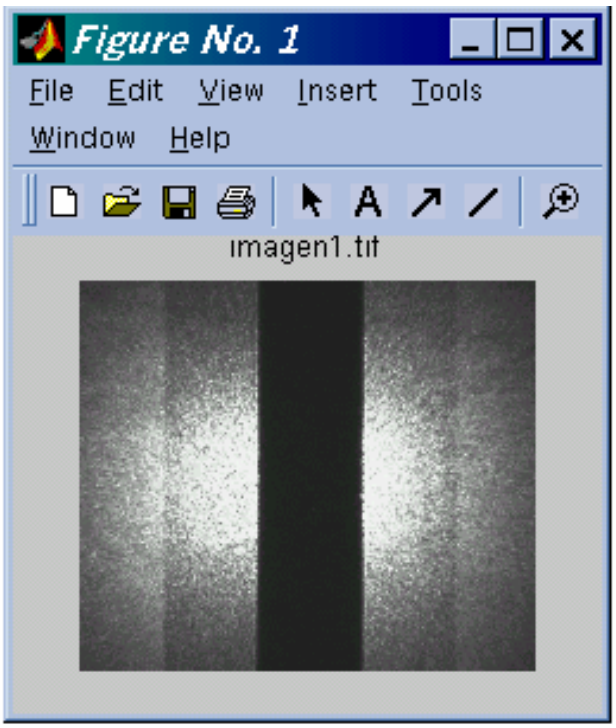




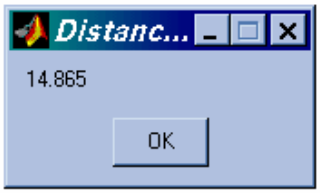
(3a) (3b)

Figura 3.24 En 1a figura (1a), (2a) y (3a), el usuario reconoce la zona de penumbra, superposición y umbra, y en (1b), (2b) y (3b) el programa proporciona ayuda al usuario.

7. Finalmente, una vez que se reconocieron las diferentes zonas, el programa calcula la distancia y diámetro del objeto mediante las ecuaciones 3.10, 3.11 y 3.12 previamente programadas, y regresa los valores calculados, así como muestra la imagen original, como se observa en la figura 3.25:



(a)



(b) (c)

Figura 3.25 En 1a figura (a) se muestra la imagen original, y en (b) y (c) se despliegan los valores calculados.

8. Por último si se desea ejecutar nuevamente el programa, solo presione la tecla F5