Capítulo 5

Transformada de Fourier

5.1 Introducción

La transformada de Fourier se ha convertido en los últimos años en una herramienta de análisis muy utilizada en el campo de la ingeniería. Entre sus muchas aplicaciones se pueden mencionar la acústica, la biomédica, el electromagnetismo, las comunicaciones, o el procesamiento de señales, que es el campo en que se utilizó en este proyecto. La transformada de Fourier, como su nombre lo indica, transforma una señal representada en el dominio del tiempo a una señal representada en el dominio de la frecuencia, esto sin alterar su contenido de información.

Comprender y utilizar los algoritmos de traspaso de una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia es muy importante para posteriormente obtener los parámetros básicos a partir de los cuales se podrán realizar espectrogramas de sonidos. Puesto que la transformada de Fourier se utilizó en métodos y algoritmos computables, la presente explicación se encontrará enfocada al punto de vista referente a la señal discreta.

5.2 Conceptos básicos

Para explicar el funcionamiento de la transformada de Fourier, se comenzará a partir de su formulación básica explicando los conceptos fundamentales de la misma.

La fórmula para la transformada de Fourier se presenta a continuación:

$$F\left(\frac{n}{NT}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} m(kT)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \qquad n=0,1,\ldots,N-1 \qquad \textbf{(1)}$$

donde ‘N’ es el número de muestras de la ventana que se va a analizar, ‘T’ es el periódo de muestreo (inverso a la frecuencia de muestreo que se denomina ‘*f*’), ‘n’ es el índice de la frecuencia cuyo valor queremos obtener y ‘m(kT)’ indica la muestra tomada en el instante ‘kT’ (muestra késima) de la ventana. La figura 5.1 ilustra de manera gráfica lo arriba mencionado.

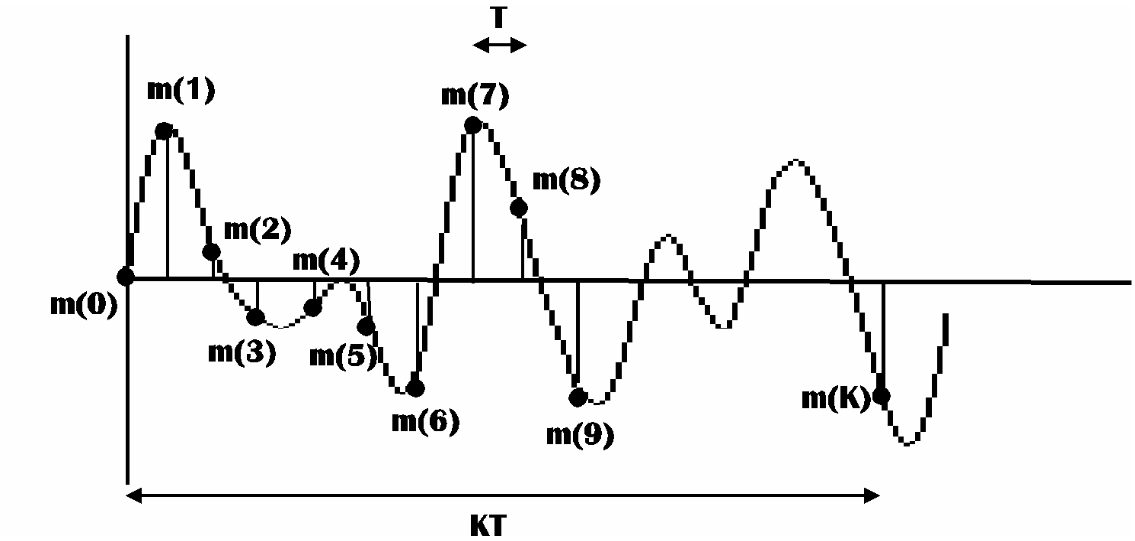

Figura 5.1.Señal analógica muestreada. Fuente: [7]

El valor de ‘n’ determina la frecuencia concreta que se va a analizar, es decir, representa una de las frecuencias en las que se va a descomponer la señal analógica.

Desarrollando la ecuación **(1)** podemos obtener los siguientes valores:

$$n = 0 \Rightarrow F(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} m(kT) * e^{0}$$

$$n = 1 \Rightarrow F\left(\frac{1}{N} f\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} m(kT) * e^{-j2\pi\frac{k}{N}}$$

$$n = 2 \Rightarrow F\left(\frac{2}{N} f\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} m(kT) * e^{-j4\pi\frac{k}{N}}$$

.

$$n = N-1 \Rightarrow F\left(\frac{N-1}{N} f\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} m(kT) * e^{-j2(N-1)\pi\frac{k}{N}}$$

Observando las ecuaciones anteriores se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- Aumentando el valor de ‘N’ se lleva a cabo un análisis con mayor número de frecuencias pero a costa de mayor tiempo de cómputo.
- El parámetro ‘n’ actúa como índice para obtener las distintas frecuencias de estudio.
- La porción de la señal que se analiza se encuentra en el bloque de muestras m(0), m(1), m(2), …, m(N-1), debido a la sumatoria $\sum_{k=0}^{N-1} m(kT) * ...$
- Los valores n=1 →2π, n=2→4π, …, n=N-1→2(N-1)π, indican las frecuencias de las señales analógicas (sinusoidales o cosenoidales) con las que se comparara la señal original.

5.3 Propiedades Fundamentales de la Transformada de Fourier

La transformada de Fourier se emplea con señales periódicas a diferencia de la serie de Fourier y se puede definir como:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

donde X(f) es una función compleja tal que:

$$X(f) = R(f) + jI(f) = |X(f)| e^{j\varphi(f)}$$

A partir de la señal en el dominio de la frecuencia se puede aplicar la transformada Inversa de Fourier para reconstruir la señal en el dominio del tiempo, de la cual fue extraída. La transformada Inversa se muestra a continuación:

$$X(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt$$

Las propiedades de la Transformada de Fourier se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Linealidad, si dos funciones x(t) y y(t) tienen una transformada X(f) y Y(f), entonces la suma de ambas tiene como transformada a X(f)+Y(f).
- Simetría, si X(f) es la transformada de x(t)m la transformada de X(t) es x(-f).
- Escalado en el tiempo y en frecuencia, realizando un escalado de t mediante k la transformada es. $x(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)$. Igualmente para el caso de la escalación e frecuencia.
- Desplazamiento en tiempo y frecuencia. Desplazando la frecuencia con la constante f0, la transformada inversa queda: $x(t)e^{-j2\pi f_0} \Leftrightarrow X\left(f - f_0\right)$
- Convolución: La operación de convolución entre dos funciones se define como $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$.

5.4 Transformada discreta de Fourier[12]

La Transformada de Fourier es una herramienta sumamente útil, cuando se quiere trabajar con modelos matemáticos, pero si se trata de señales físicas reales o en sistemas de computación es menester discretizar la señal.

Para llevar a cabo dicha discretización se debe muestrear la señal, esto es, multiplicarla por un tren de deltas:

$$x(t)\delta(t-T) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) = x[nT],$$

donde T es el periodo de muestreo y x[nT] es una secuencia infinita de impulsos equidistantes con una amplitud correspondiente al valor de x(t). Sin embargo, resulta imposible tomar una infinidad de muestras, por lo que se limita el número de muestras, o dicho de otra forma, aplicamos una ventana temporal, donde solo son procesadas aquellas muestras que se encuentran dentro de dicha ventana. Para evitar solapamientos se utiliza el criterio de Nyquist que dice que se debe muestrear a más del doble del ancho de banda de la señal original.

Aunque se haya aplicado una ventana, siguen existiendo infinidad de muestras las cuales adquieren un valor de cero al no estar dentro de la ventana, obteniendo así un espectro continuo.

La Transformada discreta de Fourier se define como:

$$G\left(\frac{h}{NT}\right) = \sum g(nT)e^{\frac{-j2\pi hn}{N}}, \qquad h=0,1,\ldots,N-1 \qquad \textbf{(2)}$$

$$g(nT) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{h}{NT}\right)e^{\frac{j2\pi hn}{N}}, \qquad h=0,1,\ldots,N-1$$

donde T es el periodo de muestreo de la señal original, N es el número de puntos que se toman, h es la variable índice de frecuencias y n es la variable índice de las muestras.

La Transformada discreta de Fourier presenta las siguientes propiedades:

- Linealidad: $x(n) + y(n) \Leftrightarrow X(h) + Y(h)$
- Simetría: $\frac{1}{N}X(n) \Leftrightarrow x(-h)$
- Desplazamiento temporal: $x(n-i) \Leftrightarrow X(h)e^{\frac{-j2\pi hi}{N}}$.
- Desplazamiento en frecuencia: $x(n)e^{\frac{-j2\pi hi}{N}} \Leftrightarrow X(h-i)$
- Funciones pares: $X(h) = R(h)$.
- Funciones impares: $X(h) = jI(h)$.

5.5 Transformada rápida de Fourier (FFT)

La transformada rápida de Fourier es un algoritmo que resuelve de una manera más eficiente la transformada discreta de Fourier, definida en la ecuación **(2)**.

Para facilitar la connotación se cambiará el término $e^{\frac{-j2\pi hn}{N}}$ por W^{hn}, *g(nT)* por *g(n)* y *G(h/NT)* por *G(h)*, luego entonces definiremos la ecuación **(3)** como sigue:

$$G(h) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W^{hn} \qquad \textbf{(3)}$$

al desarrollar esta expresión y representándola en forma matricial se obtiene:

Para N=4,

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

como se habrá notado la complejidad para la solución de la ecuación **(4)** es de N^2 multiplicaciones y N(N-1) sumas. La FFT es un algoritmo que reduce considerablemente el numero de multiplicaciones y sumas que se requieren para resolver la ecuación **(4),** como podremos observar en los siguientes pasos.

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5)}$$

La clave de la transformada rápida de Fourier en que la matriz de la ecuación (5) puede ser desarrollada y presentarse como producto de 2 matrices, por lo que la complejidad queda reducida significativamente. La ecuación (5) presentada como producto de 2 matrices queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

Para calcular el número de operaciones necesario utilizamos la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \\ g_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

donde los elementos $g_1(0)$ y $g_1(2)$ se calculan mediante:

$g_1(0)=g(0)+W^0g(2)$

$g_1(2)=g(0)-W^0g(2)$

ya que $W^2=-W^{0.}$ Como se habrá podido observar para calcular los dos elementos es necesario llevar a cabo una multiplicación y dos sumas, luego entonces se puede concluir que para calcular $g_1(1)$ y $g_1(3)$ se realizan igual número de operaciones. Entonces para resolver la ecuación (7) se requieren 2 multiplicaciones y cuatro sumas. De la misma manera se puede resolver la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} g_2(0) \\ g_2(1) \\ g_2(2) \\ g_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \\ g_1(3) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8)}$$

Entonces si analizamos de nuevo la ecuación (6) concluimos que para resolverla se requieren un total de 4 multiplicaciones y ocho sumas. Concluimos que si queremos resolver el sistema utilizando la FFT el costo de calculo se reduce significativamente, puesto que el orden O(N $\log_2$ N) es mucho más complejo que el orden de la FFT que es O(N^2).

Esto indica que la transformada rápida de Fourier es una herramienta muy ventajosa para resolver sistemas de reconocimiento de voz.

Ahora que se han observado todas las herramientas necesarias, el lector observará en los próximos capítulos el proceso que se llevo a cabo para lograr el presente proyecto.