

CAPÍTULO 5. ESPACIO DE TRABAJO DEL ROBOT PARALELO

En esta sección se describe el espacio de trabajo del robot paralelo:

- Se analiza el espacio de trabajo del robot definido por las limitantes geométricas del mecanismo, obteniéndose así una función implícita que define un volumen tridimensional dentro del cual el análisis de posicionamiento es válido.
- Así mismo, también se analiza el espacio de trabajo del robot definido por las limitantes mecánicas del robot; específicamente, los límites de giro impuestos por las articulaciones esféricas.

5.1. Limitantes geométricas

Se considera la expresión para la cinemática inversa del robot reportada en la ecuación (4-18). Existe solución para esta ecuación cuando para el ángulo de interés se obtienen resultados reales.

El dominio de $\tan^{-1}(x)$ son todos los números reales, no así el de $\cos^{-1}(x)$, en el que el dominio de la función se encuentra entre -1 y 1, tal y como se puede observar en la gráfica de estas funciones presentada en la Figura 5.1:

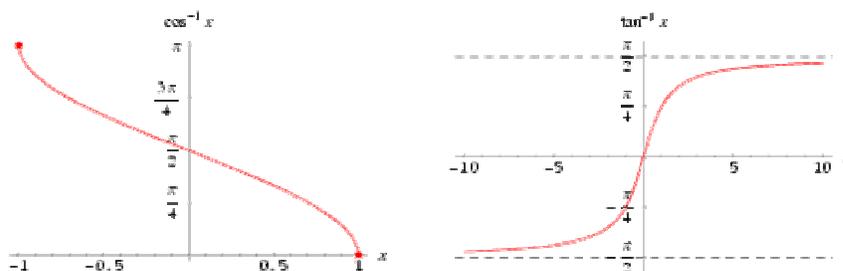


Figura 5.1. Gráfica para $\cos^{-1}(x)$ (a la izquierda) y para $\tan^{-1}(x)$ (a la derecha)

Es decir, que la función que restringe los valores que deben adoptar las constantes A_i , B_i y C_i en la ecuación (4-18) es precisamente la de $\cos^{-1}(x)$. Aprovechando este hecho es posible derivar la expresión para el espacio de trabajo buscada:

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \frac{C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} \leq 1 \\
\frac{|C_i|}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} &\leq 1 \\
A_i^2 + B_i^2 &\geq C_i^2 \\
C_i^2 - A_i^2 - B_i^2 &\leq 0
\end{aligned} \tag{5-1}$$

Así, para saber si una localización para la plataforma es válida dentro del espacio de trabajo definido por las limitantes geométricas, basta con sustituir valores en la expresión anterior para cada brazo del robot y verificar que el resultado en efecto sea menor o igual a cero para los seis brazos. Basta con que no se cumpla la inecuación para un solo brazo para que la localización especificada no se encuentre dentro del espacio de trabajo.

De igual forma, la inecuación (5-1) puede considerarse la definición de un volumen o un sólido, siendo la superficie que lo envuelve la frontera del espacio de trabajo correspondiente a cada brazo. Esta superficie queda definida por la función implícita f_i mostrada en la ecuación (5-2):

$$f_i = C_i^2 - A_i^2 - B_i^2 = 0 \tag{5-2}$$

El volumen que representa el espacio de trabajo total de la plataforma resulta de la intersección (\cap) del volumen correspondiente al espacio de trabajo para cada brazo, siendo necesario para su representación la utilización de la llamada Geometría Sólida Constructiva (CSG, del inglés “*Constructive Solid Geometry*”):

Ésta se usa para construir objetos complejos a partir de otros más primitivos como cubos, esferas, cilindros y conos mediante operaciones de teoría de conjuntos: unión (\cup), intersección (\cap) y substracción (\setminus). Las superficies implícitas generalizan esta idea al representar objetos a partir de su función implícita y mediante la definición de operaciones de teoría de conjuntos como parte de la función. Esto último se puede lograr de varias maneras, siendo una de ellas el método Ricci. En este método las operaciones de unión, intersección y substracción se implementan como se muestra en la ecuación (5-3) [11]:

$$\begin{aligned}
f_1 \cup f_2 &= \min(f_1, f_2) \\
f_1 \cap f_2 &= \max(f_1, f_2) \\
f_1 \setminus f_2 &= f_1 \cap -f_2
\end{aligned} \tag{5-3}$$

De esta forma, la superficie que envuelve la frontera del espacio de trabajo de la plataforma está definida mediante la siguiente función, que hace uso de la ecuación (5-2):

$$f_p = \max(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \quad (5-4)$$

5.2. Limitantes mecánicas

Las limitantes mecánicas del robot se deben a las restricciones de giro impuestas por las articulaciones esféricas, las cuales fueron consideradas como ideales al analizar las limitantes geométricas. Dichas limitantes restringen aún más el espacio de trabajo siendo preciso también determinar si la localización deseada de la plataforma forzará las piezas mecánicas del robot o no, para así evitar deformaciones o fracturas.

Las articulaciones esféricas son implementadas como una rótula y un aro que gira sobre ella. La rótula de la articulación esférica ubicada entre los eslabones de la extremidad (identificada como Q) se encuentra conectada al eslabón de entrada, mientras que la ubicada entre la extremidad y la plataforma (identificada como T) se encuentra conectada a esta última. Ambos aros se encuentran conectados al eslabón de acoplamiento (ver planos en el APÉNDICE B).

Las restricciones de giro en las articulaciones esféricas se deben al eje que conecta a las rótulas con el eslabón de entrada o la plataforma, pues las atraviesa por el diámetro. Este eje impide que el aro gire con completa libertad (ver Figura 5.2).

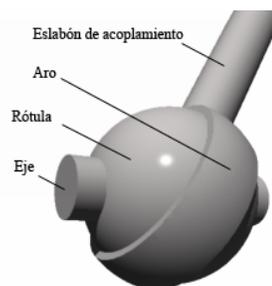


Figura 5.2. Implementación de la articulación rotacional

Para analizar esta restricción es necesario primero expresar la orientación de las rótulas y los aros con respecto al marco de referencia dada una localización de la plataforma.

5.2.1. Orientación de las rótulas

Con respecto a las rótulas se considera que el sistema coordenado está colocado de manera que el eje X es colineal al eje de la rótula y el eje Z es perpendicular ya sea a la base o a la plataforma. La orientación del eje Y se determina con la regla de la mano derecha. Se definen entonces vectores unitarios sobre estos ejes como se muestra en la Figura 5.3:

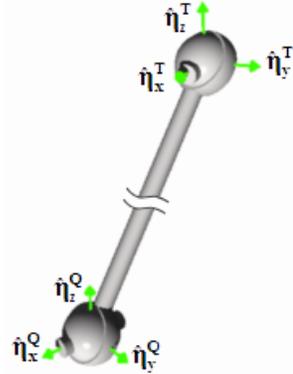


Figura 5.3. Definición de la orientación de las rótulas

El eje X de cada rótula Q coincide con el eje X de cada sistema coordenado $\{A_i\}$, tal y como se define en la Figura 4.2 y la Tabla 4-1 para cada extremidad, siendo aplicable la transformación \mathbf{T}_{A_i} especificada en la ecuación (4-5) para definir sus vectores unitarios.

Para ello se utiliza la componente rotacional $\mathbf{R}_{z,\sigma}$ de dicha transformación:

$$\begin{aligned}\hat{n}_x^Q &= \mathbf{R}_{z,\sigma} \cdot \mathbf{i} = [\cos \sigma_i \quad \sin \sigma_i \quad 0]^T \\ \hat{n}_y^Q &= \mathbf{R}_{z,\sigma} \cdot \mathbf{j} = [-\sin \sigma_i \quad \cos \sigma_i \quad 0]^T \\ \hat{n}_z^Q &= \mathbf{R}_{z,\sigma} \cdot \mathbf{k} = [0 \quad 0 \quad 1]^T\end{aligned}\tag{5-5}$$

Estos vectores unitarios no cambian con la configuración del robot, no así los correspondientes a las rótulas T . Su orientación depende tanto del vértice sobre el cual están colocadas como de la orientación de la plataforma. Considerando que el eje de cada una de estas rótulas posee la misma orientación que su correspondiente ubicado en la base (Figura 5.4) cuando la plataforma no ha sido rotada, es posible hacer uso de resultados presentados en la expresión (5-5) y de la matriz de rotación de la plataforma $\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma}$ especificada en la ecuación (3-13).

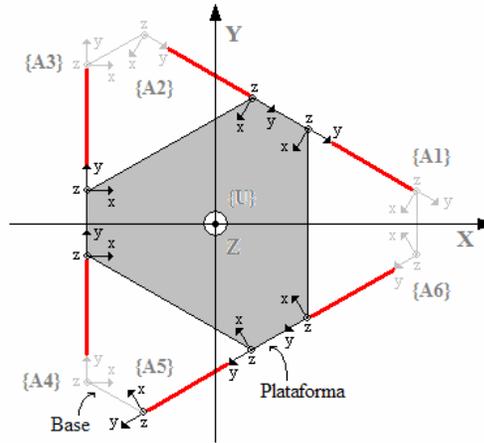


Figura 5.4. Sistemas coordenados para los ejes de las rótulas Q y T

De esta forma los vectores unitarios para las rótulas T quedan expresados como:

$$\begin{aligned}
 \hat{n}_x^T &= \mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} \cdot \hat{n}_x^Q = \begin{bmatrix} \cos \sigma (\cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \sin \sigma (-\cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) \\ \cos \sigma (\cos \alpha \sin \gamma) + \sin \sigma (\cos \alpha \cos \gamma) \\ \cos \sigma (-\sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma) + \sin \sigma (\sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma) \end{bmatrix} \\
 \hat{n}_y^T &= \mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} \cdot \hat{n}_y^Q = \begin{bmatrix} -\sin \sigma (\cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \cos \sigma (-\cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) \\ -\sin \sigma (\cos \alpha \sin \gamma) + \cos \sigma (\cos \alpha \cos \gamma) \\ -\sin \sigma (-\sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma) + \cos \sigma (\sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma) \end{bmatrix} \\
 \hat{n}_z^T &= \mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} \cdot \hat{n}_z^Q = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5-6}$$

5.2.2. Orientación del eslabón de acoplamiento

Para especificar la orientación del eslabón de acoplamiento se definen tres ángulos según el esquema mostrado en la Figura 5.5:

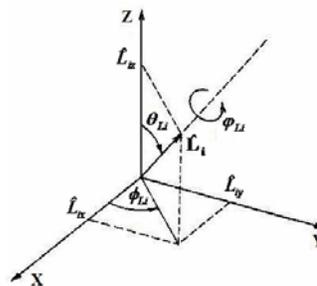


Figura 5.5. Esquema de orientación para el eslabón de acoplamiento

La ecuación (4-9) define el vector \mathbf{L}_i correspondiente al eslabón de acoplamiento. Los ángulos θ_{Li} y ϕ_{Li} se obtienen a partir del vector unitario correspondiente mediante:

$$\hat{\mathbf{L}}_i = \frac{1}{L} \mathbf{L}_i, \quad \theta_{Li} = \cos^{-1}(\hat{L}_{iz}), \quad \phi_{Li} = \tan^{-1}(\hat{L}_{iy}/\hat{L}_{ix}) \quad (5-7)$$

La respectiva matriz de rotación se obtiene rotando dicho vector unitario primero sobre Y un ángulo θ_{Li} y luego sobre Z un ángulo ϕ_{Li} . Finalmente se efectúa una rotación sobre este vector unitario un ángulo φ_{Li} , el cual representa la incógnita del análisis. Así:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{L}_i, \varphi_{Li}} = (\mathbf{R}_{\mathbf{Z}, \phi_{Li}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{Y}, \theta_{Li}}) \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{Z}, \varphi_{Li}}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{L}_i, \varphi_{Li}} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{Li} & -\sin \phi_{Li} & 0 \\ \sin \phi_{Li} & \cos \phi_{Li} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{Li} & 0 & \sin \theta_{Li} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{Li} & 0 & \cos \theta_{Li} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_{Li} & -\sin \varphi_{Li} & 0 \\ \sin \varphi_{Li} & \cos \varphi_{Li} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{L}_i, \varphi_{Li}} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{Li} \cos \theta_{Li} \cos \varphi_{Li} - \sin \phi_{Li} \sin \varphi_{Li} & -\cos \phi_{Li} \cos \theta_{Li} \sin \varphi_{Li} - \sin \phi_{Li} \cos \varphi_{Li} & \cos \phi_{Li} \sin \theta_{Li} \\ \sin \phi_{Li} \cos \theta_{Li} \cos \varphi_{Li} + \cos \phi_{Li} \sin \varphi_{Li} & -\sin \phi_{Li} \cos \theta_{Li} \sin \varphi_{Li} + \cos \phi_{Li} \cos \varphi_{Li} & \sin \phi_{Li} \sin \theta_{Li} \\ -\sin \theta_{Li} \cos \varphi_{Li} & \sin \theta_{Li} \sin \varphi_{Li} & \cos \theta_{Li} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

5.2.3. Orientación de los aros

La orientación del eslabón de acoplamiento debe ser la misma que la de los aros ubicados a sus extremos. Dichos aros pueden describirse matemáticamente como una función vectorial que describe una trayectoria, de acuerdo a la Figura 5.6:

$$\mathbf{c}_i(\lambda_i) = [0 \quad r \cos \lambda_i \quad r \sin \lambda_i]^T \quad (5-9)$$

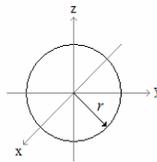


Figura 5.6. Descripción matemática de la trayectoria que define cada aro

Rotando dicha trayectoria mediante la matriz de rotación definida en la ecuación (5-8) queda orientada igual que el eslabón de acoplamiento y definida en $\{U\}$:

$${}^U \mathbf{c}_i(\lambda_i) = \mathbf{R}_{\mathbf{L}_i, \varphi_i} \cdot \mathbf{c}_i(\lambda_i) = r \begin{bmatrix} \cos \lambda_i (-\cos \phi_{Li} \cos \theta_{Li} \sin \varphi_{Li} - \sin \phi_{Li} \cos \varphi_{Li}) + \sin \lambda_i (\cos \phi_{Li} \sin \theta_{Li}) \\ \cos \lambda_i (-\sin \phi_{Li} \cos \theta_{Li} \sin \varphi_{Li} + \cos \phi_{Li} \cos \varphi_{Li}) + \sin \lambda_i (\sin \phi_{Li} \sin \theta_{Li}) \\ \cos \lambda_i (\sin \theta_{Li} \sin \varphi_{Li}) + \sin \lambda_i (\cos \theta_{Li}) \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

Una vez obtenida la orientación de los aros se analiza la restricción impuesta por la existencia del eje que atraviesa la rótula. Para ello es necesario encontrar una manera de definir matemáticamente dicha restricción:

Se define otra trayectoria para la intersección del eje con la superficie de la esfera que simboliza la rótula para así representar la restricción como un problema de intersección de trayectorias. Sin embargo, el aro aunque descrito por una línea realmente tiene un determinado ancho, por lo que el límite de giro realmente se da cuando la trayectoria del aro toca una trayectoria “efectiva” del eje, tal y como se visualiza en la Figura 5.7:

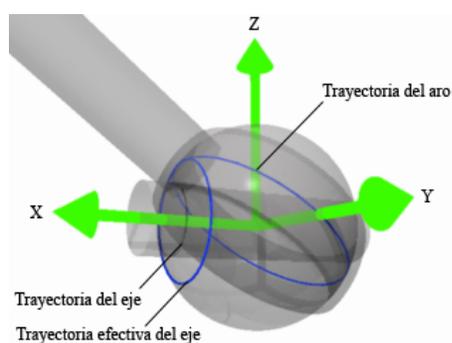


Figura 5.7. La restricción de giro en la rótula

La trayectoria efectiva del eje se describe matemáticamente con respecto al marco de referencia de la rótula de acuerdo a la Figura 5.8, en la que se introduce un ángulo denominado como el máximo ángulo para el giro del aro sobre la rótula (ψ):

$$\mathbf{e}_i(\xi_i) = [r \cos \psi \quad r \sin \psi \cos \xi_i \quad r \sin \psi \sin \xi_i]^T \quad (5-11)$$

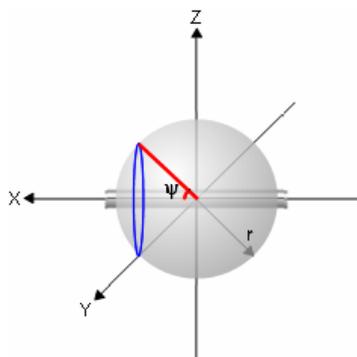


Figura 5.8. Descripción matemática de la trayectoria efectiva del eje

5.2.4. Descripción matemática de la restricción de giro

Matemáticamente la restricción queda expresada por la intersección de $\mathbf{c}_i(\lambda_i)$ y $\mathbf{e}_i(\xi_i)$. Si ésta existe en al menos un punto el aro se encuentra en una configuración inválida, pues se traslaparía con el eje. Así, la intersección, si existe, puede encontrarse igualando ambas trayectorias, que deben estar expresadas en el mismo marco de referencia. Para ello existen dos posibilidades: describir $\mathbf{c}_i(\lambda_i)$ en el marco de referencia de $\mathbf{e}_i(\xi_i)$ o viceversa:

Tanto $\mathbf{c}_i(\lambda_i)$ como $\mathbf{e}_i(\xi_i)$ se encuentran en función de un parámetro que no puede quedar como variable en la expresión final buscada. Si se expresa $\mathbf{c}_i(\lambda_i)$ en el marco de referencia de $\mathbf{e}_i(\xi_i)$ es posible igualar las componentes en X , pues esta componente en $\mathbf{e}_i(\xi_i)$ no está en función de ξ_i , aunque para $\mathbf{c}_i(\lambda_i)$ no sea el caso. En cambio, si se expresa $\mathbf{e}_i(\xi_i)$ en el marco de referencia de $\mathbf{c}_i(\lambda_i)$, todas sus componentes quedarán en función de ξ_i , pues el círculo ya no será paralelo al plano YZ , al igual que $\mathbf{c}_i(\lambda_i)$, el cual no es paralelo a ningún plano del sistema coordenado. Por ello se prefiere describir $\mathbf{c}_i(\lambda_i)$ en el marco de referencia de $\mathbf{e}_i(\xi_i)$:

Para las rótulas Q , el mapeo del marco de referencia de la rótula $\{RQ_i\}$ al marco de referencia $\{U\}$ se realiza mediante la matriz de rotación $\mathbf{R}_{z,\sigma}$ (recordando los resultados de la ecuación (5-5)), de manera que si en la ecuación (5-10) se define la trayectoria en $\{U\}$ y se desea expresarla en $\{RQ_i\}$, se debe emplear la transpuesta de $\mathbf{R}_{z,\sigma}$:

$$\begin{aligned} {}^U \mathbf{c}_i(\lambda_i) &= \mathbf{R}_{z,\sigma} \cdot {}^{RQ_i} \mathbf{c}_i(\lambda_i) \\ {}^{RQ_i} \mathbf{c}_i(\lambda_i) &= \mathbf{R}_{z,\sigma}^{-1} \cdot {}^U \mathbf{c}_i(\lambda_i) = \mathbf{R}_{z,\sigma}^T \cdot {}^U \mathbf{c}_i(\lambda_i) \end{aligned}$$

$${}^{RQ_i} \mathbf{c}_i(\lambda_i) = r \begin{bmatrix} \cos \lambda_i \begin{pmatrix} -\cos \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \sin \varphi_{L_i} \cos \sigma_i - \sin \phi_{L_i} \cos \varphi_{L_i} \cos \sigma_i \\ -\sin \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \sin \varphi_{L_i} \sin \sigma_i + \cos \phi_{L_i} \cos \varphi_{L_i} \sin \sigma_i \end{pmatrix} + \sin \lambda_i \begin{pmatrix} \cos \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \cos \sigma_i + \\ \sin \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \sin \sigma_i \end{pmatrix} \\ \cos \lambda_i \begin{pmatrix} \cos \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \sin \varphi_{L_i} \sin \sigma_i + \sin \phi_{L_i} \cos \varphi_{L_i} \sin \sigma_i \\ -\sin \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \sin \varphi_{L_i} \cos \sigma_i + \cos \phi_{L_i} \cos \varphi_{L_i} \cos \sigma_i \end{pmatrix} + \sin \lambda_i \begin{pmatrix} -\cos \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \sin \sigma_i + \\ \sin \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \cos \sigma_i \end{pmatrix} \\ \cos \lambda_i (\sin \theta_{L_i} \sin \varphi_{L_i}) + \sin \lambda_i (\cos \theta_{L_i}) \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

Para las rótulas T , el mapeo del marco de referencia de la rótula $\{RT_i\}$ al marco de referencia $\{U\}$ se realiza mediante la matriz de rotación resultante de la multiplicación de $\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma}$ y $\mathbf{R}_{z,\sigma}$ (recordando los resultados presentados en la ecuación (5-6)), de manera que si se desea realizar el mapeo contrario se emplea la transpuesta de dicha matriz de rotación:

$$\begin{aligned}
A_{RQ_i} &= \sin \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \sin \sigma_i + \cos \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \cos \sigma_i \\
B_{sRQ_i} &= -\sin \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \sin \sigma_i - \cos \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \cos \sigma_i \\
B_{cRQ_i} &= -\sin \phi_{L_i} \cos \sigma_i + \cos \phi_{L_i} \sin \sigma_i \\
C_{RQ_i} &= \cos \psi
\end{aligned} \tag{5-16}$$

Quedando la ecuación (5-15) expresada como:

$$A_{RQ_i} \sin \lambda_i + (B_{sRQ_i} \sin \varphi_{L_i} + B_{cRQ_i} \cos \varphi_{L_i}) \cos \lambda_i = C_{RQ_i} \tag{5-17}$$

Para las rótulas T :

$$r \sin \lambda_i \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \cos \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \left(\begin{array}{l} \cos \beta \cos \gamma \cos \sigma_i + \\ \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \sigma_i \\ - \cos \beta \sin \gamma \sin \sigma_i + \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \sigma_i \end{array} \right) + \\ \left(\begin{array}{l} \sin \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \left(\begin{array}{l} \cos \alpha \sin \gamma \cos \sigma_i + \\ \cos \alpha \cos \gamma \sin \sigma_i \end{array} \right) + \\ \left(\begin{array}{l} \cos \theta_{L_i} \left(\begin{array}{l} - \sin \beta \cos \gamma \cos \sigma_i + \\ \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \sigma_i + \\ \sin \beta \sin \gamma \sin \sigma_i + \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \sigma_i \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) + \cos \lambda_i \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} - \cos \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \sin \varphi_{L_i} \left(\begin{array}{l} \cos \beta \cos \gamma \cos \sigma_i + \\ \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \sigma_i \\ - \cos \beta \sin \gamma \sin \sigma_i + \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \sigma_i \end{array} \right) + \\ \left(\begin{array}{l} - \sin \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \sin \varphi_{L_i} \left(\begin{array}{l} \cos \alpha \sin \gamma \cos \sigma_i + \\ \cos \alpha \cos \gamma \sin \sigma_i \end{array} \right) + \\ \left(\begin{array}{l} \sin \theta_{L_i} \sin \varphi_{L_i} \left(\begin{array}{l} - \sin \beta \cos \gamma \cos \sigma_i + \\ \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \sigma_i + \\ \sin \beta \sin \gamma \sin \sigma_i + \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \sigma_i \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) = r \cos \psi \tag{5-18}$$

Se definen las siguientes constantes:

$$\begin{aligned}
A_{RT_i} &= \left(\begin{array}{l} (\sin \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i}) (\cos \alpha \sin \gamma \cos \sigma_i + \cos \alpha \cos \gamma \sin \sigma_i) + \\ \cos \phi_{L_i} \sin \theta_{L_i} \left(\begin{array}{l} \cos \beta \cos \gamma \cos \sigma_i + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \sigma_i \\ - \cos \beta \sin \gamma \sin \sigma_i + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \sigma_i \end{array} \right) + \\ \cos \theta_{L_i} \left(\begin{array}{l} - \sin \beta \cos \gamma \cos \sigma_i + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \sigma_i + \\ \sin \beta \sin \gamma \sin \sigma_i + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \sigma_i \end{array} \right) \end{array} \right) \\
B_{sRT_i} &= \left(\begin{array}{l} \sin \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} (-(\cos \alpha \cos \gamma) \sin \sigma_i - (\cos \alpha \sin \gamma) \cos \sigma_i) + \\ \cos \phi_{L_i} \cos \theta_{L_i} \left(\begin{array}{l} (\cos \beta \sin \gamma) \sin \sigma_i - (\cos \beta \cos \gamma) \cos \sigma_i \\ - (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) \sin \sigma_i - (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \cos \sigma_i \end{array} \right) + \\ \sin \theta_{L_i} \left(\begin{array}{l} (\sin \beta \sin \gamma) \sin \sigma_i - (\sin \beta \cos \gamma) \cos \sigma_i + \\ (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma) \sin \sigma_i + (\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma) \cos \sigma_i \end{array} \right) \end{array} \right) \\
B_{cRT_i} &= \left(\begin{array}{l} \sin \phi_{L_i} \left(\begin{array}{l} (\cos \beta \sin \gamma) \sin \sigma_i - (\cos \beta \cos \gamma) \cos \sigma_i \\ - (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) \sin \sigma_i - (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \cos \sigma_i \end{array} \right) + \\ \cos \phi_{L_i} \left(\begin{array}{l} (\cos \alpha \sin \gamma) \cos \sigma_i + \\ (\cos \alpha \cos \gamma) \sin \sigma_i \end{array} \right) \end{array} \right) \\
C_{RT_i} &= \cos \psi
\end{aligned} \tag{5-19}$$

Quedando la ecuación (5-18) expresada como:

$$A_{RT_i} \sin \lambda_i + (B_{sRT_i} \sin \varphi_{L_i} + B_{cRT_i} \cos \varphi_{L_i}) \cos \lambda_i = C_{RT_i} \tag{5-20}$$

Se despeja el ángulo λ_i de las ecuaciones (5-17) y (5-20) haciendo uso de la identidad trigonométrica para la suma de seno y coseno (ver apéndice A.2):

$$\begin{aligned}
 A_{RX_i} \sin \lambda_i + (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li}) \cos \lambda_i &= C_{RX_i} \\
 \sqrt{A_{RX_i}^2 + (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li})^2} \cos \left(\lambda_i - \tan^{-1} \frac{A_{RX_i}}{B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li}} \right) &= C_{RX_i} \\
 \lambda_i = \cos^{-1} \left(\frac{C_{RX_i}}{\sqrt{A_{RX_i}^2 + (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li})^2}} \right) + \tan^{-1} \frac{A_{RX_i}}{B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li}} & \quad (5-21)
 \end{aligned}$$

Existe intersección de las trayectorias cuando la expresión anterior arroja un valor real; es decir, que el argumento de $\cos^{-1}(x)$ se encuentre entre -1 y 1:

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \frac{C_{RX_i}}{\sqrt{A_{RX_i}^2 + (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li})^2}} \leq 1 \\
 \frac{|C_{RX_i}|}{\sqrt{A_{RX_i}^2 + (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li})^2}} &\leq 1 \\
 A_{RX_i}^2 + (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li})^2 &\geq C_{RX_i}^2 \\
 A_{RX_i}^2 + (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li})^2 - C_{RX_i}^2 &\geq 0 \quad (5-22)
 \end{aligned}$$

En este caso es de interés que no exista dicha intersección, por lo que debe cumplirse:

$$C_{RX_i}^2 - A_{RX_i}^2 - (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li})^2 < 0 \quad (5-23)$$

Para resolver la inecuación (5-23) se analiza ésta como una igualdad haciendo uso de la identidad trigonométrica para la suma de seno y coseno, para así despejar el ángulo φ_{Li} :

$$\begin{aligned}
 C_{RX_i}^2 - A_{RX_i}^2 - (B_{sRX_i} \sin \varphi_{Li} + B_{cRX_i} \cos \varphi_{Li})^2 &= 0 \\
 C_{RX_i}^2 - A_{RX_i}^2 - \left(\sqrt{B_{sRX_i}^2 + B_{cRX_i}^2} \cos \left(\varphi_{Li} - \tan^{-1} \frac{B_{sRX_i}}{B_{cRX_i}} \right) \right)^2 &= 0 \quad (5-24)
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{Li} = \pm \cos^{-1} \left(\pm \sqrt{\frac{C_{RX_i}^2 - A_{RX_i}^2}{B_{sRX_i}^2 + B_{cRX_i}^2}} \right) + \tan^{-1} \frac{B_{sRX_i}}{B_{cRX_i}} \quad (5-25)$$

Existen entonces cuatro raíces para φ debido a las combinaciones de signos en el término $\cos^{-1}(x)$. La gráfica característica de cada combinación se presenta en la Figura 5.9:

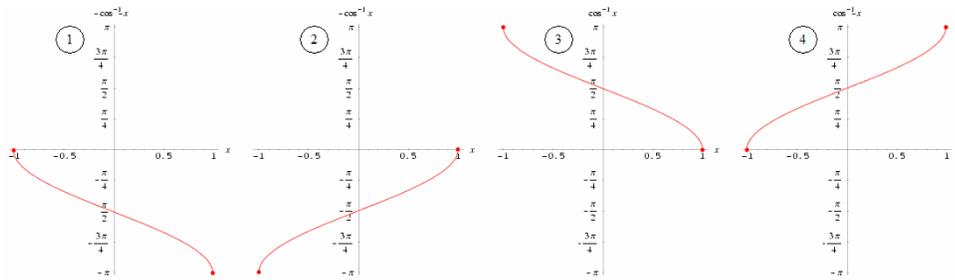


Figura 5.9. Gráfica para el primer término del lado derecho de cada ecuación en (5-26)

Considerando que la raíz cuadrada del argumento de $\cos^{-1}(x)$ no puede arrojar valores negativos, se considera sólo el rango positivo de x en las gráficas de la Figura 5.9, tal como se muestra en la Figura 5.10, en la cual las gráficas se han agrupado en una misma:

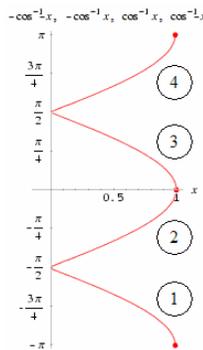


Figura 5.10. Comparación entre los cuatro términos para $\cos^{-1}(x)$ en una misma gráfica

Es decir, que las raíces de la ecuación (5-25) pueden ser ordenadas como se muestra en la ecuación (5-26) de acuerdo a la Figura 5.10, pues así arrojarán las respectivas raíces (ángulos) en orden creciente:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -\cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{C_{RXi}^2 - A_{RXi}^2}{B_{sRXi}^2 + B_{cRXi}^2}}\right) + \tan^{-1}\frac{B_{sRXi}}{B_{cRXi}} \\
 \varphi_2 &= -\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{C_{RXi}^2 - A_{RXi}^2}{B_{sRXi}^2 + B_{cRXi}^2}}\right) + \tan^{-1}\frac{B_{sRXi}}{B_{cRXi}} \\
 \varphi_3 &= \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{C_{RXi}^2 - A_{RXi}^2}{B_{sRXi}^2 + B_{cRXi}^2}}\right) + \tan^{-1}\frac{B_{sRXi}}{B_{cRXi}} \\
 \varphi_4 &= \cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{C_{RXi}^2 - A_{RXi}^2}{B_{sRXi}^2 + B_{cRXi}^2}}\right) + \tan^{-1}\frac{B_{sRXi}}{B_{cRXi}}
 \end{aligned}
 \tag{5-26}$$

La ecuación (5-24) representa una función cosenoidal desfasada y elevada al cuadrado, por lo que en 360° presenta dos ciclos. Además, la función se encuentra invertida y desplazada verticalmente por el término $C_{RX_i}^2 - A_{RX_i}^2$, como se muestra en la Figura 5.11.

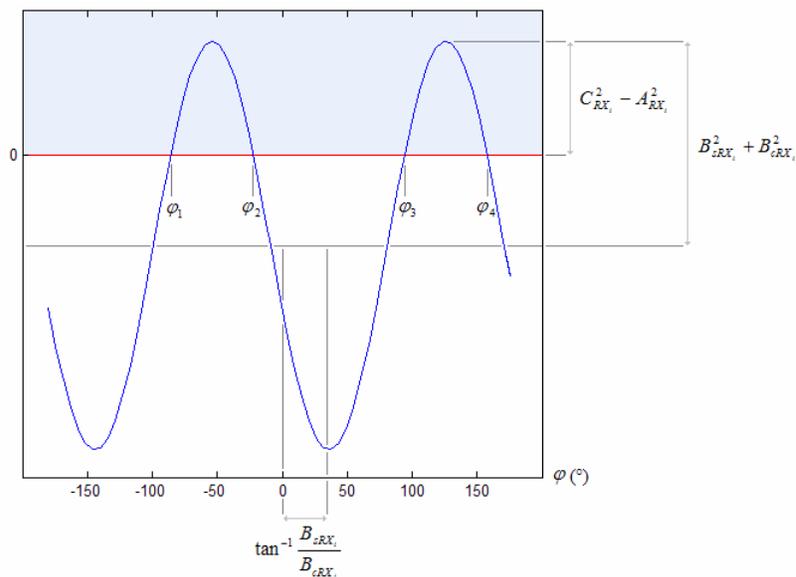


Figura 5.11. Gráfica de la ecuación (5-24)

En la Figura 5.11 se encuentra sombreada el área mayor a cero, para la cual se cumple la inecuación (5-23), de tal manera que un ángulo φ válido para el eslabón de acoplamiento en el cual el aro no intersece con el eje de la rótula se encuentra dentro del intervalo:

$$(\varphi_1, \varphi_2) \cup (\varphi_3, \varphi_4) \quad (5-27)$$

Si el término $C_{RX_i}^2 - A_{RX_i}^2$ provoca que la gráfica en su totalidad se encuentre por debajo de cero entonces no existen las raíces φ_i , para las cuales se obtienen resultados imaginarios dado que el argumento del $\cos^{-1}(x)$ cae fuera del intervalo $[-1, 1]$. Esto indica que no existe ángulo φ para el cual la articulación esférica se encuentre en una configuración válida, y por lo tanto esta configuración cae fuera del espacio de trabajo definido por las limitantes mecánicas. Así, mediante un desarrollo similar al efectuado en la sección 5.1 se deriva una expresión para el espacio de trabajo con respecto a cada una de las doce articulaciones esféricas a partir del argumento del $\cos^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \pm \sqrt{\frac{C_{RXi}^2 - A_{RXi}^2}{B_{sRXi}^2 + B_{cRXi}^2}} \leq 1 \\
 \left| \pm \sqrt{\frac{C_{RXi}^2 - A_{RXi}^2}{B_{sRXi}^2 + B_{cRXi}^2}} \right| &\leq 1 \\
 C_{RXi}^2 - A_{RXi}^2 - B_{sRXi}^2 - B_{cRXi}^2 &\leq 0
 \end{aligned} \tag{5-28}$$

5.2.5. Obtención del máximo ángulo de giro

El máximo ángulo de giro para la implementación de la articulación esférica se obtiene a partir de las dimensiones de los elementos que la conforman. Para ello se denota como R al radio de la rótula, r al radio del eje y h al ancho del aro, como se muestra en la Figura 5.12, calculándose el máximo ángulo de giro ψ como:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \sin^{-1}(r/R) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}h/R\right) \tag{5-29}$$

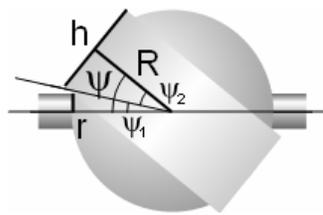


Figura 5.12. Máximo ángulo de giro

5.2.6. Valores numéricos para las articulaciones rotacionales del robot paralelo implementado

Haciendo referencia a los planos de los apéndices B.4 y B.7 se obtienen los valores numéricos correspondientes a los parámetros h , R y r definidos en la sección 5.2.5, pudiéndose así calcular el máximo ángulo de giro en esta implementación:

$$h = 2.2\text{cm}, \quad R = 2.25\text{cm}, \quad r = 3.2\text{cm}/2 = 1.6\text{cm} \tag{5-30}$$

$$\psi = \sin^{-1}(1.6/2.25) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot 2.2/2.25\right) = 71.4^\circ \tag{5-31}$$