2. SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS EN EL TIEMPO

Una señal puede ser definida como una portadora física de información. Por ejemplo, las señales de audio son variaciones en la presión del aire llevando consigo un mensaje a nuestros oídos y las señales visuales son ondas de luz que llevan información a nuestros ojos [9]. Desde un punto de vista más matemático, las señales se representan por una función de una o más variables [10]. Las funciones que veremos en este capítulo son de una sola variable independiente: el tiempo.

2.1 Señales en tiempo discreto

Las señales pueden ser discretas en el tiempo o continuas. Si hablo, por ejemplo, mi voz es una señal continua en el tiempo, es infinita en un intervalo muy pequeño de tiempo. Si el OTDR, en contra parte, almacena señales en el tiempo discreto, esto significa, que tiene un número finito de muestras en un intervalo de tiempo dado.

Una señal en tiempo discreto *x(n)* es una función de una variable independiente entera. Gráficamente, se representa así [3]:

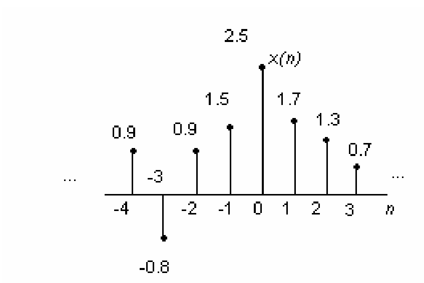


Figura 2.1 Señal discreta en el tiempo.

En lo sucesivo supondremos que una señal en tiempo discreto se define para cada valor n para $-\infty < n < \infty$. Por lo general, nos referimos a $x(n)$ como la "n-ésima muestra" de la señal aún cuando $x(n)$ sea inherentemente en tiempo discreto [3].

2.1.1 Algunas señales elementales en tiempo discreto

A continuación veremos cuatro señales discretas en el tiempo que aparecen con frecuencia en el análisis de sistemas y señales.

1. El *impulso unitario* se denomina $\delta(n)$ y se define como:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & para\ n = 0 \\ 0, & para\ n \neq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Es una señal que vale siempre cero, excepto en n=0 donde vale uno [3].

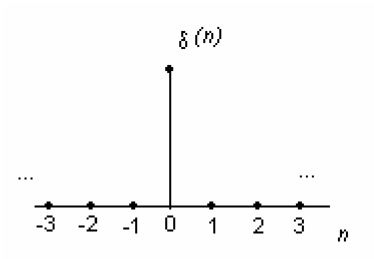


Figura 2.2 Función impulso unitario.

2. La señal *escalón unitario* se denota como $u(n)$ y se define como [3]:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

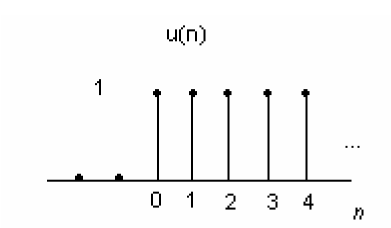


Figura 2.3 Función escalón unitario.

3. La señal *rampa* se denota como *s(n)* y se define como [3]:

$$s(n) = \begin{cases} n, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

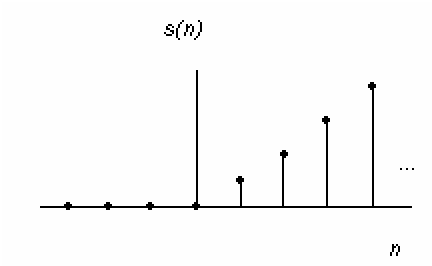


Figura 2.4 Función rampa.

4. La señal *exponencial* es una secuencia de la forma [3]:

$$x(n)=a^n \quad \text{para todo valor de } n \tag{2.4}$$

a) b)

Figura 2.5 Función exponencial a) decreciente cuando 0<a<1, b) creciente para a>1.

2.1.2 Clasificación de señales en el tiempo discreto

Los métodos matemáticos dependen de las características de las señales en el análisis de sistemas y señales en el tiempo discreto, por eso a continuación mostraremos dos de estas características [3].

A) Señales periódicas y señales aperiódicas

Una señal $x(n)$ es periódica con periodo $N(N>0)$ si y sólo si

$$x(n+N) = x(n) \text{ para todo valor de } n \tag{2.5}$$

El valor más pequeño de N para que la ecuación anterior se verifique se denomina periodo fundamental. Si la ecuación no se cumple para ningún valor de N, la señal se denomina *aperiódica* o *no periódica* [3].

B) Señales simétricas (pares) y asimétricas (impares)

Una señal real $x(n)$ se denomina simétrica (par) si

$$X(-n) = x(n) \tag{2.6}$$

Por otro lado, una señal $x(n)$ se le llama asimétrica (impar) si

$$X(-n) = -x(n) \tag{2.7}$$

Si $x(n)$ es impar, $x(0) = 0$.

2.1.3 Suma, multiplicación y escalado de secuencias.

Hay manipulaciones simples en donde intervienen la variable independiente y la amplitud de la señal (variable dependiente). Estas modificaciones de la amplitud incluyen *suma, multiplicación y escalado* de las señales discretas en el tiempo [3].

El *escalado de amplitud* de una señal por una constante A se obtiene multiplicando el valor de cada muestra de la señal por A. Así, se obtiene

$$Y(n) = Ax(n) \qquad -\infty < n < \infty \tag{2.8}$$

La *suma* de dos señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ es una señal y(n) cuyo valor en cualquier instante es igual a la suma de los valores en ese instante de las dos señales de partida, es decir,

$$Y(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad -\infty < n < \infty \tag{2.9}$$

El *producto* se define analógicamente en cada instante de tiempo como

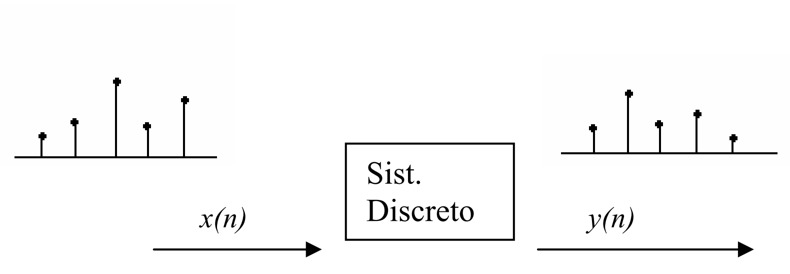
$$Y(n) = x_1(n)x_2(n) \qquad -\infty < n < \infty \tag{2.10}$$

2.2 Sistemas en tiempo discreto

En muchas aplicaciones del procesado de señal digital es necesario diseñar dispositivos o algoritmos que realicen operaciones sobre señales en tiempo discreto. A estos dispositivos se les llama sistemas en tiempo discreto o sistemas discretos. Específicamente un sistema discreto es un dispositivo que opera sobre una excitación o señal de entrada en tiempo discreto según una regla preestablecida para generar otra señal en tiempo discreto denominada salida o respuesta del sistema. Se puede decir que un sistema es un conjunto de operaciones que se realizan sobre la señal de entrada $x(n)$ para producir una señal de salida $y(n)$. Esta relación se puede representar así [3]:

$$y(n) \equiv T\{x(n)\} \tag{2.11}$$

donde T es la transformación u operador, o procesado realizado por el sistema sobre $x(n)$ para producir $y(n)$. La relación entrada-salida y T se puede ver en la Figura 2.6, donde T es el sistema discreto o "caja negra" que actúa sobre la señal de entrada [3].



Señal de entrada Respuesta

Figura 2.6 Representación de la relación entrada-salida a través de un sistema discreto.

2.2.1 Representación de sistemas discretos mediante diagramas de bloques

Los diagramas a bloques pueden parecer muy sencillos, precisamente esa es la intención al usarlos cuando representamos sistemas complejos. A continuación mostraremos un sumador, multiplicadores, retardador y adelantador de elementos.

Sumador

En la siguiente figura se muestra cómo se realiza la suma de dos señales, formando una tercera. Cabe destacar que no se necesitan dispositivos de memoria para sumar [3].

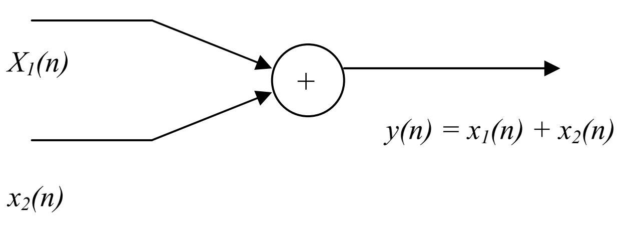


Figura 2.7 Sumador.

Multiplicador por una constante

Esta operación consiste en aplicar un factor de escala a la entrada *x(n)*. Tampoco requiere memoria [3].

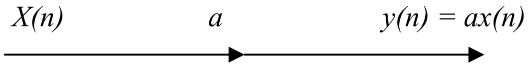


Figura 2.8 Multiplicador por una constante.

Multiplicador de señal

La figura siguiente muestra como se multiplican dos señales para formar otra secuencia o producto, denotada por *y(n)*. Es también una operación sin memoria [3].

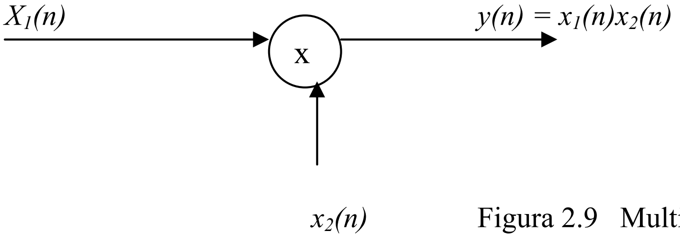


Figura 2.9 Multiplicador de señal.

Retardador de un elemento

El retardador de un elemento es un sistema especial que retrasa una posición la señal que pasa por él. Si la señal de entrada es *x(n),* la salida sería *x(n-1)*. La muestra *x(n-1)* se almacena en memoria en el instante n-1 y se extrae de la memoria en el instante n para formar

$$y(n) = x(n-1) \tag{2.12}$$

Lo que significa que este sistema sí requiere de memoria. El símbolo z^{-1} denota un retraso [3].

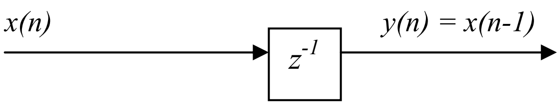


Figura 2.10 Retardador.

Adelantador de un elemento

Este sistema funciona de forma inversa que el retardador. Es decir, una entrada *x(n)* es adelantada una muestra en el tiempo para producir *x(n+1).* El símbolo z denota un avance en el tiempo. Debe de tomarse en cuenta el hecho de que en tiempo real esta operación es imposible, ya que lo que se está haciendo es algo así como predecir el futuro. Sin embargo, si almacenamos la señal en memoria, podemos disponer de todas las muestras en cualquier momento [3].

$$x(n) \longrightarrow \boxed{z} \longrightarrow y(n) = x(n+1)$$

Figura 2.11 Adelantador.

2.2.2 Sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo (LIT)

Podemos hacer dos subdivisiones de sistemas, los que varían en el tiempo y los que no.

Un sistema se dice que *es invariante en el tiempo* cuando sus características de entrada-salida no cambian con el tiempo. Se puede definir esto de la siguiente manera [3]:

Un sistema en reposo *T* es invariante en el tiempo si y sólo si

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

implica que

$$x(n-k) \xrightarrow{T} y(n-k)$$

para toda señal de entrada *x(n)* y todo desplazamiento temporal *k.*

Un *sistema lineal* es aquel que satisface el principio de superposición. De forma sencilla se puede decir que el principio de superposición exige que la respuesta del sistema a una suma ponderada de señales sea igual a la correspondiente suma ponderada de las salidas a cada una de las señales de entrada. Según el siguiente teorema [3]:

Un sistema es lineal si y sólo si

$$T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1T\{x_1(n)\} + a_2T\{x_2(n)\} \qquad (2.13)$$

Para cualesquiera secuencias arbitrarias de entrada $x_1(n)$ y $x_2(n)$, y cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2.

Un sistema lineal en reposo con entrada cero produce salida cero. Si un sistema produce una salida distinta de cero cuando la entrada es cero, el sistema no está en reposo o no es lineal. Si un sistema en reposo no verifica el principio de *superposición* tal como se define en la siguiente Figura 2.12, entonces se dice que es no lineal [3].

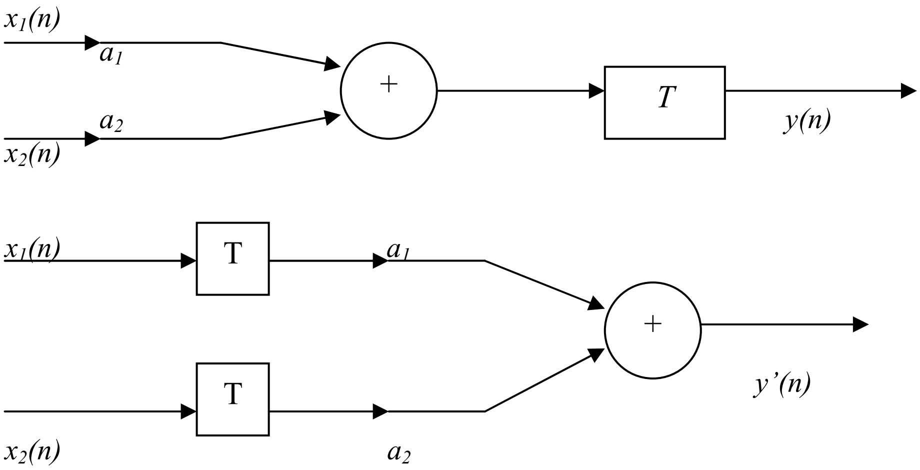


Figura 2.12 Representación gráfica del principio de superposición. T es lineal si y solo si $y(n)=y'(n)$.