

Capítulo 2. Marco Teórico

El primer modelo activo lo propone en 1987 Kass [11], desde entonces se han desarrollado otros modelos, lo que obliga a catalogar los modelos por sus características. En este proyecto se trabaja con modelos activos paramétricos, pues como se verá más adelante se representan por curvas parametrizadas. De los modelos activos paramétricos existen dos variantes; los *snaxels* y los *b-snakes*. El primero es el que se utilizará en todo lo que resta del proyecto. Los *b-snakes* [3] requieren de una definición distinta a las *snaxels* debido a que los primeros utilizan una técnica de interpolación (beta splines), que tiene características deseables en su versión discreta, definiendo con una función toda la curva, y la segunda se basa solamente en puntos discretos en donde cada uno es sometido a la ecuación del modelo. Estudiar los *b-snakes* estaría fuera de los alcances de este proyecto para conseguir su implementación.

2.1 Modelos activos snake

El modelo activo snake o contorno activo deformable como también se le conoce, es representado matemáticamente como una curva $\mathbf{v}(s) = [x(s), y(s)]$ que se mueve en el espacio constantemente dentro de un número de iteraciones que se puede interpretar como una secuencia de tiempo.

Obsérvese que la curva está representada paramétricamente, teniendo como único parámetro a s . Este parámetro, que está relacionado con ambas variables en el espacio (x, y) , representa la curva ubicada en el espacio que en este caso es la imagen de operación.

Existe otro parámetro relacionado con la cantidad de iteraciones representadas también como la secuencia de tiempo que utiliza el contorno activo para desenvolverse. Debido a su representación se considera a este parámetro como t .

Se tiene entonces un modelo activo definido como una curva $\mathbf{v}(s, t) = [x(s, t), y(s, t)]$ en donde:

- s es el espacio que ocupa la curva.
- t es la cantidad de iteraciones representado como la secuencia de tiempo.

Para fines prácticos en este análisis se considera solamente el parámetro s en las definiciones siguientes, sin perder con ello generalidad en el modelo. Esto es posible ya que a continuación se hará un análisis correspondiente sólo al espacio. Se aclarará el uso del parámetro t cuando sea pertinente.

El modelo original del contorno activo propuesto por Kass [11], está representado como una curva parametrizada $\mathbf{v}(s) = [x(s), y(s)]$, $s \in [0,1]$ que se mueve a través de un dominio espacial y busca minimizar el siguiente *funcional*¹ de energía:

$$E_{snake}^* = \int_0^1 E_{snake}(\mathbf{v}(s)) ds \quad (2.1)$$

La integral del *funcional* de energía E_{snake} está definida para una curva abierta, sin embargo en este estudio sólo se utilizarán curvas cerradas, es decir que se unirá el primer y el último punto de la curva.

En la ecuación 2.1, el funcional de energía E_{snake} se divide en otros funcionales para su mayor entendimiento.

$$E_{snake}^* = \int_0^1 E_{snake}(\mathbf{v}(s)) ds = \int_0^1 E_{interna}(\mathbf{v}(s)) ds + \int_0^1 E_{imagen}(\mathbf{v}(s)) ds + \int_0^1 E_{fuerzas_externas}(\mathbf{v}(s)) ds \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 presenta tres nuevos funcionales de energía ($E_{interna}$, E_{imagen} , $E_{fuerzas_externas}$), cada uno de ellos representa un comportamiento específico que se desea tenga el modelo. A continuación se dará una definición de cada uno de estos funcionales, recordando que cada uno está definido de tal manera que sus mínimos ocasionen que el modelo se acerque a la posición que se desea.

2.1.1 Energía interna

El funcional de energía interna es definido originalmente por Kass [11] como:

$$E_{interna}(\mathbf{v}(s)) = \frac{1}{2} \alpha(s) \left| \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} \right|^2 + \frac{1}{2} \beta(s) \left| \frac{d^2\mathbf{v}(s)}{ds^2} \right|^2 \quad (2.3)$$

Simplificando, el funcional también se puede representar como:

$$E_{interna}(\mathbf{v}(s)) = \frac{1}{2} \alpha |\mathbf{v}_s(s)|^2 + \frac{1}{2} \beta |\mathbf{v}_{ss}(s)|^2 \quad (2.4)$$

En donde los subíndices s representan las derivadas respecto a s y la cantidad de subíndices representa el grado de derivación. También se considera en la ecuación 2.4 que $\alpha(s) = \alpha$ y $\beta(s) = \beta$. Estas variables se igualan a constantes para mantener así un modelo más sencillo y que mantenga un comportamiento equivalente durante su variación.

¹ *Funcional* es una cantidad o función que depende del comportamiento de una o más funciones. En otras palabras, el dominio de un funcional es un conjunto o el “espacio” de las funciones admisibles mas que de un espacio de coordenadas o variables independientes [6]. El término de *funcional* es muy utilizado en el *cálculo de variaciones* en donde se busca encontrar los extremos de los *funcionales* mas que de un número finito de variables independientes.

La ecuación 2.4 tiene dos términos que pueden relacionarse con el comportamiento físico de una liga, la cual se puede colapsar manteniendo una estructura que el usuario deseé. Entonces, si se utiliza la ecuación 2.2 y la ecuación 2.4, analizando solamente el funcional de $E_{interna}$, se tiene que:

$$\int_0^1 E_{interna}(\mathbf{v}(s)) ds = \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 |\mathbf{v}_s(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \beta \int_0^1 |\mathbf{v}_{ss}(s)|^2 ds \quad (2.5)$$

El primer sumando de la integral de la parte derecha de la igualdad en la ecuación 2.5 es una expresión similar a la utilizada para la longitud del arco, es decir:

$$\frac{1}{2} \alpha \int_0^1 |\mathbf{v}_s(s)|^2 ds \quad (2.6)$$

Esta expresión equivale a obtener la longitud de la curva, lo que se puede demostrar [13]. Considerando que se tiene una medida de longitud de curva y que se desea que la ecuación 2.2 se minimice, entonces el proceso de minimizar la ecuación 2.2 provoca que el contorno activo se colapse. Cabe resaltar que la expresión 2.6 es conocida también como el término de *tensión*. El término de *tensión* se le da a α debido a que la derivada de primer orden $\mathbf{v}_s(s)$ en la ecuación 2.3 tendrá valores grandes cuando exista una discontinuidad o un *hueco* en la curva. Esto suena contradictorio, ya que se generan valores grandes en discontinuidades y se le llama al término de *tensión*. Lo anterior tiene sentido si se recuerda que se busca minimizar el funcional de energía E_{snake}^* de la ecuación 2.1, entonces la integral definida para este funcional también se desea minimizar. La ecuación 2.2 muestra que el funcional de energía interna $E_{interna}$ debe de ser también minimizado, por lo tanto *se busca una expresión que genere altos valores para que éstos sean minimizados*. Si se recuerda esto será muy sencillo comprender todo el modelo en conjunto y las propuestas que se analizan en el transcurso de este trabajo.

Es importante hacer el comentario de que la expresión 2.6 se interpretó como la minimización de longitud de arco, sin embargo Kass diseña el modelo original para que este no presente discontinuidades y genere este fenómeno de *tensión* que ya se ha comentado anteriormente.

El término restante en la ecuación 2.5 es:

$$\frac{1}{2} \beta \int_0^1 |\mathbf{v}_{ss}(s)|^2 ds \quad (2.7)$$

En donde la segunda derivada respecto al parámetro s es una forma de representar la tasa de cambio de la tangente en cada punto infinitesimal de la curva parametrizada. Entonces, el minimizar el término 2.7 presenta un control en la curvatura. Entre más pequeño sea este término, la variación de cambio de la tangente en la curva presenta un fenómeno que en el modelo es conocido como *rigidez*.

El término de *rigidez* puede ser entendido si se recuerda que se busca una expresión que genere altos valores para que éstos sean minimizados. Para este caso, se busca que $v_{ss}(s)$ genere valores elevados, ésto se presenta cuando existen tasas de cambio elevadas. Entonces estos cambios serán minimizados para suavizar el modelo y es por ésto que se presenta un fenómeno de *rigidez*

El papel de las constantes α y β en la ecuación 2.5 es el de mantener un control de importancia en los términos de *tensión* y *rigidez* respectivamente. El caso extremo más representativo es cuando $\beta = 0$, en este caso no existe un término de *rigidez* y por lo tanto se tiene un modelo que fácilmente se puede *doblar* o dicho en términos matemáticos, produce que la curva tenga una discontinuidad de segundo orden y pueda encontrar así esquinas debido a que no se consideran los valores elevados que estas esquinas producen y por lo tanto no serán minimizados. El caso contrario ocurre cuando $\beta = 1$, entonces se suaviza la curva.

La figura 2.1 muestra el comportamiento del contorno activo para distintos valores de α y β para imágenes de 64x64 píxeles. En ésta se observa la figura original en rojo y el comportamiento del contorno activo en azul. Como se comentó anteriormente si se considera únicamente el valor de α como el más relevante, entonces el modelo tenderá a colapsarse. Por otro lado, si la única constante relevante es β entonces el contorno activo se comporta como un objeto rígido que no presenta discontinuidades. Si a ambas constantes se les da la misma importancia, entonces se tiene una combinación de las características comentadas, es decir, un contorno rígido que tiende a colapsarse. Estas características del modelo se conocen también como las *características intrínsecas*.

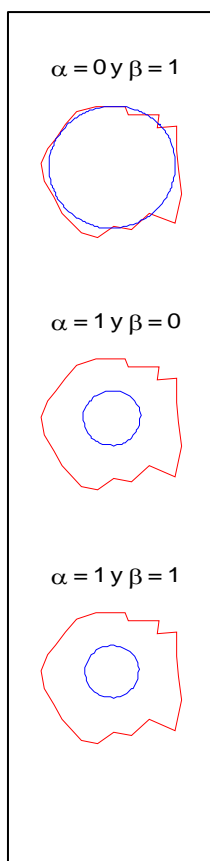


Figura 2.1 Comportamiento del contorno activo con diferentes valores para las constantes.

Hasta el momento el contorno activo tiende a colapsarse y mantener rigidez si es que se desea así su comportamiento, sin embargo se requiere que éste se ajuste a ciertas características en una imagen. Es por ésto que también se consideran otros funcionales de energía, los cuales se tratarán en las siguientes subsecciones

2.1.2 Energía de imagen

Como se comentó en la sección anterior, para que el contorno activo sea útil se requiere un *funcional* de energía que permita atraer al contorno a características relevantes en una imagen. El modelo original [11] propone tres diferentes *funcionales* de energía que atraen al modelo hacia líneas, bordes y terminaciones.

$$E_{imagen} = \omega_{linea} E_{linea} + \omega_{borde} E_{borde} + \omega_{termino} E_{termino} \quad (2.8)$$

2.1.2.1 Energía de línea

Este es el *funcional* de energía más sencillo. Se encuentra definido como el mapa de intensidades de la imagen expresado como:²

$$E_{linea} = I(x, y) \quad (2.9)$$

Dependiendo del valor del signo de ω_{linea} , éste se acercará a líneas oscuras o claras. Por ejemplo, si $\omega_{linea} = 1$, entonces el funcional tendrá sus mínimos en valores cercanos a cero, que es lo mismo al color negro en una imagen. Por otro lado si $\omega_{linea} = -1$, entonces tendrá sus mínimos en valores muy grandes, que en el caso de imágenes de intensidad como las utilizadas en MATLAB, correspondería a un valor de 255 que es el color blanco.

Se vuelve a recordar la regla para diseñar el modelo: *se busca una expresión que genere altos valores para que éstos sean minimizados*. Considérese esta regla para la ecuación 2.9. Si se desea que se evadan los valores grandes correspondientes al valor del píxel dado por $I(x, y)$ considerando que $\omega_{linea} = 1$, es decir valores como 255 (blanco), entonces se provoca que los colores claros se evadan y se tenga tendencia a colores oscuros como se explicó anteriormente.

Existe la alternativa de utilizar otro *funcional* de energía de línea por medio de una función Gaussiana de dos dimensiones que se convolucionará con el mapa de intensidades de la imagen, de esta forma:

² Este funcional de línea se da en términos de x y y para darle más generalidad. Se hará lo mismo para todos los funcionales correspondientes a la energía de imagen pues estos son más sencillos de comprender si se generalizan en un espacio (en este caso toda la imagen), que si se ven como coordenadas de la curva. Por lo comentado anteriormente, se intuye que $x = x(s)$ y $y = y(s)$.

$$E_{linea} = G_{\sigma}(x, y) * I(x, y) \quad (2.10)$$

En donde $G_{\sigma}(x, y)$ representa la función Gaussiana de dos dimensiones con una desviación estándar σ . El signo $*$ representa convolución. Las técnicas para implementar la función Gaussiana se pueden consultar en el apéndice A o para mayor detalle consúltese el libro de *Gonzales y Woods*[7].

En la práctica el funcional definido en 2.9 y 2.10 solamente es útil para una línea homogénea del mismo color que tiene como fondo un plano uniforme, por ejemplo, una línea negra que se encuentra en un fondo blanco. Sin embargo, se requiere trabajar con imágenes más complejas, con varios tonos de grises y fondos en donde lo único que divide a éstos es un borde que se puede perder con mucha facilidad. Para estos objetos se requiere definir otro tipo de funcional para reconocer bordes, que es el que se analizará a continuación.

2.1.2.2 Energía de borde

Si se desea que el modelo se acerque a los bordes de un objeto, se puede utilizar un *funcional* de energía de borde definido como:

$$E_{borde} = -|\nabla I(x, y)|^2 \quad (2.11)$$

Donde ∇ es el operador nabla que representa la operación *gradiente* el cual es utilizado para realzar bordes en imágenes. El *gradiente* de la función $I(x, y)$ en las coordenadas (x, y) se encuentra definido [7, 13] como un vector columna de dos dimensiones

$$\nabla \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La ecuación 2.12 indica que el operador *gradiente* es utilizado para obtener las respectivas derivadas parciales que serán útiles en el desarrollo del modelo en las próximas secciones.

Una de las características del operador *gradiente*, es que las derivadas parciales en 2.12 no son invariantes a la rotación, es decir que si se gira la imagen, el resultado de la operación no será el mismo. A los operadores que tienen esta característica de invariabilidad a la rotación se les conoce como *isotrópicos*. Cabe mencionar que las derivadas parciales de la ecuación 2.12 son operaciones lineales.

Existe otro operador que mantiene mejores características que el operador de *gradiente* [7] en el aspecto de que es un operador *isotrópico* y de que su magnitud es lineal. Este es conocido como operador *laplaciano* y su magnitud se encuentra definida como:

$$\nabla^2 I(x, y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

Si se realiza un análisis de las ecuaciones 2.12 y 2.13 [7], se puede concluir que el operador de *gradiente* produce bordes más gruesos y tiene mayor respuesta a saltos en niveles de grises. Por otro lado, el operador *laplaciano* tiene una respuesta más fina en cuanto a detección de líneas más delgadas y puntos aislados.

La figura 2.2 muestra el resultado de aplicar el operador *laplaciano* a una imagen de intensidad³ de 385x537 píxeles. Se observa como los bordes del objeto se ven realzados tras utilizar este operador. De la misma manera, se observa en la figura 2.3 el resultado de aplicar el operador de *gradiente* por medio de un operador *Sobel*. En éste se muestra como se realzan los bordes de la imagen pero de forma más gruesa y con menos detalle que en la figura 2.2. Lo anterior concuerda con las conclusiones que se dieron en el párrafo anterior.



Figura 2.2 Muestra de la operación del operador laplaciano. (Imagen obtenida de MATLAB)

³ En MATLAB, las imágenes de niveles de grises también son conocidas como imágenes de intensidad.



Figura 2.3 Muestra del operador de gradiente utilizando el operador Sobel. (Imagen obtenida de MATLAB)

En el modelo de contorno activo se utiliza el operador de *gradiente* para el *funcional* de energía de borde, pues éste genera bordes gruesos para imágenes estáticas además de que solamente se requiere obtener la derivada parcial para obtener un buen resultado.

De la misma forma que el *funcional* de energía de línea, el *funcional* de energía de borde se puede expresar de una manera alternativa a la expresada en la ecuación 2.11

$$E_{borde} = -|\nabla(G_{\sigma}(x, y) * I(x, y))|^2 \quad (2.14)$$

En donde nuevamente $G_{\sigma}(x, y)$ representa la función Gaussiana de dos dimensiones con una desviación estándar σ y el signo $*$ representa convolución. El uso de esta función Gaussiana en la ecuación 2.14, se debe a que los mínimos de este funcional recaen en los cruces por cero que definen los bordes [7].

Se puede deducir que un incremento de σ producirá que la imagen se vuelva más borrosa. El obtener el *gradiente* de una imagen con estas características aumenta el *rango de captura*⁴ del contorno activo. Lo anterior se muestra en la figura 2.4, en donde se convoluciona la imagen original con una función Gaussiana con desviación estándar $\sigma = 3$. Se ve claramente que la imagen resultante es mucho más borrosa, lo que aumentará el rango de captura. Esto se puede apreciar en la figura 2.5, en donde se aplica el operador gradiente al resultado de la convolución de la función Gaussiana con la imagen de intensidad. Nótese que el aumento de valor de la desviación estándar, ocasiona que el borde se haga más grueso, así se puede comprobar experimentalmente que el *rango de captura* es proporcional al valor de la desviación estándar.

⁴ El rango de captura se define como la región en donde un contorno puede ser inicializado y poder encontrar el límite deseado guiándose así de las fuerzas externas (véase sección 2.1.3) [25].



Figura 2.4 Convolución imagen original (izq.) con una función Gaussiana con $\sigma = 3$. (Imagen obtenida de MATLAB).

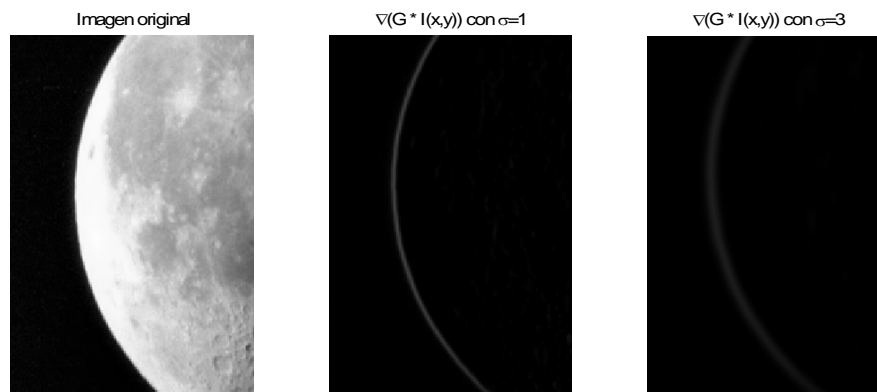


Figura 2.5 Convolución con función Gaussian con $\sigma = 1$ (en medio) y $\sigma = 3$ (der.). (Imagen obtenida de MATLAB).

Para finalizar, obsérvese la figura 2.5 en donde el borde de interés es de color claro, siguiendo la definición para diseñar el modelo que se dio al principio de esta sección, el signo negativo de las ecuación 2.11 y 2.14 tiene sentido.

2.1.2.3 Energía de término

Este *funcional* de energía se propone para encontrar terminaciones de línea y esquinas. Para la definición de la misma, considérese que $C(x, y) = G_{\sigma}(x, y) * I(x, y)$ es una

versión borrosa de la imagen original, $\theta = \tan^{-1}(C_y / C_x)$ sea el parámetro correspondiente al ángulo del gradiente de los siguientes vectores unitarios que representan respectivamente al vector tangente y normal a la dirección del gradiente de la imagen, $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ y $\mathbf{n}_\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Entonces la curvatura de $C(x, y)$ se puede escribir como:

$$E_{\text{termino}} = \left[\frac{\partial \mathbf{n}_\perp}{\partial \theta} \right]^{-1} ds = \frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{n}^2} ds \quad (2.15)$$

Que en forma discreta se puede representar como:

$$E_{\text{termino}} = \frac{C_{yy} C_x^2 + C_{xx} C_y^2 - 2C_{xy} C_x C_y}{(C_x^2 + C_y^2)^{3/2}} ds \quad (2.16)$$

La ecuación 2.15 es más fácil de conceptualizar si se observa la figura 2.6. En ésta se presenta una imagen de dos colores (izq.). La imagen resultante de las operaciones correspondientes a la ecuación 2.15 se muestra en la figura 2.6 por medio de vectores que apuntan hacia la máxima variación de cambio, que es otra definición del gradiente. Entonces, la derivada de los vectores perpendiculares a los mostrados en la figura 2.6, tendrá un mayor valor cuando sus cambios sean abruptos, es decir, cuando existan esquinas o terminaciones de línea. Eso es lo que quiere decir la ecuación 2.15, en donde el recíproco se toma para tener un mínimo cuando se presenten esquinas o términos de línea.

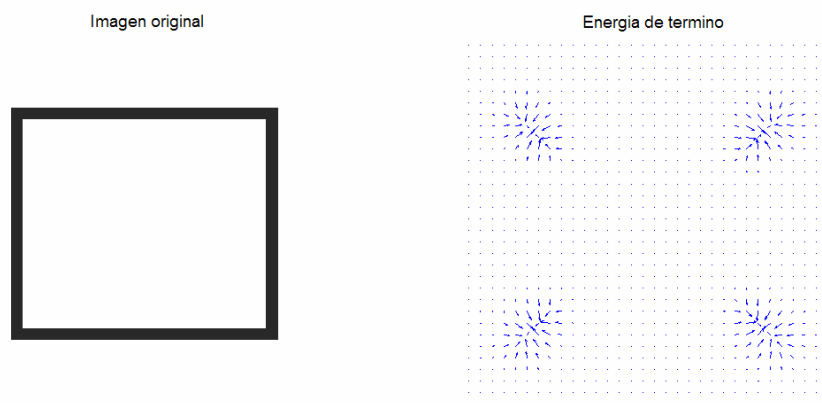


Figura 2.6 Energía de término (figura der.) resaltando esquinas.

2.1.3 Energía de fuerzas externas

Este *funcional* de energía, corresponde a un control que el usuario puede ejercer ubicando puntos para formar una guía para el contorno activo. Así el contorno activo no se pierde en mínimos locales que pueden cerrar un contorno falso. El ejemplo utilizado por Kass [11], es parecido a un resorte que ejerce una fuerza. Entonces se puede pensar en dos puntos (\mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2) en donde uno sea un punto en la imagen (\mathbf{x}_1) y el otro sea un punto de la curva correspondiente al contorno activo (\mathbf{x}_2). De esta manera se puede definir un funcional de energía de fuerzas externas como:

$$E_{\text{fuerzas_externas}} = k|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 \quad (2.17)$$

Este funcional es mínimo cuando $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$. También se puede expresar otro funcional que repele al contorno activo [9].

$$E_{\text{fuerzas_externas}} = \frac{k}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} \quad (2.18)$$

Este funcional es máximo cuando $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$.

El negar la constante k representa un cambio de atracción a pseudo repulsión y de repulsión a pseudo atracción. Con esto se quiere decir que un valor negativo en la constante k ocasionará mínimos infinitos que en el caso del modelo de contorno activo no se pueden utilizar ya que el *funcional* de energía no es continuo lo que imposibilita minimizar la ecuación 2.2.

2.2 El problema de variación

Hasta el momento se ha logrado definir un modelo para el contorno activo, pero se requiere saber que curva $\mathbf{v}(s)$ disminuye al funcional E_{snake}^* de la ecuación 2.2. Este tipo de problemas se conoce como el problema de variación [25] y se puede resolver utilizando una herramienta de las matemáticas conocido como cálculo de variaciones⁵. A continuación se utilizará el cálculo de variaciones para obtener la ecuación de Euler-Lagrange utilizando un procedimiento similar al de Ivins [9].

2.2.1 La ecuación de Euler-Lagrange

Antes de derivar la ecuación de Euler-Lagrange se utiliza el lema básico del cálculo de variaciones [20].

⁵ “El cálculo de variaciones es una especie de generalización del cálculo, este busca una trayectoria, curva, superficie, etc., que para una función tenga un valor estacionario (en problemas de física es usualmente un mínimo o un máximo)”. [22]

Si x_1 y $x_2 (> x_1)$ son constantes fijas y $G(x)$ es una función continua particular en donde $x_1 \leq x \leq x_2$ y

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0 \quad (2.19)$$

Para cada opción de la función continuamente diferenciable $\eta(x)$ para la cual

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad (2.20)$$

Se concluye que:

$$G(x) = 0 \quad \text{identicamente en } x_1 \leq x \leq x_2 \quad (2.21)$$

La demostración de este lema se puede consultar en el libro de Weinstock [20].

Ahora bien, si se tiene una función dos veces diferenciable $y = y(x)$ que satisface la condición $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ y ocasiona que la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \quad (2.22)$$

genere un mínimo; ¿cuál sería la ecuación diferencial que satisface $y(x)$? Si se resuelve dicha ecuación diferencial, entonces se tiene una forma explícita de la función que satisface la ecuación 2.22.

Para resolver dicho problema, se propone una familia con un parámetro

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \quad (2.23)$$

En donde $\eta(x)$ es una función arbitraria en la cual

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (2.24)$$

y ε es el parámetro de la familia. Entonces para cada función $\eta(x)$ se tiene una sola familia de un parámetro de la forma 2.23. Con $\eta(x)$ cada valor de ε designa un solo miembro de esa familia de un parámetro. Con lo anterior la función $y(x)$ que minimiza la integral de la ecuación 2.22 corresponde a un miembro de todas las familias de la ecuación 2.23 cuando el parámetro $\varepsilon = 0$. Tomando en cuenta todo lo anterior:

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')dx \quad (2.25)$$

Se observa que la integral es función del parámetro ε . La ecuación 2.25 encontrará entonces su mínimo cuando $\varepsilon = 0$ como ya se mencionaba anteriormente. Lo importante de esto es que el mínimo existe sin importar la familia $\eta(x)$ y además se tiene una expresión que corresponde a un problema del cálculo diferencial de una sola variable,

en este caso el parámetro ε . Entonces, se sabe que una condición necesaria para encontrar un mínimo es:

$$I'(0) = 0 \quad (2.26)$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= I'(\varepsilon) = f(x_2, Y, Y') \frac{dx_2}{d\varepsilon} - f(x_1, Y, Y') \frac{dx_1}{d\varepsilon} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right) dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

En donde se ha utilizado la definición de diferencial de una integral, regla de la cadena para diferenciar y la ecuación 2.23 para conseguir el resultado. Con la ecuación 2.23, 2.26 y 2.27 se tiene:

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0 \quad (2.28)$$

Integrando por partes el segundo término y considerando la restricción 2.24, se tiene que:

$$\begin{aligned} I'(0) &= \frac{\partial f}{\partial y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

El lema que se comentó al principio de esta sección indica que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.30)$$

La ecuación 2.30 es la llamada ecuación diferencial de Euler-Lagrange. El método para obtenerla es el mismo que utiliza Weinstock [20]. La descripción de la obtención de esta ecuación se explica para tener un concepto más claro de que es lo que se está tratando de resolver, además de que servirá de base para obtener la ecuación del modelo del contorno activo, que es lo que se hará a continuación.

2.2.2 Ecuación de Euler-Lagrange para el modelo del contorno activo

Para el funcional de energía de la ecuación 2.2 se tiene que:

$$E_{snake}^* = \int_0^1 F(s, \mathbf{v}(s), \mathbf{v}'(s), \mathbf{v}''(s)) ds \quad (2.31)$$

Se propone nuevamente una familia de un parámetro como se hizo en la ecuación 2.23

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{v}(s) + \varepsilon \eta(s) \quad (2.32)$$

La ecuación 2.32 ofrece la posibilidad de definir la ecuación 2.31 como:

$$E_{snake}^*(\varepsilon) = \int_0^1 F(s, \mathbf{V}(s), \mathbf{V}'(s), \mathbf{V}''(s)) ds \quad (2.33)$$

Los mismos argumentos que se usaron anteriormente son validos para el modelo, así que sin perder generalidad se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{snake}^*}{d\varepsilon} &= E_{snake}^*{}'(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} ds = \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \frac{\partial \mathbf{V}''}{\partial \varepsilon} \right) ds \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \eta' + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \eta'' \right) ds \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nuevamente se integra por partes considerando la restricción 2.24, que se asume para $\eta(s)$, así:

$$\begin{aligned} E_{snake}^*{}'(0) &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \eta \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \right) \right) \eta + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \eta'' ds \\ &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \eta \Big|_0^1 + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \eta' \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \right) \right) \eta - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \right) \eta' ds \\ &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \eta \Big|_0^1 + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \eta' \Big|_0^1 - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \eta \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \right) + \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \right) \right) \eta ds \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \right) + \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \right) \right) \eta ds = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nuevamente haciendo referencia al lema dado en la sección 2.2.1, se puede argumentar que la ecuación de Euler-Lagrange para el modelo de contorno activo es la siguiente:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}'} \right) + \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}''} \right) \right) = 0 \quad (2.36)$$

Se considera nuevamente la ecuación 2.2 como una forma abreviada para los funcionales de energía, de esta forma se define un funcional más general que se llamará funcional de energía externa, definido como:

$$E_{externa} = E_{imagen} + E_{fuerzas_externas} \quad (2.37)$$

De esta forma se redefine la ecuación 2.2 como:

$$E_{snake}^* = \int_0^1 E_{snake}(\mathbf{v}(s)) ds = \int_0^1 E_{interna}(\mathbf{v}(s)) ds + \int_0^1 E_{externa}(\mathbf{v}(s)) ds \quad (2.38)$$

Entonces el funcional F que se definió en 2.31 puede quedar expresado como:

$$F(s, \mathbf{v}(s), \mathbf{v}'(s), \mathbf{v}''(s)) = E_{externa} + \frac{1}{2} \alpha |\mathbf{v}_s(s)|^2 + \frac{1}{2} \beta |\mathbf{v}_{ss}(s)|^2 \quad (2.39)$$

si se considera la igualdad 2.4⁶. Sin embargo se va a generalizar la ecuación 2.39 para entregar un mejor modelo matemático. En otras palabras, se considera nuevamente la ecuación 2.3, así:

$$F(s, \mathbf{v}(s), \mathbf{v}'(s), \mathbf{v}''(s)) = E_{externa} + \frac{1}{2} \alpha(s) |\mathbf{v}_s(s)|^2 + \frac{1}{2} \beta(s) |\mathbf{v}_{ss}(s)|^2 \quad (2.40)$$

Al sustituir la ecuación 2.40 en la ecuación 2.36 se tiene que:

$$\frac{\partial E_{externa}}{\partial \mathbf{v}} - (\alpha(s) \mathbf{v}'(s))' + (\beta(s) \mathbf{v}''(s))'' = 0 \quad (2.41)$$

Para entender mejor la ecuación 2.41, se puede interpretar esta como una suma de fuerzas que se equilibran

$$\begin{aligned} a) \mathbf{F}_{externa}^{(p)} &= \frac{\partial E_{externa}}{\partial \mathbf{v}} \\ b) \mathbf{F}_{interna} &= - (\alpha(s) \mathbf{v}'(s))' + (\beta(s) \mathbf{v}''(s))'' \\ c) \mathbf{F}_{externa}^{(p)} + \mathbf{F}_{interna} &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Estas dos fuerzas gobiernan el comportamiento del modelo del contorno activo de la siguiente forma:

- La fuerza interna $\mathbf{F}_{interna}$ controla la rigidez y la tensión del modelo.
- La fuerza externa⁷ $\mathbf{F}_{externa}^{(p)}$ atrae al modelo hacia zonas de interés de la imagen, ya sean bordes, puntos, ciertos colores, etc.

Es importante aclarar que en la ecuación 2.41 se supone que $\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), \mathbf{v}'(0), \mathbf{v}'(1)$ son conocidos.

⁶ Nótese que tanto el símbolo ' como _s representan derivadas y su número de aparición es igual al grado de la derivada. También se aclara que hasta que no se indique lo contrario $\mathbf{v}(s) = \mathbf{v}$

⁷ En la fuerza externa se hace referencia a un superíndice (p), este se refiere a fuerza externa particular. Este término es utilizado por Xu [25] para distinguir otra fuerza externa que el propone, la cual se verá más adelante.

2.2.3 Métodos para resolver la ecuación de Euler-Lagrange para el modelo de contorno activo (Método de gradiente descendente).

La ecuación 2.41 es una ecuación diferencial ordinaria que por sus características tiene muchas soluciones que corresponden al mínimo local [5, 25]. Kass [11] propone una técnica para encontrar el mínimo local por medio de métodos de gradiente descendente⁸, el inconveniente con ello es que el modelo se puede perder en varios mínimos locales, aunque hay que comentar que el modelo original se creó con este propósito *ya que se desea hacer las interpretaciones de procesos de alto nivel más flexibles y no limitarlo a decisiones irreversibles de bajo nivel* [11].

Una de las consecuencias negativas de utilizar este método, es que el contorno activo debe de tener una buena inicialización, causa que ha originado el desarrollo de otras fuerzas u otros diseños [5, 25] para tener más versatilidad en este aspecto.

Como se comentaba anteriormente, la ecuación 2.41 es posible de resolver utilizando el método de gradiente descendente. Para hacerlo así se reescribe la ecuación 2.41 como:

$$-\frac{\partial \mathbf{v}(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial E_{externa}}{\partial \mathbf{v}(s,t)} - (\alpha(s)\mathbf{v}'(s,t))' + (\beta(s)\mathbf{v}''(s,t))' \quad (2.43)$$

El incluir la variable de tiempo en la ecuación 2.43 hace que ésta se vuelva dinámica, sin embargo no se incluyen en los factores de tensión $\alpha(s)$ ni de rigidez $\beta(s)$, ya que no se desea que varíen dinámicamente en el tiempo.

La razón de la ecuación 2.43 es debido a que la ecuación 2.41 garantiza que cuando existe un equilibrio, es decir que el contorno activo ha encontrado un mínimo local, el modelo no se moverá. Así, si se supone que se tiene un bosquejo del contorno que se desea cerrar⁹ y se utilizan varias iteraciones haciendo el modelo dinámico y esperando encontrar un equilibrio en donde el término $\mathbf{v}_t(s,t)$ de la ecuación 2.43 desaparezca y se cumpla la ecuación 2.41. Se aclarará este concepto una vez que se pasen las ecuaciones al espacio discreto que es lo que se hará a continuación

La ecuación 2.43 se necesita expresar en forma discreta para su implementación en software, de esta forma se utilizarán las siguientes aproximaciones y notaciones [5, 9, 12, 25]:

⁸ “El método de gradiente descendente o también conocido como el método de paso descendente, es un algoritmo que trata de encontrar el mínimo local más cercano de una función con la cual se supone se puede calcular su gradiente. El método empieza en un punto \mathbf{P}_0 y tantas veces se requiera se mueve de \mathbf{P}_i a \mathbf{P}_{i+1} minimizándose a lo largo de la línea desde \mathbf{P}_i en la dirección $-\nabla f(\mathbf{P}_i)$ ” [23]

⁹ Se entiende por bosquejo un contorno inicializado cerca del objeto que se desea cerrar, razón por la que no se puede iniciar el modelo de Kass muy lejos.

- a) $\mathbf{v}(s,t) \Rightarrow \mathbf{v}(ih,t\tau) = \mathbf{v}_i^t$
b) $\alpha(s) \Rightarrow \alpha(ih) = \alpha_i$
c) $\beta(s) \Rightarrow \beta(ih) = \beta_i$
d) $\frac{\partial E_{externa}}{\partial \mathbf{v}(s,t)} \Rightarrow \frac{\partial E_{externa}}{\partial \mathbf{v}_i^t} = \mathbf{f}_i^t$
e) $\frac{\partial \mathbf{v}(s,t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{v}_i^t - \mathbf{v}_i^{t-1}}{\tau}$
f) $\frac{\partial \mathbf{v}(s,t)}{\partial s} = \mathbf{v}'(s,t) = \frac{\mathbf{v}_i^t - \mathbf{v}_{i-1}^t}{h} = \frac{\mathbf{v}_{i+1}^t - \mathbf{v}_i^t}{h}$
g) $\frac{\partial^2 \mathbf{v}(s,t)}{\partial s^2} = \mathbf{v}''(s,t) = \frac{\mathbf{v}_{i+1}^t - 2\mathbf{v}_i^t + \mathbf{v}_{i-1}^t}{h^2}$

En donde h es una medida discreta del espacio y τ es la medida discreta del tiempo. Ahora se utilizarán todas estas aproximaciones en la ecuación 2.43, obteniendo

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathbf{v}_i^t - \mathbf{v}_i^{t-1}}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left(\alpha_i (\mathbf{v}_i^t - \mathbf{v}_{i-1}^t) - \alpha_{i+1} (\mathbf{v}_{i+1}^t - \mathbf{v}_i^t) \right) \\
& + \frac{1}{h^4} \left(\beta_{i+1} (\mathbf{v}_{i+2}^t - 2\mathbf{v}_{i+1}^t + \mathbf{v}_i^t) - 2\beta_i (\mathbf{v}_{i+1}^t - 2\mathbf{v}_i^t + \mathbf{v}_{i-1}^t) + \beta_{i-1} (\mathbf{v}_i^t - 2\mathbf{v}_{i-1}^t + \mathbf{v}_{i-2}^t) \right) \quad (2.44) \\
& + \mathbf{f}_i^{t-1}
\end{aligned}$$

La obtención de la ecuación 2.44 tiene algunas características importantes que ayudan a entender por completo el modelo. Primero, note que todos los términos correspondientes a la fuerza interna $\mathbf{F}_{interna}$, es decir todos los términos multiplicados por α y β , tienen como superíndice t , ésto es porque éstas están pensadas para que se utilicen en el *siguiente tiempo* t [9]. Esto quiere decir que se ha creado una ecuación que describe el comportamiento del modelo en el tiempo. En otras palabras, en el tiempo $t-1$ se guía al modelo hacía fuerzas externas \mathbf{f}_i^{t-1} y en el tiempo t , una iteración después de $t-1$, se ajusta el modelo por medio de los términos de *tensión* o *rigidez* correspondientes a la fuerza interna $\mathbf{F}_{interna}$. Segundo, por las razones comentadas anteriormente se desea que \mathbf{f}_i^{t-1} sea constante pues no se espera que las características de la imagen varíen. Es por esto que se ha definido con el superíndice $t-1$. Cabe resaltar que en algunos textos [25,5] se ha encontrado que \mathbf{f}_i^{t-1} se define como $\mathbf{F}_{externa}^{(p)}$ que también es correcto aunque se ha decidido en este trabajo manejarlo de la primera forma para mayor flexibilidad con los índices.

A continuación se evaluará la parte derecha de la igualdad de la ecuación 2.44 obteniendo de esta forma

$$\begin{aligned}
& \mathbf{v}_{i-2}^t \left(\frac{\beta_{i-1}}{h^4} \right) + \mathbf{v}_{i-1}^t \left(-\frac{\alpha_i}{h^2} - 2\frac{\beta_i}{h^4} - 2\frac{\beta_{i-1}}{h^4} \right) \\
& + \mathbf{v}_i^t \left(\frac{\alpha_i}{h^2} + \frac{\alpha_{i+1}}{h^2} + \frac{\beta_{i+1}}{h^4} + 4\frac{\beta_i}{h^4} + \frac{\beta_{i-1}}{h^4} \right) + \mathbf{v}_{i+1}^t \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{h^2} - 2\frac{\beta_{i+1}}{h^4} - 2\frac{\beta_i}{h^4} \right) \\
& + \mathbf{v}_{i+2}^t \left(\frac{\beta_{i+1}}{h^4} \right) + \mathbf{f}_i^{t-1}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Lo anterior se puede interpretar también de forma matricial como

$$\begin{bmatrix}
c_1 & b_1 & a_1 & & & & e_{N-1} & d_N \\
d_1 & c_2 & b_2 & a_2 & & & & e_N \\
e_1 & d_2 & c_3 & b_3 & a_3 & & & \\
& e_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
& & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & & & & e_{N-4} & d_{N-3} & c_{N-2} & b_{N-2} & a_{N-2} \\
e_{N-1} & & & & & & e_{N-3} & d_{N-2} & c_{N-1} & b_{N-1} & \\
d_N & e_N & & & & & e_{N-2} & d_{N-1} & c_N & &
\end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ v_3^t \\ v_4^t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{N-2}^t \\ v_{N-1}^t \\ v_N^t \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} f_1^{t-1} \\ f_2^{t-1} \\ f_3^{t-1} \\ f_4^{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N-2}^{t-1} \\ f_{N-1}^{t-1} \\ f_N^{t-1} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

En donde

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{\beta_{i+1}}{h^4} \\
b_i &= -\frac{\alpha_{i+1}}{h^2} - 2\frac{\beta_{i+1}}{h^4} - 2\frac{\beta_i}{h^4} \\
c_i &= \frac{\alpha_i}{h^2} + \frac{\alpha_{i+1}}{h^2} + \frac{\beta_{i+1}}{h^4} + 4\frac{\beta_i}{h^4} + \frac{\beta_{i-1}}{h^4} \\
d_i &= -\frac{\alpha_i}{h^2} - 2\frac{\beta_i}{h^4} - 2\frac{\beta_{i-1}}{h^4} \\
e_i &= \frac{\beta_{i-1}}{h^4}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Y N representa el número de puntos de control en el modelo del contorno activo.

En el modelo original propuesto por Kass [11], se consideran todas las variables α y β como constantes, de esta forma 2.46 puede volverse a representar como

$$\mathbf{v}_i^t = \left(\mathbf{A} + \frac{1}{\tau} \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{v}_i^{t-1} + \gamma \mathbf{f}_i^{t-1} \right) \quad (2.52)$$

La ecuación 2.52 es la que gobierna el comportamiento del modelo en un espacio discreto. En ésta se basan los algoritmos utilizados en este proyecto con algunas variantes para otros modelos activos paramétricos que se analizarán en el siguiente capítulo.