CAPÍTULO 2

APROXIMACIÓN DE FILTROS

2. Aproximaciones de Filtros

En el capítulo 1 se mencionaron los filtros ideales, en la realidad no se puede lograr una aproximación ideal, por lo que los filtros reales sólo pueden aproximarse a menor o mayor orden como son las aproximación Butterworth, Chebyshev, Chebyshev inversa, Elíptico, Thomson, los cuales se explicarán en este capítulo.

Un filtro es designado por una o más frecuencias de corte específicas, esto es el punto de cruce de la acción del filtro. En un lado de la frecuencia de corte, la señal es totalmente aceptada (recibe una amplificación máxima o atenuación mínima), mientras que en el otro lado la frecuencia de corte, la señal es totalmente bloqueada (recibe una amplificación mínima o máxima atenuación).

2.1 Función de Transferencia.

La principal característica de los filtros es que dependen de la frecuencia, cuando un circuito tiene un puerto en el que se le aplica la excitación y otro puerto donde se obtiene la respuesta. Por lo que se obtienen cuatro variables, dos de voltaje y dos de corriente, de esta manera se puede obtener la función de transferencia que son los coeficientes formados con dos variables, una de cada puerto.

$$\frac{Vsal(s)}{Vent(s)} \qquad \frac{Vsal(s)}{Ient(s)} \qquad \frac{Isal(s)}{Ient(s)} \qquad \frac{Isal(s)}{Ient(s)} \qquad \textbf{(2.1)}$$

En general, la función de transferencia es el coeficiente de los polinomios, es decir N(s) es la función racional. Por lo que denotamos el polinomio del numerador por A(s) y el denominador por B(s).

$$N(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \tag{2.2}$$

2.1.1 Polos y Ceros

Al sacar las raíces de A(s) de la ecuación 2.2, se obtienen los ceros de N(s), por lo que en estos valores de s, la función N(s) = 0. Al sacar las raíces de B(s), se obtienen los polos de N(s) ya que en estos valores de s, la función N(s) = ∞. Para que el filtro sea estable, los polos se deben localizar en el semiplano izquierdo del plano s, sin incluir al eje jω.

La ecuación 2.2, N(s) queda de la siguiente manera, donde s^2 es unitario y A(s) es el numerador.

$$N(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{2.3}$$

Como se mencionó antes, las raíces del polinomio del denominador se llaman los polos de la función de transferencia y se obtienen mediante la ecuación cuadrática.

$$s_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \tag{2.4}$$

La longitud de los polos esta dada por la siguiente ecuación, en otras palabras, la magnitud de los polos $|s_{1,2}|$ es la distancia del polo al origen en el plano –s, como se muestra en la figura 2.1

$$|s_{1,2}| = \left[\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_0} \qquad \textbf{(2.5)}$$

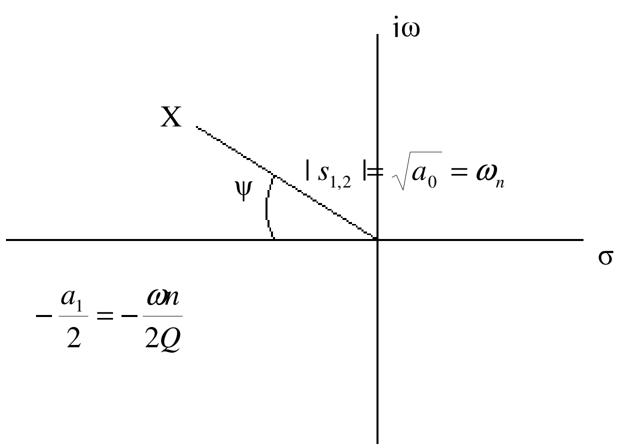

Figura 2.1 Coeficientes del denominador N(s)

2.2 Aproximación Butterworth

El filtro butterworth es el mejor término medio entre la atenuación y la respuesta en fase, también llamado filtro de Banda de paso máximamente plana. El filtro Butterworth es una de las aproximaciones más usadas, por lo que sus características son las siguientes:

1. la curva de magnitud es máximamente plana dentro de la banda de paso.
2. la curva es monotónicamente decreciente.

3. $$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \qquad \textbf{(2.6)}$$

$$|H(0)| = 1$$

$$|H(\omega = \omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1+a_N\varpi^{2n}} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Por lo que el coeficiente a_N, por lo general se le denota por ε^2

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1+\varepsilon^2\varpi^{2n}} \qquad \textbf{(2.8)}$$

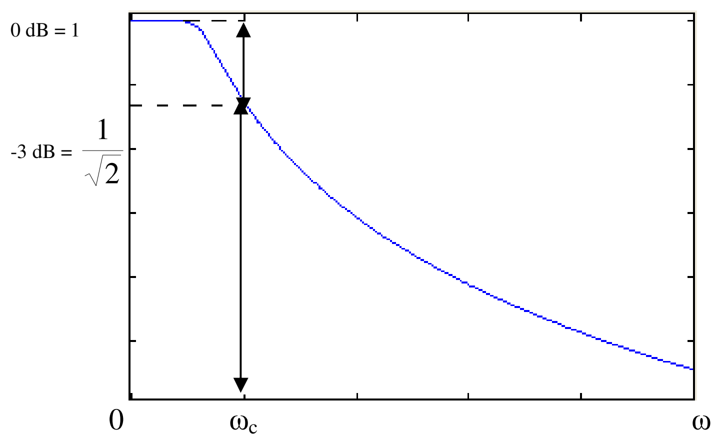

Figura 2.2 Filtro pasa – bajas Butterworth

Para determinar el valor de ε, se parte de la definición de Amax.

$$\text{Amax} = 20 \log |N(j0)| - 20 \log |N(j1)| \qquad \textbf{(2.9)}$$

$$= 20 \log \sqrt{1+\varepsilon^2}$$

Despejando ε, tenemos:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A\max}{10}} - 1} \qquad \textbf{(2.10)}$$

A partir de la ecuación (1) se deduce para llegar a la fórmula para calcular los polos del filtro Butterworth.

$$P_k = \omega_c \left(-\mathrm{Sin}\, \frac{2k-1}{2n}\pi + j\,\mathrm{Cos}\, \frac{2k-1}{2n}\pi \right) \qquad \textbf{(2.11)}$$

k = 1,2,…,2n impar k = 1,2,..,n par

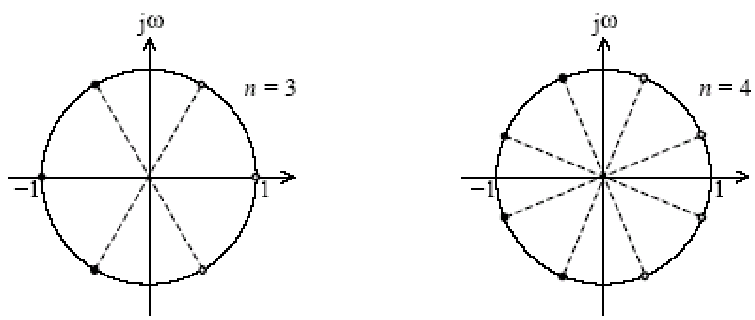

Figura 2.3 Polos Butterworth

Mediante la siguiente fórmula se puede determinar el orden del filtro, empezando por Amin que está dado por:

$$\mathrm{Amin} = 20 \log \left| N(j\omega) \right| - 20 \log \left| N(j\omega_s) \right|$$

$$= 20 \log \sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega_s^{2n}} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Despejando n, obtenemos:

$$n \geq \log\left[\frac{10^{0.1A\min} - 1}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

Ejemplo 2.1 Determinar el orden para un filtro pasa – bajas, normalizado Butterworth con una tolerancia en la banda de paso de 2 dB y una atenuación de al menos 30 dB para cualquier frecuencia mayor de 2 rad/seg. De los datos del problema se tiene lo siguiente: [2]

A_{max} = 2 dB A_{min} = 30 dB ω_c = 1 rad / seg ω_s = 2 rad / seg

De la ecuación 2.10 se obtiene $\varepsilon = 0.76478$ y al usar la ecuación 2.13, se obtiene

$$n \geq 5.37$$

El filtro que se requiere es de sexto orden.

2.3 Aproximación Chebyshev

Este tipo de aproximación se realiza mediante los polinomios Chebyshev que hace máximo el valor de Amin, puesto que en su banda de paso existen rizos, por lo que el valor de la magnitud se encuentra oscilando hasta llegar a una frecuencia de corte. Los polinomios Chebyshev son funciones de ω.

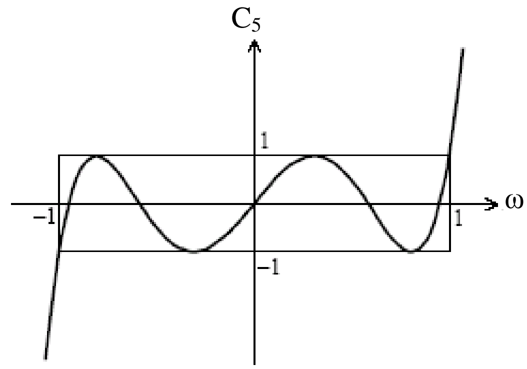

Figura 2.4 Gráfica del polinomio Chebyshev de orden 5

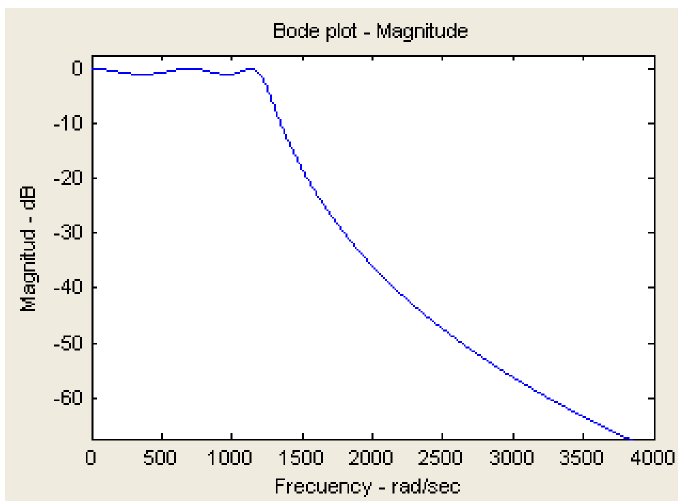

Figura 2.5 Aproximación Chebyshev

La magnitud de la respuesta en frecuencia presenta cambios de pendiente en la banda de paso y es monotónicamente en la banda de retraso. Los polinomios Chebyshev se calculan a partir de la siguiente ecuación

$$C_n(\omega) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m \frac{(m-n-1)!(2\omega)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} \qquad \textbf{(2.14)}$$

$$
\begin{aligned}
&C_1(\omega) = \omega \\
&C_2(\omega) = 2\omega^2 - 1 \\
&C_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega \\
&C_4(\omega) = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&C_{n+1}(\omega) = 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.15)}
$$

Un filtro pasa – bajas Chebyshev de orden n posee $\frac{n}{2}$ rizos dentro de la banda de paso, si n es par entonces la atenuación para ω = 0 es 3 dB. Si n es impar entonces la atenuación para ω = 0 es de 0 dB.

Usando un polinomio Chebyshev, se obtiene una función cuya magnitud tiene rizo igual en la banda de paso definida para los valores $(0 \le \omega \le \omega_c)$, por lo que la magnitud que se obtiene es la siguiente

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \qquad \textbf{(2.16)}$$

En la ecuación 2.5 se obtiene el valor de ε. Siguiendo con el procedimiento a partir de la ecuación 2.11 para llegar a la obtención de los polos, se llega a la siguiente fórmula:

$$v = \frac{1}{n} Sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \qquad \textbf{(2.17)}$$

$$P_k = Sinhv\left(-Sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + jCoshvCos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad \textbf{(2.18)}$$

k = 1,2,…,n

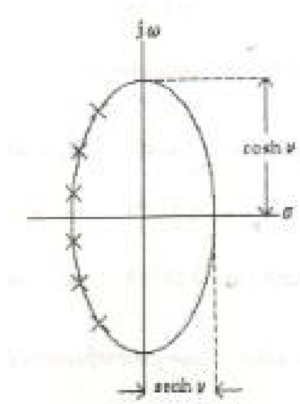

Figura 2.6 Ubicación de los polos Chebyshev

Para determinar el orden de la aproximación Chebyshev, se comienza por calcular Amin, el cual está dado por

$$A_{\min} = 20\log\left|N(j\omega)\right|_{\max} - 20\log\left|N(j\omega_s\right| \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$= 20\log\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega_s)}$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{\frac{A\min}{10}}-1}{\varepsilon^2}}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)} \qquad \textbf{(2.20)}$$

Ejemplo 2.2 Determinar el orden para un filtro Chebyshev con A_{max} = 0.5 dB, A_{min} = 25 dB, ω_c = 1700 rad / seg y ω_s = 3500 rad / seg. Para A_{max} = 0.5 dB se obtiene ε = 0.34931. De la ecuación 2.20 se obtiene n $\geq$ 3.4226. El orden que se requiere es de cuarto orden. [2]

2.4 Aproximación Chebyshev Inversa

Ésta aproximación tiene como particularidad de presentar un comportamiento máximamente plano en la banda de paso pero con una serie de perdida de polos en la frecuencia de corte, con una ondulación inversa constante, tiene ceros finitos sobre el eje jω, por lo que su realización es mas compleja, sus ventajas que tiene sobre la aproximación Chebyshev es en las características de fase.

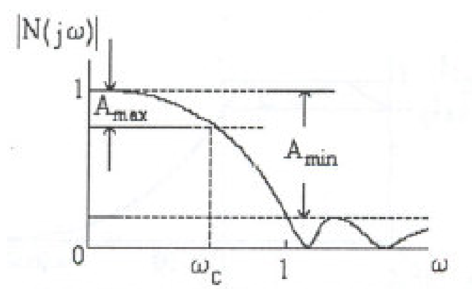

Figura 2.7 Aproximación Chebyshev Inversa

La función característica de ésta aproximación está dado por

$$\left|N_{1.C}(j\omega)\right|^2 = 1 - \left|N_C(j\omega)\right|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)} \quad \textbf{(2.21)}$$

Para obtener el orden de ésta aproximación, se debe especificar los parámetros

$$A_{\min} = 10\log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \qquad \textbf{(2.22)}$$

De la ecuación 2.17 se obtiene ε^2

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{10^{0.1A_{\min}} - 1} \qquad \textbf{(2.23)}$$

$$A_{\max} = 10\log\left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega_c}\right)}\right] \qquad \textbf{(2.24)}$$

Usando la ecuación 2.18 para eliminar ε^2 y despejando $C_n^2\left(\frac{1}{\omega_c}\right)$, tenemos

$$C_n^2\left(\frac{1}{\omega_c}\right) = \frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1} \qquad \textbf{(2.25)}$$

Despejando n, se obtiene lo siguiente

$$n_{CI} \geq \frac{Cosh^{-1}\left[\frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}\right]^{\frac{1}{2}}}{Cosh^{-1}\left(\frac{1}{\omega_c}\right)} \qquad \textbf{(2.26)}$$

Los polos de la función Chebyshev están dados por

$$p_k = \frac{1}{\sigma_k + j\omega_k} \qquad \text{k = 1,2,…,n} \tag{2.27}$$

$$v = \frac{1}{n} Senh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \tag{2.28a}$$

$$\sigma_k = -Senu_k Senhv \qquad \omega_k = Cosu_k Coshv \qquad \text{k = 1,2,…,n} \tag{2.28b}$$

Los ceros están dados por $z_k = \alpha_k + j\beta_k$, donde

$$\alpha_k = 0 \qquad \beta_k = \frac{1}{\cos u_k} \qquad \text{k = 1,2,…, n} \tag{2.29a}$$

$$u_k = \frac{2k-1}{2n}\pi \tag{2.29b}$$

Ejemplo 2.3 Obtener los polos de un filtro Chebyshev inverso con A_{max} = 1 dB en la banda de paso cuya frecuencia de corte es de 0.5 rad / seg, y cuya atenuación en la banda de rechazo es de 30 dB en la banda de rechazo que empieza en 1 rad / seg. [2]

De la ecuación 2.26, el orden es 4 y al ocupar las ecuaciones 2.27 y 2.29, se obtienen los polos y ceros.

$P_{1,2} = -0.19879 \pm j0.61799$ $P_{3,4} = -0.68363 \pm j0.36464$

$z_{1,2} = \pm j1.08239$ $z_{3,4} = \pm j2.61313$

2.5 Aproximación Elíptica

Esta aproximación también se le conoce como aproximación de Cauer porque fue desarrollada por Wilhelm Cauer, se caracteriza por tener ondulación constante, tanto en la banda de paso como en la banda de corte, la ventaja que tiene ésta aproximación es en la que se obtiene un orden menor por lo tanto tendrá un costo reducido a las aproximaciones antes mencionadas.

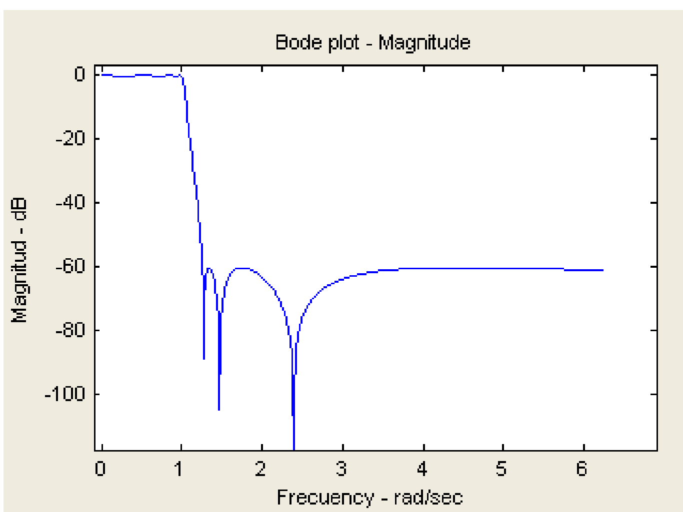

Figura 2.8 Aproximación Elíptica

Las funciones de magnitud se obtienen a partir de las siguientes ecuaciones, dependiendo si n es par o impar.

$$N_I(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(s^2 + \Omega_{Ci}^2\right)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + s^n} \qquad \textbf{(2.30a)}$$

Para n par

$$N_p(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(s^2 + \Omega_{ai}^2\right)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + s^n} \qquad \textbf{(2.30b)}$$

Para determinar el orden primero se obtiene los siguientes parámetros:

$$\Omega = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{f_s}{f_p} \qquad M = \sqrt{\frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}} \qquad \textbf{(2.31a)}$$

$$C(M) = \frac{1}{16M^2}\left(1 + \frac{1}{2M^2}\right) \qquad \textbf{(2.31b)}$$

$$D(\Omega) = \frac{\sqrt{\Omega} - 1}{2\left(\sqrt{\Omega} + 1\right)} \qquad \textbf{(2.31c)}$$

El orden está dado por:

$$n_E = F_E(C)F_E(D) \qquad \textbf{(2.31d)}$$

Donde

$$F_E(x) = \frac{1}{\pi}\ln\left(x + 2x^5 + 15x^9\right) \qquad \textbf{(2.31e)}$$

Ejemplo 2.4 Obtener el orden de un filtro elíptico pasa – bajas que satisfaga las especificaciones siguientes: [2]

1. A_{max} = 3.01 dB en la banda de 0 a 1 KHz
2. A_{min} = 22 dB frecuencias mayores de 1.3 KHz

De la ecuación 2.31a, se obtiene Ω = 1.3 y M = 12.5495

De la ecuación 2.31b, se obtiene:

$$C(M) = \frac{1}{16*12.5495^2}\left(1 + \frac{1}{2*12.5495^2}\right) = 0.0003981$$

D (Ω) = 0.03275

$F_E(D) = -1.0828$

$F_E(C) = -2.4920$

$n = 2.698$

2.6 Aproximación Thomson

Hasta ahora las aproximaciones que se han visto, no toman en cuenta la fase ni en el dominio del tiempo, esto se debe a que es mas importante el filtrado de la magnitud como por ejemplo, para aplicaciones de audio frecuencia o filtrado de voz, la fase es de menor importancia, esto se debe a que el oído humano no es capaz de percibir los cambios de fase. En comunicaciones digitales o video la fase es muy importante como en la aproximación Thomson, por lo que se deben tener las fases lo más lineales posible para que las señales tarden el mismo tiempo en ser procesadas.

Para encontrar los coeficientes de N(s) pasa bajas con ganancia unitaria

$$N(s) = \frac{a_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad \textbf{(2.32a)}$$

En el siguiente procedimiento, se encuentran los polinomios de los coeficientes del denominador a los que se le llaman polinomios de Bessel

$$a_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}\,k!\,(n-k)!} \qquad k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad \textbf{(2.32b)}$$

n es el grado del polinomio del denominador y el coeficiente s^2 es la unidad. Los polinomios de Bessel se denotan por B(s).

$$B_n(s) = (2n-1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \qquad \textbf{(2.33)}$$

El orden se calcula de la siguiente manera:

$$n \geq \frac{5 \log e(\omega T)^2}{A(\omega)} + \frac{1}{2} \qquad \textbf{(2.34)}$$

El error de retraso de grupo se obtiene de la siguiente manera:

$$D(\omega) = \frac{e^{-(\omega t)^2 / (2n-1)} (\omega T)^{2n}}{a_0^2} \qquad \textbf{(2.35)}$$

Ejemplo 2.5 Encontrar el orden y la función de transferencia para un filtro Thomson con un retraso de grupo de 10 μs a bajas frecuencias y una desviación menor de 1% para f ≤ 20 kHz. La atenuación deberá ser cero a cd y no debe exceder 1 dB, para el rango de frecuencias que va hasta 20 kHz. [2]

De la ecuación 2.34 se obtiene n ≥ 3.92, por lo que el orden requerido es 4.

De la ecuación 2.35 D(ω) = 4.48 x 10^{-4}

Por lo que la función de transferencia esta dada por

$$N(s) = \frac{105}{s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105}$$

2.7 Orden de un Filtro

Cuando se tienen un mayor número de componentes en las aproximaciones antes mencionadas se podrá saber el orden del filtro. Si el filtro es de un orden mayor, mas se acercará al filtro ideal. En la figura 2.9 se observa la aproximación Butterworth hasta el orden 6. La frecuencia de corte se realiza de manera rápida con una pendiente mas pronunciada.

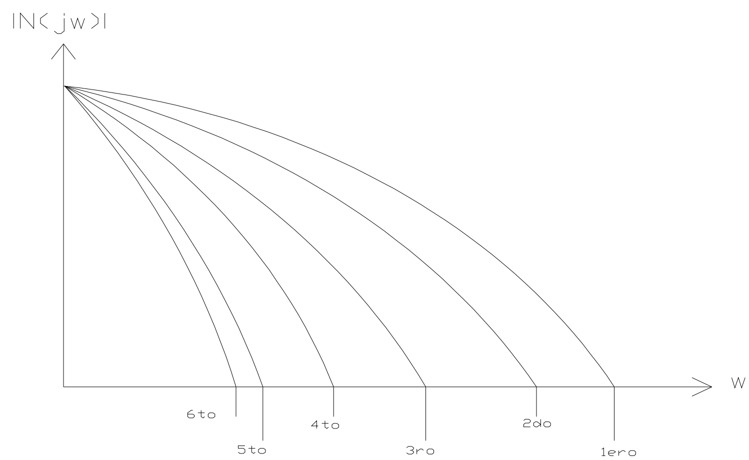

Figura 2.9 Aproximación Butterworth hasta sexto orden

2.8 Realización del Circuito Escalera.

El último paso en el proceso de síntesis de un filtro es la obtención de un circuito que realice la función deseada. Este circuito puede ser pasivo o activo. El tipo de realización pasiva más útil y popular es la realización con topología en escalera. [2] El circuito escalera está formado por capacitores e inductores.

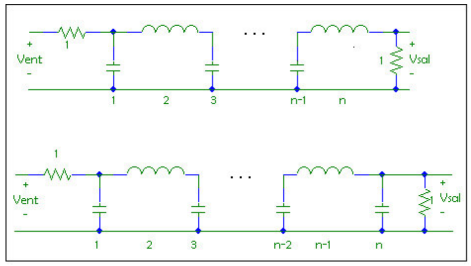

Figura 2.10 Circuito Escalera

2.9 Factor de Calidad Q

Este valor esta dado para cualquier capacitor, inductor o cualquier circuito. Si el factor de Calidad Q es muy grande significa que habrá pocas pérdidas y una gran eficiencia para el circuito, en el caso contrario si Q es muy pequeña habrá demasiadas pérdidas para los elementos o del circuito. El valor de Q para un circuito se calcula mediante la siguiente ecuación.

$$Q = \frac{Fc}{BW} \tag{2.36}$$

De donde

Fc = Frecuencia central

BW = ancho de banda

La manera más sencilla de realizar filtros activos es cascar etapas de segundo orden, cada etapa realiza un par de polos complejos conjugados, hasta completar el orden necesario de la función de transferencia, en el caso de orden par. En el caso de orden impar, será necesario añadir una etapa de primer orden que sólo realice un polo real.

Las ecuaciones que se mencionarán a continuación se utilizarán para las realizaciones activas.

De la ecuación 2.3, antes mencionada, el denominador se escribe en términos de Q y ω_n, por lo que nuestra ecuación queda así.

$$N(s) = \frac{A(s)}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2} \qquad \textbf{(2.37)}$$

Por lo que Q y ω_n, se calculan de la siguiente manera.

$$\omega_n = \sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2} \qquad \textbf{(2.38)}$$

$$Q = \frac{\omega_n}{2|\sigma_k|} \qquad \textbf{(2.39)}$$

Donde: σ_k es la parte real del polo y ω_n es la parte imaginaria del polo.

A(s) está dada de la siguiente manera

	Pasa Bajas	Pasa Altas	Pasa Bandas
A(s)	$H_0\omega_n^2$	$H_0 s^2$	$H_0 \frac{\omega_0}{Q} s$

Donde H_0 es la magnitud de la ganancia.