

Capítulo III. Procesamiento de Señales

Hoy en día el procesamiento digital de señales (PDS o DSP por sus siglas en inglés *Digital Signal Processing*) es una parte importante de la vida cotidiana. Es una de las tecnologías más poderosas debido al uso tan amplio que se le ha dado. Algunos ejemplos en donde este procesamiento ha tenido un gran desarrollo son en aplicaciones militares como lo son el radar y el sonar, en la medicina con las tomografías usando los rayos X, en las comunicaciones con el empleo del multiplexado permitiendo la comunicación de varios usuarios usando el mismo canal, en la industria de la música por ejemplo el disco compacto, sólo por mencionar algunos. En fin el procesamiento digital de señales es un área muy amplia.

Las técnicas, algoritmos y funciones matemáticas que logran la manipulación de las señales después de haber sido convertidas a un formato digital, son el procesamiento digital de señales.

En la mayoría de los casos, estas señales se originan de los datos que recolectan sensores como los transductores, estos datos pueden ser vibraciones sísmicas, imágenes, ondas sonoras etc.

3.1 Transductores

Un transductor se define, en manera muy general, como el dispositivo que recibe energía de un sistema y la retransmite, por lo general en una forma distinta, a otro sistema. [7]

La energía transmitida por estos sistemas puede ser de cualquier forma, como eléctrica, mecánica o acústica. Puede ser de la misma o diferentes formas en varios sistemas de entrada y salida. Esta amplia definición puede incluso ser aplicada a dispositivos que convierten energía eléctrica en movimiento. [7]

Los términos transductor y sensor empleados en instrumentación electrónica, muestran la magnitud de un estímulo aplicado convertido a una señal eléctrica proporcional a la cantidad de estímulo. Las variaciones de este fenómeno usualmente varían con respecto al tiempo. [7]

En la industria y la medicina los transductores miden presión, fuerza, velocidad y aceleración, flujo, sonido, temperatura, parámetros químicos como el pH, impedancia eléctrica y muchos más. [7]

3.1.1 Transductores de vibración

En general, las vibraciones mecánicas son movimientos oscilatorios de una masa con respecto a un punto de referencia. Este movimiento puede caracterizarse en términos de las siguientes definiciones: [7]

Desplazamiento: es una magnitud vectorial. El vector que representa al desplazamiento tiene su origen en la posición inicial, su extremo en la posición final y su módulo es la distancia en línea recta entre la posición inicial y la final, medida en metros.

Velocidad: magnitud que expresa la variación de posición de un objeto en función de la distancia recorrida en la unidad de tiempo, medido en metros/segundo.

Aceleración: magnitud vectorial que relaciona los cambios en la velocidad con el tiempo que tardan en producirse. Un móvil está acelerando mientras su velocidad cambia, medido en metros/segundo².

La elección de qué parámetro utilizar para una medición en particular depende de la naturaleza de la vibración y el propósito de la medición. Mientras que el desplazamiento se prefiere para vibraciones de baja frecuencia, los acelerómetros se prefieren para medir vibraciones a altas frecuencias.

Los transductores de vibración empleados en mayor escala son los acelerómetros piezoeléctricos. Estos producen una salida eléctrica que es directamente proporcional a la aceleración de la vibración a la que fueron sujetos. Sus principales ventajas son: su tamaño pequeño, amplio rango de frecuencia y su larga durabilidad debido a que no necesitan mantenimiento. [7]

La piezoelectricidad es un efecto presentado en ciertos cristales que al ser sometidos a una tensión mecánica, adquieren una polarización eléctrica en su masa, apareciendo una diferencia de potencial y cargas eléctricas en su superficie.

Este fenómeno también puede presentarse de manera inversa, es decir, pueden deformarse al someterse a un campo eléctrico.

El efecto piezoeléctrico es reversible, una vez retirado el campo eléctrico al que el cristal fue sometido, recupera su forma original.

3.2 Análisis de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier se interesaba en la propagación del calor y en 1807 presentó un trabajo el cual tenía la controversial propuesta que afirmaba que cualquier señal continua periódica podría representarse como la suma de ciertas señales senoidales seleccionadas apropiadamente. [8]

Una función periódica no senoidal puede ser descompuesta en la suma de una función senoidal de la frecuencia fundamental y de otras funciones senoidales, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Estas funciones adicionales son conocidas como componentes armónicos o simplemente como armónicos.

Mientras mayor sea el número de armónicos o componentes senoidales que se utilizan, mayor será la precisión en la aproximación de la señal que se quiere representar.

En la figura 21 hay varias gráficas, la señal original, una serie de señales de armónicos y del lado derecho la señal con la suma de armónicos, cada una tiene más armónicos que el anterior. Según se aumenta el número de armónicos, se observa cómo se asemeja más a la función original.

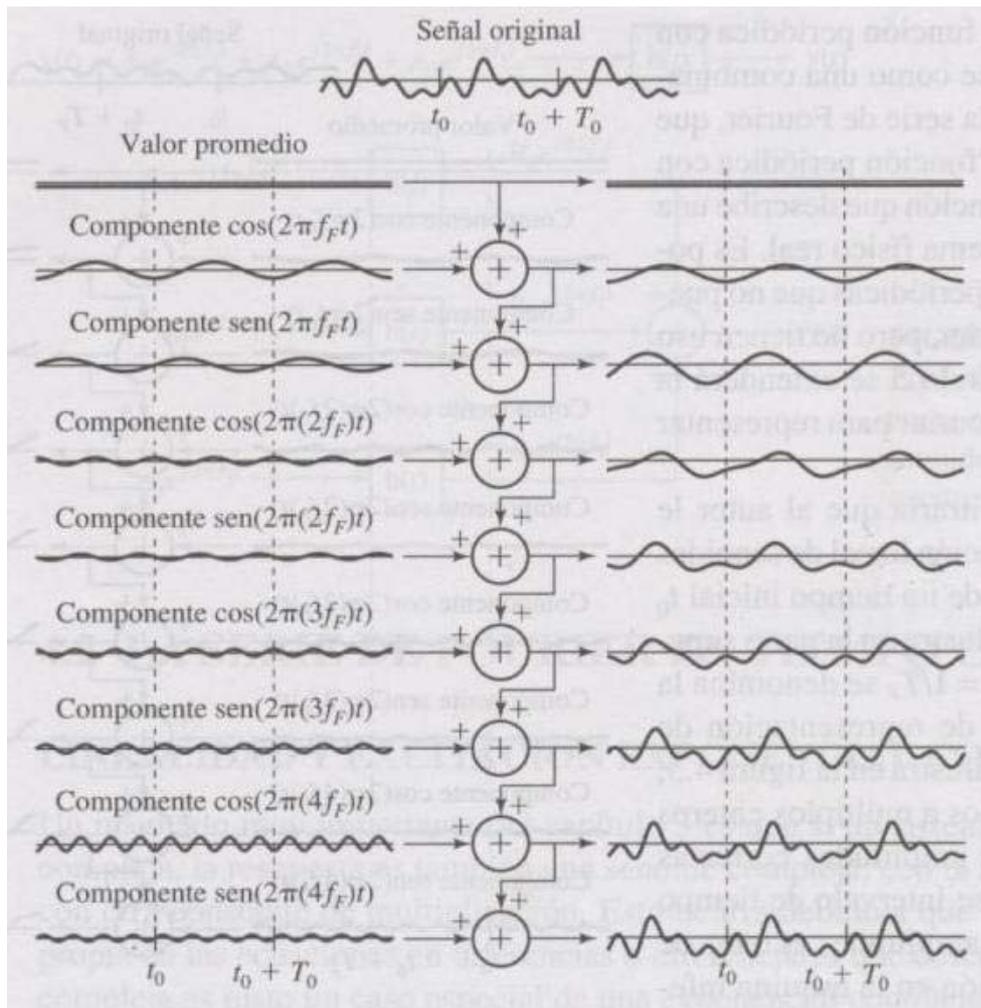


Figura 1. Aproximación de una señal con armónicos.

Una señal puede ser continua o discreta y al mismo tiempo periódica o aperiódica. Esta combinación genera 4 categorías de señales. El análisis de Fourier abarca el análisis de cada una de estas categorías para las cuales cada una tiene un nombre específico. En la figura 22 se pueden observar las 4 categorías.

Tipo de Transformada	Ejemplo de la Señal
Transformada de Fourier <i>señales continuas y aperiódicas</i>	
Serie de Fourier <i>señales continuas y periódicas</i>	
Transformada de Fourier en Tiempo Discreto <i>señales discretas y aperiódicas</i>	
Serie Discreta de Fourier <i>señales discretas y periódicas</i>	

Figura 2. Tabla de transformadas con su tipo de señal. [8]

Sin embargo, existe un quinto método el cual es empleado cuando se utiliza una computadora debido a la necesidad de trabajar con un número finito de muestras. Para la presente tesis se utilizó esta parte, la parte de la transformada discreta de Fourier o DFT (por sus siglas en inglés **Discrete Fourier Transform**) que es la que presenta la combinación de una señal discreta y periódica con un número finito de muestras. Existe también un algoritmo empleado para calcular con una mayor velocidad la DFT llamado transformada rápida de Fourier.

3.2.1 Análisis de Fourier en tiempo continuo

Una señal continua es aquella señal que posee un valor en cada instante de tiempo, en la naturaleza encontramos ejemplos de estas señales en el sonido, la corriente y la luz.

3.2.1.1 Serie de Fourier

El desarrollo de la serie de Fourier busca representar cualquier función continua y periódica $x(t)$ como una suma de senos y cosenos, llamada forma trigonométrica (ecuación 1) o bien, en modo como un sumatorio de $e^{j\omega_0 t}$ llamada forma compleja (ecuación 2). Puesto que cualquier función senoidal se puede expresar en forma de exponencial compleja. Para una señal periódica definimos el desarrollo en serie de Fourier como:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \end{aligned} \quad (1)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2)$$

La siguiente ecuación muestra la relación existente entre la frecuencia fundamental ω_0 y el periodo T .

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Los coeficientes desconocidos en la serie de Fourier se denominan: coeficientes de Fourier. Su evaluación se explica a continuación.

Para calcular el coeficiente a_0 se integra cada lado de la ecuación 1 en un período completo, quedando de la siguiente forma:

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] dt$$

Recordando algunas identidades:

$$\int_0^T \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^T \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^T \sin(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (5)$$

$$\int_0^T \sin(k\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (k \neq n) \quad (6)$$

$$\int_0^T \cos(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (k \neq n) \quad (7)$$

Y para $(k = n)$:

$$\int_0^T \sin^2(n\omega_0 t) dt = \frac{T}{2} \quad (8)$$

$$\int_0^T \cos^2(n\omega_0 t) dt = \frac{T}{2} \quad (9)$$

Identidad de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (10)$$

Por lo tanto, después de integrar la ecuación 1 y tomando en cuenta las identidades 3 y 4 se obtiene:

$$\int_0^T f(t)dt = a_0 T$$

Y despejando:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$$

Para calcular a_n tenemos que se multiplica cada lado de la ecuación 1 por $k\omega_0 t$ y se integran ambos lados de la ecuación en un período completo quedando:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t) dt &= \int_0^T a_0 \cos(k\omega_0 t) dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &+ \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(k\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Usando las identidades 4, 5, 7 y 9 se obtiene:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (11)$$

De manera similar se puede calcular b_n quedando:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (12)$$

3.2.1.2 Forma compleja de la serie de Fourier

Para obtener la amplitud de cada componente de frecuencia es necesario tomar en cuenta tanto a_n como b_n , la relación de estos con la amplitud esta dada por $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Es posible también, obtener directamente la amplitud usando una forma de la serie de Fourier en donde cada término es una función coseno con un ángulo de fase, es decir su forma compleja (ecuación 2).

Teniendo en cuenta la identidad de Euler se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin \theta = -j \frac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

Por lo tanto si se toma lo anterior y se aplica a la forma trigonométrica de la serie de Fourier (ecuación 1) se obtiene:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{jn\omega_0 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t} \frac{a_n + jb_n}{2} \right)$$

Ahora se define una constante compleja c_n :

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

En donde, debido a las ecuaciones 11 y 12 se tiene:

$$a_{-n} = a_n$$

$$b_{-n} = -b_n$$

Entonces:

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Por lo tanto:

$$c_n = c_{-n}^*$$

Y

$$c_0 = a_0$$

Ahora se puede expresar $f(t)$ como:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

Si se cambian los límites de integración a la segunda sumatoria de $[1, \infty]$ a $[-1, -\infty]$ y agrupando se obtiene la forma compleja de la serie de Fourier (ecuación 2).

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Para poder evaluar c_n se sustituyen las ecuaciones 11 y 12 en la ecuación 13 se

obtiene:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Usando los equivalentes exponenciales del seno y coseno se llega a:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Con la forma compleja se pueden reemplazar las dos integrales de la forma trigonométrica de la serie de Fourier para encontrar los coeficientes en una sola integral que es casi siempre más sencilla.

La relación existente entre los coeficientes de Fourier en su forma compleja está dada por:

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n| = 2|c_{-n}| = |c_n| + |c_{-n}|$$

3.2.1.3 Transformada de Fourier

A diferencia de la serie de Fourier, la transformada de Fourier busca la representación de una señal continua tanto periódica como aperiódica. La diferencia fundamental entre una señal periódica y una aperiódica radica en que la periódica se

repite en un tiempo finito T_0 , denominado período fundamental. Una señal aperiódica puede repetir un patrón varias veces dentro de algún tiempo finito pero no durante todo el tiempo.

La transición entre la serie de Fourier y la transformada de Fourier se lleva a cabo al encontrar la forma de la serie de Fourier para una señal periódica para luego dejar que el periodo fundamental tienda a infinito.

Comenzando con la forma exponencial de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Donde:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (14)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (15)$$

Ahora se hace:

$$T \rightarrow \infty$$

Tomando en cuenta lo anterior, en la ecuación 15, ω_0 se hace muy pequeño por lo tanto:

$$\omega_0 \rightarrow d\omega$$

Con lo que se llega a:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$$

Finalmente, la frecuencia para cada armónico debe de corresponder a la frecuencia fundamental y para lograrlo, n debe tender a ∞ mientras ω_0 se acerca a cero para que:

$$n\omega_0 \rightarrow \omega$$

Cuando se aplican las consideraciones anteriores a la ecuación 14 y se multiplican ambos lados de la ecuación por T se llega a:

$$c_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

La parte derecha es una función de ω y se representa con $F(j\omega)$, quedando la transformada de Fourier como:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16)$$

Utilizando nuevamente la forma exponencial de la serie de Fourier, multiplicando y dividiendo la parte de la sumatoria por T :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T}$$

Reemplazando $c_n T$ por $F(j\omega)$ y empleando las mismas consideraciones del proceso anterior se llega a:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17)$$

Siendo la ecuación 17 la transformada inversa de Fourier. Las ecuaciones 16 y 17 son conocidas como el par de la transformada de Fourier.

3.2.2 Análisis de Fourier en tiempo discreto

Una señal discreta es una señal discontinua en el tiempo que está definida para N puntos dentro de un rango determinado. Su importancia radica en que las computadoras y los microchips emplean solamente señales discretas pero también en la naturaleza se pueden encontrar ejemplos de este tipo de señales, por ejemplo el ritmo cardiaco o el rebote de una pelota.

Todo el análisis de Fourier anteriormente descrito se realiza para señales continuas, para las señales discretas existe también un análisis con las mismas ventajas que en tiempo continuo. El desarrollo en tiempo discreto es paralelo al del tiempo continuo, teniendo la serie discreta de Fourier y la transformada discreta de Fourier en tiempo discreto [10]

3.2.2.1 Transformada discreta de Fourier

Una de las aplicaciones mas importantes de la transformada discreta de Fourier es su uso como una aproximación a la transformada discreta de Fourier en tiempo discreto limitando la señal a un intervalo finito, a este proceso de limitación se le conoce como ventaneo. [10]

La transformada discreta de Fourier se define por el par de transformadas:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N} \quad 0 \leq n \leq N \quad (18)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad 0 \leq n \leq N \quad (19)$$

Siendo la ecuación 18 la transformada discreta de Fourier y la ecuación 19 su inversa.

3.2.2.1 Transformada rápida de Fourier

Para calcular la transformada discreta de Fourier se requieren N^2 operaciones, por lo tanto el número de cálculos aumenta de manera exponencial. En 1965 Cooley y Tuckey publicaron un algoritmo que reduce drásticamente el número de operaciones requeridas para calcular la transformada discreta de Fourier, a este algoritmo se le conoce como la transformada rápida de Fourier o FFT (por sus siglas en inglés **Fast Fourier Transform**). [10]

Su importancia es la rapidez con la que hace el cálculo, importante en aplicaciones como: ecualización y filtrado en equipos de audio/vídeo en tiempo real, comunicaciones, etc.

La diferencia de velocidad de cálculo entre la tradicional transformada discreta y la FFT aumenta según aumenta el número de muestras a analizar, según se puede apreciar en la figura 23, ya que mientras una aumenta el número de operaciones necesarias para la resolución de forma exponencial, la otra lo hace de forma prácticamente lineal.

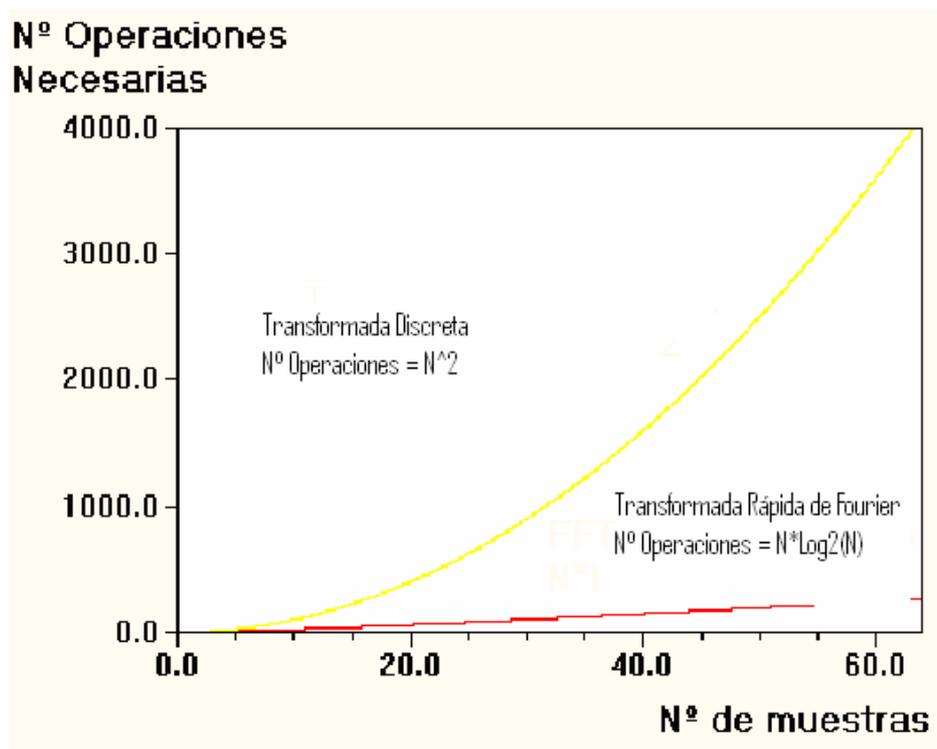


Figura 3. Gráfica comparativa de rapidez.

Como se puede observar, la diferencia de velocidad es enorme por lo tanto actualmente, éste algoritmo es empleado en gran medida.

En el presente proyecto se emplea este algoritmo debido a que el paquete matemático *Matlab* lo utiliza para el análisis de la transformada discreta de Fourier.