

# Capítulo IV. Modelo de transmisión inalámbrica de energía

## 4.1. Análisis del transformador ideal

Un transformador ideal es un dispositivo sin pérdidas que tiene un devanado de entrada y un devanado de salida [1], tal como lo indica la figura 4.1. Se considera ideal siempre y cuando cumpla con las siguientes propiedades:

1. La resistencia del alambre de los embobinados son despreciables.
2. Todo el flujo esta confinado dentro del núcleo y enlaza a ambos devanados, con lo que se afirma que no existen flujos dispersos. Las pérdidas por el núcleo son despreciables.
3. La permeabilidad del núcleo es infinita, por lo que la corriente de excitación necesaria para establecer un flujo en el núcleo es despreciable, esto es, la fuerza magnetomotriz neta requerida para establecer un flujo en el núcleo es cero.

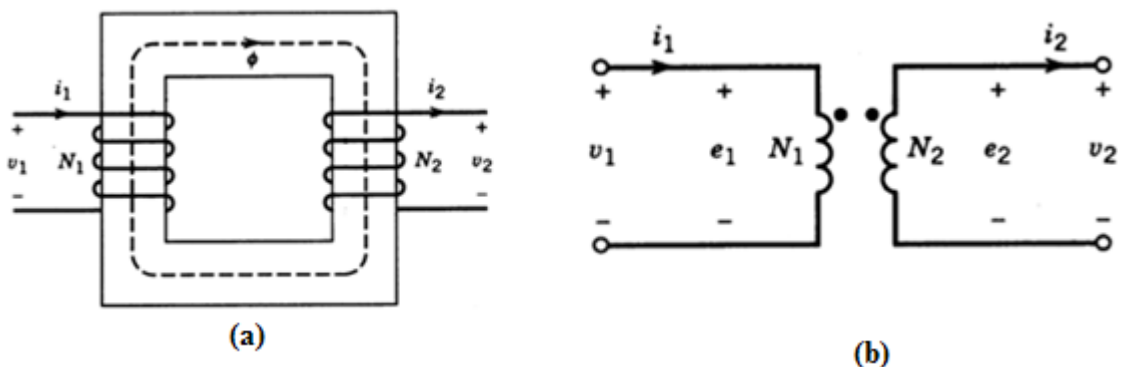


Figura 4. 1 (a) Sección transversal del transformador. (b) Modelo ideal del transformador

Cuando el devanado primario de la figura 4.1a se conecta a una fuente de voltaje variable en el tiempo  $v_1$ , se establece en el núcleo un flujo  $\phi$  que es de igual manera variable en el tiempo. Se establecerá entonces un voltaje inducido  $e_1$ , de acuerdo a la ley de Faraday igual a

$$v_1 = e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

El flujo del núcleo enlaza también al devanado secundario, por lo que inducirá un voltaje  $e_2$ , que es igual al voltaje  $v_2$ , ya que no se consideran pérdidas por la resistencia del alambre o flujos dispersos. Este voltaje tendrá la forma

$$v_2 = e_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

La relación que existe entre ambos voltajes es

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (4.1)$$

Con lo que se establece la relación de vueltas entre ambos devanados. En la figura 4.1b se muestra el símbolo esquemático del transformador ideal.

## 4.2. Análisis transformador con entrehierro

Por medio de los conceptos de circuitos magnéticos y su analogía con circuitos eléctricos, podemos escribir ecuaciones que nos permitan establecer un modelo de transformador que considere a la permeabilidad finita, debido a que al introducir un entrehierro, la permeabilidad se reduce significativamente. Aún cuando en este modelo de

transformador, el devanado secundario se encuentre abierto (sin condición de carga) el devanado primario presenta cierta corriente, conocida como la corriente de excitación [8], que se verá, esta asociada a la corriente de salida del convertidor Clase E.

Se parte de la configuración mostrada en la figura 4.2, donde se muestra al núcleo tipo E, cuyas mitades se encuentran separadas por un entrehierro. Esta configuración muestra un embobinado en la pierna inferior del núcleo, al cual se le aplicará un voltaje  $v_1$ , que establecerá una corriente en el conductor. De esta manera se establecerá un campo magnético y un flujo magnético por consiguiente, el cual se pretende induzca un voltaje  $v_2$  en el embobinado que se encuentra en la pierna superior.

Para facilitar el análisis es preciso expresar a este circuito magnético en su analogía con un circuito eléctrico, tal como se muestra en la figura 4.2b. El número de vueltas y la corriente de ambos embobinados representan fuerzas magnetomotrices, las cuales generan un flujo magnético  $\phi$  que esta limitado por el valor de la reluctancia del núcleo. En este circuito magnético, la reluctancia equivalente involucra también a las reluctancias que existen entre las mitades del núcleo. Estas reluctancias del aire están expresadas en función de la longitud de separación entre las mitades, la cual representa la distancia de transmisión de energía y se puede escribir con la siguiente expresión

$$\mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_0 A} \quad 4.2$$

Donde  $l_g$  representa la longitud de la separación entre las mitades, y  $A$  representa el área de sección transversal en el aire, la cual se considerará igual al área de sección transversal de la columna del núcleo.

El circuito de la figura 4.2b se puede expresar por medio del circuito equivalente reducido de la figura 4.2c. El valor de esta reluctancia se calculó a partir de las ecuaciones (3.15) y (3.18).

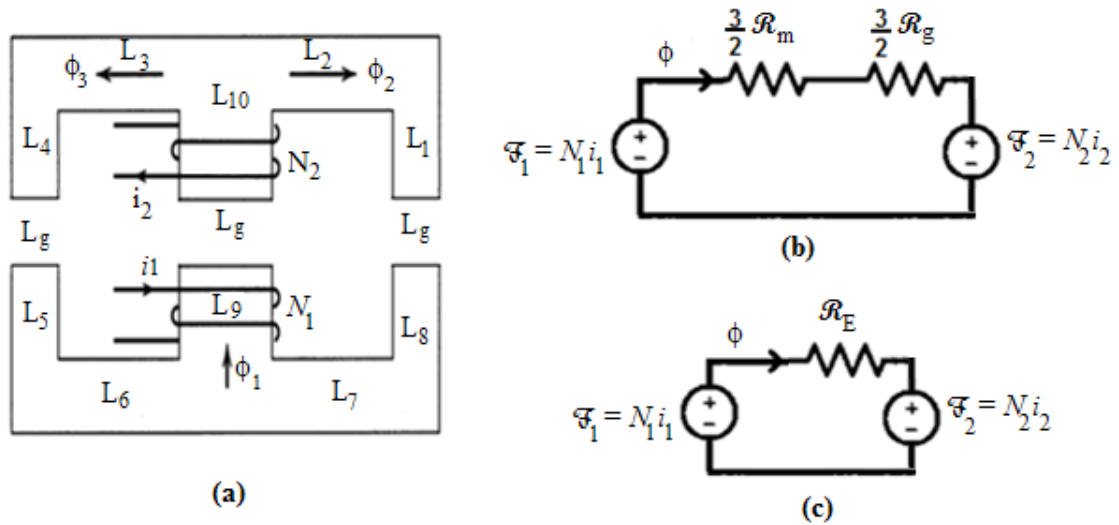


Figura 4. 2 (a) Transformador con núcleo tipo E y entrehierro. (b) Análogo eléctrico reducido. (c) Análogo eléctrico equivalente

Partiendo del circuito de la figura 4.2c, el valor del flujo magnético  $\phi$  contenido en el núcleo, estableciendo que la fuerza magnetomotriz  $N_1 i_1$  es mayor que la fuerza magnetomotriz  $N_2 i_2$ , esta dado por la siguiente expresión

$$\phi = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\mathcal{R}_E} = \frac{N_1 i_m}{\mathcal{R}_E} \quad (4.3)$$

Donde  $N_1$  es el número de vueltas en el devanado primario

$N_2$  es el número de vueltas en el devanado secundario

$i_1$  es la corriente en el devanado primario

$i_2$  es la corriente en el devanado secundario

$\mathcal{R}_E$  es la reluctancia equivalente de ambas mitades considerando el entrehierro

$i_m$  es la corriente magnetizante la cual se expresa de la siguiente manera

$$i_m = i_1 - \frac{N_2}{N_1} i_2 \quad (4.4)$$

Si se desprecian los flujos dispersos existentes en los núcleos, así como la resistencia intrínseca al alambre del embobinado y las pérdidas por calentamiento del núcleo, la expresión para el voltaje  $v_1$  y  $v_2$ , partiendo de la Ley de Faraday ( $e_{ind} = N_x \frac{d}{dt} \phi_x$ ) queda de la siguiente manera

$$v_1 = L_m \frac{d}{dt} i_m \quad (4.5)$$

$$v_2 = \frac{N_2}{N_1} L_m \frac{d}{dt} i_m = \frac{N_2}{N_1} v_1 \quad (4.6)$$

El inductor  $L_m$  equivale a la inductancia magnetizante y se expresa de la siguiente manera

$$L_m = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_E} \quad (4.7)$$

Las ecuaciones (4.5) y (4.6) nos permiten representar al transformador por medio de un modelo el cual solo considera la inductancia magnetizante como se indica en la figura 4.3. Esta inductancia se obtiene a partir del número de vueltas del devanado primario y la reluctancia de ambas mitades considerando la separación, con el fin de tener la misma respuesta que el inductor de la red de carga del convertidor clase E. De esta manera podemos considerar a la inductancia magnetizante del modelo del transformador propuesto como el inductor del convertidor Clase E tal como lo indica la figura 4.4.

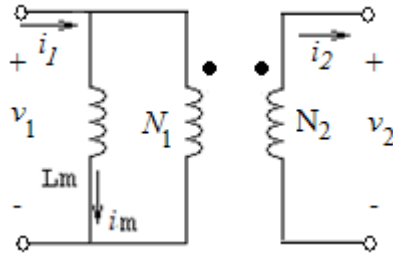


Figura 4. 3 Modelo propuesto de transformador con entrehierro.

Si bien el inductor estará formado por un número de vueltas fijo enrolladas en una de las mitades del núcleo, el valor del inductor será diferente conforme alejemos o acerquemos la otra mitad, la cual tendrá también un número determinado de vueltas. Esta variación en la inductancia se debe a la variación de la longitud de separación, que ocasiona una variación en la permeabilidad efectiva de todo el núcleo, ecuación (3.17). Esta variación en la permeabilidad efectiva causará una variación en el valor de la reluctancia dada por la ecuación (3.18). Al variar el valor de la reluctancia el valor de la inductancia variará, partiendo de un determinado valor cuando las mitades estén unidas, y disminuyendo conforme las mitades se alejan. Este efecto es importante porque el convertidor Clase E tiene una resonancia para determinados valores de capacitor, resistencia e inductor en la red de carga. Al variar el valor de la inductancia cambiaremos la resonancia en la red de carga, causando entonces una respuesta diferente del convertidor clase E, tal como se indicó en el capítulo 1.

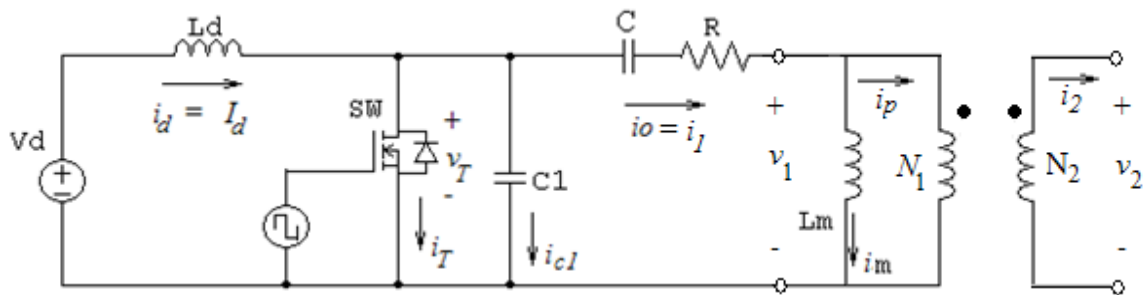


Figura 4. 4 Modelo del transformador/Clase E,

Del análisis del convertidor Clase E se sabe que la corriente  $i_1$ , así como el voltaje en el inductor  $v_1$  tienen forma senoidal. En este modelo se establece que el voltaje  $v_2$  es igual al voltaje  $v_1$  multiplicado por la relación de transformación, ecuación (4.1). Nos establece además que la corriente de salida  $i_1$  se divide en la corriente magnetizante  $i_m$  y la corriente  $i_p$  (figura 4.4). El valor de  $i_p$  es igual a  $i_2$  multiplicado por la relación de transformación. Si bien este modelo nos permite establecer a la inductancia magnetizante como parte de la inductancia de la red de carga del convertidor Clase E, la relación entre voltaje en el devanado secundario y el voltaje en el primario sigue siendo  $N_2/N_1$ , lo cual es válido cuando la longitud del entrehierro es relativamente pequeña.

### 4.3. Consideraciones para el embobinado

En la presente tesis, la elección del número de vueltas presenta dos limitantes. La primera es el tamaño del dispositivo receptor y la segunda es que de acuerdo a la elección del núcleo por su tamaño, la inductancia elegida tiene que proporcionarnos valores de resistencia de la red de carga del convertidor clase E mayores a 1 ohm, de acuerdo a la expresión  $\omega L_m/R = Q_L$ , ecuación (1.8). La elección de un valor mayor a 1 ohm se realiza en base a la observación en la práctica, ya que diseños con resistencias menores a 1 ohm, tanto en simulación como en implementación mostraron un comportamiento diferente al esperado.

Con respecto al tamaño del núcleo requerido, el número de vueltas posibles para determinado calibre del conductor puede estar limitado. El número de vueltas máximo posible dependerá del calibre del alambre, el cual a su vez depende de la corriente que

porte (ver apéndice C), y del tamaño de la ventana de embobinado del carrete, figura 4.5. Esta medida es proporcionada por los fabricantes de los núcleos, tal como lo indica la hoja técnica del núcleo RM14/I, del apéndice D.

En la figura 4.5 se observan dos medidas  $b_w$  y  $h_w$  que nos permitirán conocer el número total de vueltas posibles para determinado calibre de alambre. La manera de conocer el número de vueltas posibles en un carrete es a partir del término *copper fill factor*, o factor de llenado de cobre  $k_{Cu}$ , el cual nos indica que tanto espacio de la ventana de embobinado se ocupará. Este está dado por la siguiente expresión

$$k_{Cu} = \frac{NA_{Cu}}{A_w} \quad (4.8)$$

Donde N equivale al número de vueltas

$A_{Cu}$  es el área del cobre

$A_w$  es el área de embobinado del núcleo.

El área del embobinado, como ya se mencionó, es un valor que los fabricantes de núcleos de ferrita proporcionan, sin embargo es fácil calcularlo si observamos la figura 4.5, en donde  $h_w$  equivale a la altura del embobinado, y  $b_w$  equivale a la longitud del embobinado. De esta manera el área  $A_w = h_w b_w$ .

Se debe tomar en cuenta que para realizar la transmisión de energía requerimos de una parte emisora y de otra receptora. La parte emisora es únicamente la mitad del núcleo completo (figura 4.6a) con su respectiva mitad de carrete, tal como lo indica la figura 4.6b. Por lo tanto, para propósitos de la presente tesis, la ecuación (4.8) deberá de ser



modificada considerando únicamente la mitad del área de embobinado tal como se muestra a continuación

$$k_{Cu} = \frac{NA_{Cu}}{A_w/2} \quad (4.9)$$

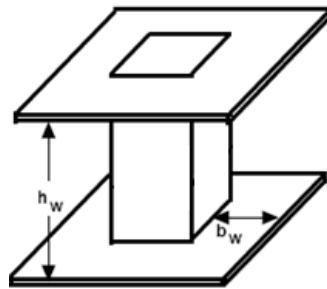


Figura 4.5 Dimensiones de un carrete cuadrado

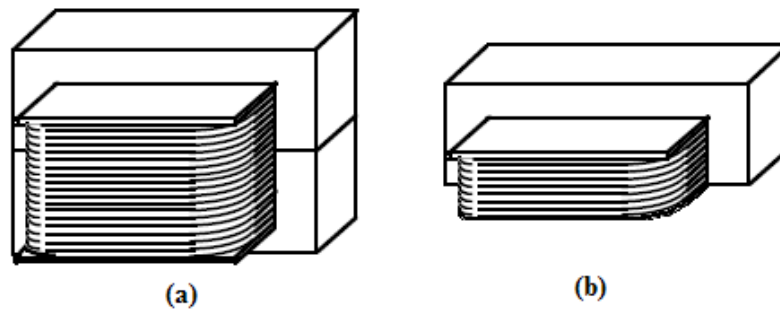


Figura 4.6 (a) Núcleo con carrete completo. (b) Núcleo y carrete a la mitad [11]

#### 4.4. Diámetro del alambre

En los conductores de cobre se presenta un fenómeno conocido como penetración de piel o en inglés *skin depth*. Si consideramos un conductor de cobre, tal como lo indica la figura 4.7a, el cual porta una corriente variante en el tiempo  $i(t)$ . Esta corriente genera un campo magnético de magnitud  $H$ , el cual a su vez genera corrientes de Eddy, las cuales se muestran en la figura 4.7b. Las corrientes de Eddy fluyen en dirección opuesta a

la dirección de la corriente aplicada  $i(t)$ , en el interior del cable y por lo tanto tienden a aislar el interior del conductor con la corriente aplicada y el campo magnético resultante. Esto resulta en una densidad de corriente mayor en la superficie del conductor, la cual decae exponencialmente con respecto a la distancia hacia el interior del conductor, tal como lo indica la figura 4.7c. Este decaimiento con respecto a la profundidad es la “profundidad de piel”, dada por la ecuación (4.10) para buenos conductores [2].

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \quad (4.10)$$

Donde  $\delta$  es la profundidad de piel en m

$f$  es la frecuencia de la corriente del cobre en Hz

$\mu$  es la permeabilidad del cobre en H/m

$\sigma$  es la conductividad del cobre en S/m

La permeabilidad relativa del cobre es aproximadamente 1, y la conductividad es igual a  $5.8 \times 10^7$  (S/m). Si sustituimos los valores de permeabilidad y conductividad y simplificamos, obtendremos una expresión que solo relaciona a la profundidad de piel con respecto a la frecuencia, tal como sigue

$$\delta = \frac{0.06608}{\sqrt{f}} \quad (4.11)$$

La profundidad de piel para  $f = 100$  kHz es 0.20896 mm.

Si la dimensión de la sección transversal del conductor utilizado para el embobinado es significativamente mayor que la profundidad de piel, para determinada frecuencia, la mayor parte de la corriente portada por el conductor estará concentrada en una capa delgada en la superficie de aproximadamente una profundidad de piel de grosor, tal como lo ilustra la figura 4.8c [11]. Esto lo confirma Clayton ya que dice que “para buenos conductores, la profundidad de piel se hace extremadamente pequeña conforme la frecuencia aumenta” [2]. El resultado neto de este fenómeno es que la resistencia efectiva del conductor será mucho mayor que la resistencia de  $c_D$  porque la sección transversal efectiva para el flujo de corriente es menor comparada con la sección transversal geométrica del conductor. Esto ocasiona que las pérdidas por embobinado sean mucho mayores que si fuera una corriente de directa.

La solución al problema antes enunciado es usar conductores con dimensiones de sección transversal en el orden de una profundidad de piel en tamaño. Si  $d$  es el diámetro del conductor, se propone que si  $d < 2 \delta$  las consecuencias de la profundidad de piel se pueden despreciar.

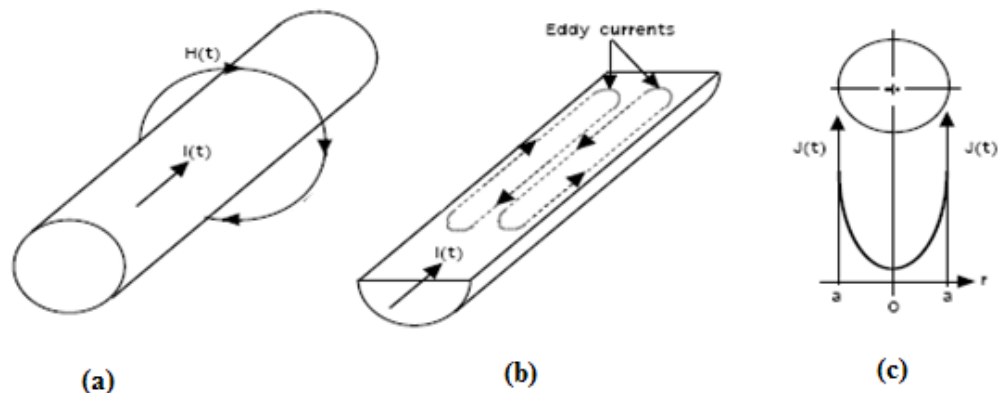


Figura 4. 7 (a) Ley de Ampere. (b) Corrientes parásitas dentro del conductor. (c) Densidad de corriente proporcional a la profundidad del alambre

La densidad de corriente  $J_{rms}$ , es la corriente  $I_{rms}$  por unidad de área, tal como lo indica la ecuación (4.12), [11]

$$J_{rms} = \frac{I_{rms}}{A_{Cu}} \quad (4.12)$$

Donde  $J_{rms}$  es la densidad de corriente en  $A/mm^2$

$I_{rms}$  es la corriente del cobre en A

$A_{Cu}$  es el área del cobre en  $mm^2$

Debido a que en la presente tesis se utilizaron conductores de cobre cilíndricos, el área de la sección transversal del cobre es  $A_{Cu} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$  por lo que se substituyó el área del cobre en la ecuación (4.12) y despejando  $D$  obtendremos lo siguiente

$$D = \sqrt{\frac{4I_{rms}}{\pi J_{rms}}} \quad (4.13)$$

Al diseñar inductores se puede proponer valores de  $J_{rms}$  entre 2 y 4  $A/mm^2$  [11].

El modelo de transformador reducido propuesto se integró al convertidor clase E para establecer un modelo Clase E/Transformador, figura I.1. En este modelo, la inductancia magnetizante equivale a la inductancia de la red resonante del convertidor Clase E, considerada el emisor de energía (figura I.1), y esta formado por la mitad del núcleo de ferrita y su respectivo embobinado. La fabricación del emisor y el receptor de energía se realiza utilizando el factor de llenado de cobre y el cálculo del diámetro del alambre para determinada corriente.