

# Capítulo II. Ecuaciones de los circuitos magnéticos

---

## 2.1. Intensidad de Campo magnético

Los campos magnéticos son el mecanismo fundamental para convertir energía eléctrica de corriente alterna de un nivel a otro en transformadores. Existen dos principios que describen cómo se utilizan los campos magnéticos aplicados al funcionamiento del transformador [1]. Estos son:

1. Un conductor que porta una corriente, ya sea constante o variable, produce un campo magnético a su alrededor (Ley de Ampere).
2. Un campo magnético variable en el tiempo induce un voltaje en una bobina de alambre si pasa a través de ella (Ley de Faraday).

La Ley de Ampere es la ley básica que describe la producción de un campo magnético por medio de una corriente:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i \quad (2.1)$$

Donde  $\mathbf{H}$  es la intensidad de campo magnético producida por la corriente neta la cual es la sumatoria de todas las contribuciones de corriente, tal como se indica en la figura 2.1a y  $d\mathbf{l}$  es el elemento diferencial a lo largo de la trayectoria de integración. La corriente se mide en amperes y  $H$  en amperes-vuelta por metro, en unidades del SI [1]. Un ejemplo de

una trayectoria de integración puede ser un núcleo como el que se muestra en la figura 2.1b.

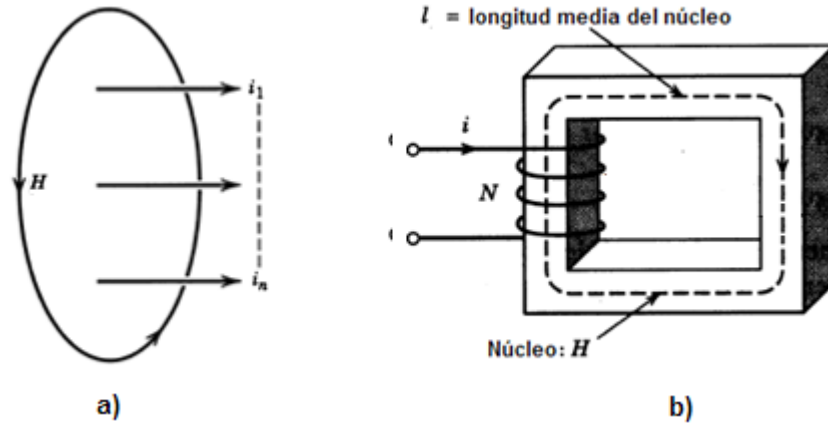


Figura 2. 1 (a) Formulación general de la ley de Ampere. (b) Ejemplo específico de la ley de Ampere de una bobina sobre un núcleo [11]

Es importante notar que la dirección del campo  $H$  producida por una corriente en un conductor esta definida por la regla de la mano derecha, la cual nos dice que si la curvatura de los dedos de la mano derecha apunta en la dirección del flujo de corriente del conductor o bobina (en caso de estar enrollado) el dedo pulgar apuntará en la dirección del campo magnético, tal como lo indica la figura 2.2.

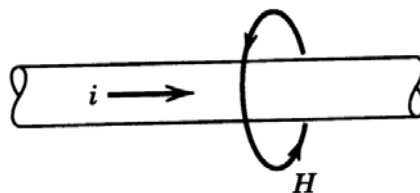


Figura 2. 2 Determinación de la dirección del campo magnético por medio de la regla de la mano derecha [11]

## 2.2. Densidad de flujo magnético

La intensidad de campo magnético  $H$ , es una medida del “esfuerzo” de una corriente por establecer un campo magnético. La potencia del campo magnético producido depende del material que contenga el camino de integración en el cual se produce la intensidad de campo magnético [1]. Una vez establecida una corriente en una bobina se produce un flujo magnético en el núcleo. El grado en el cual el flujo está concentrado se le conoce como densidad de flujo magnético  $B$ , el cual es medido en un punto dado [3]. La relación entre intensidad de campo magnético  $H$  y la densidad de flujo magnético  $B$  producida dentro del material está dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.2)$$

donde  $B$  en las unidades SI está dada por webers por metro cuadrado ( $\text{Wb/m}^2$ ) o Teslas (T), donde una Tesla equivale a un weber por metro cuadrado, y  $\mu$  equivale a la permeabilidad del medio, en henrys por metro (H/m). La permeabilidad  $\mu$  del medio está definido en términos de la permeabilidad del espacio libre (o aire),  $\mu_0$ , y la permeabilidad relativa  $\mu_r$ .

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.3)$$

donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  (H/m) y  $\mu_r$  puede tener valores entre 1 y varios miles [11], dependiendo del tipo del material.

## 2.3. Materiales magnéticos

El material que contenga al campo magnético en el camino de integración determinará que tanta cantidad del campo permanecerá dentro de éste. En los transformadores se utilizan materiales magnéticos, los cuales se clasifican de acuerdo al rango de los valores de la permeabilidad relativa. Estos materiales son [2]:

1. Diamagnéticos.
2. Paramagnéticos.
3. Ferromagnéticos.
4. Ferritas.

Los materiales diamagnéticos tienen permeabilidades relativas menores, pero aproximadamente iguales a la unidad. Como ejemplos encontramos al cobre, oro y plata.

Los materiales paramagnéticos tienen permeabilidades relativas mayores, pero aproximadamente iguales a la unidad.

Los materiales ferromagnéticos y las ferritas tienen permeabilidades relativas grandes. La diferencia radica en que los materiales ferromagnéticos poseen una magnetización neta incluso en la ausencia de un campo aplicado. Estos materiales por lo general presentan un comportamiento no lineal, por lo que su permeabilidad no es constante y depende de la intensidad de campo magnético aplicado [2]. Las Ferritas presentan un comportamiento lineal durante un rango, que si es superado presentan entonces una no linealidad. En la figura 2.3 se muestra la curva de magnetización, que es en sí la relación entre la intensidad de campo magnético y la densidad de flujo. La región

lineal en la figura anterior se encuentra entre 0 y  $B_s$  (densidad de flujo magnético de saturación). Mas allá de  $B_s$  el material magnético comienza a saturarse (región de saturación), y la razón de incremento de la permeabilidad puede ser mucho menor que la permeabilidad en la región lineal [11]. Esta región de transición entre la región lineal y saturación se le conoce como “rodilla” de la curva [1].

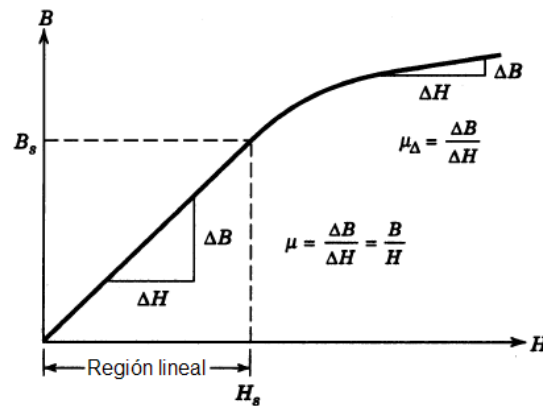


Figura 2. 3 Curva de magnetización. Relación entre B y H. [11]

Los materiales ferrimagnéticos, dentro de los cuales se encuentran las ferritas son muy parecidos a los ferromagnéticos, sin embargo, los primeros tienen una  $B$  de saturación menor a los materiales ferromagnéticos. Valores típicos de densidad de flujo magnético de saturación  $B_s = 0.1 - 0.6 \text{ Wb/m}^2$  para las ferritas, aunque típicamente son de  $0.3 \text{ Wb/m}^2$  [11].

La ventaja de utilizar materiales de ferrita radica en su conductividad, la cual es generalmente mucho menor que los materiales ferromagnéticos típicos. Por lo tanto, las pérdidas óhmicas en las ferritas son mucho menores, y por lo tanto sus aplicaciones se encuentran en áreas donde se requieran muy pocas pérdidas [2].

## 2.4. Flujo magnético en un circuito magnético

La magnitud matemática que esta relacionada con el número de líneas del campo que atraviesa una superficie se le conoce como flujo magnético  $\phi$  [14]. Este se puede obtener por medio de la integral de superficie del campo  $\mathbf{B}$ , el cual es normal al área a partir de la ley de Gauss, la cual nos dice

$$\phi_{neto} = \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.4)$$

Donde  $dA$  es el diferencial de área. Si el vector de densidad de flujo  $\mathbf{B}$  es perpendicular a un plano de área  $A$ , y si la densidad de flujo es considerada constante en toda esta área, la ecuación se reduce a lo siguiente.

$$\phi = BA \quad (2.5)$$

## 2.5. Circuitos Magnéticos

Un circuito magnético esta formado por una bobina de alambre que porta una corriente y un núcleo magnético, tal como se indica en la figura 2.1b. A partir de la ley de Ampere, ecuación (2.1) si se considera el camino de integración como la longitud media del núcleo y debido a la geometría de éste, la ley de Ampere se expresa de la siguiente manera

$$Hl = Ni \quad (2.6)$$

Donde  $N$  es el número de vueltas de la bobina, y equivale a cada una de las contribuciones de corriente (sumatoria de corriente), la cual es la misma en cada vuelta.

Por lo tanto, al despejar, obtenemos la intensidad de campo magnético en función del número de vueltas, la corriente y la longitud media, tal como se indica

$$H = \frac{N i}{l} \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ecuación (2.7) en la ecuación (2.2), la magnitud de la densidad de flujo se expresa de la siguiente manera

$$B = \mu H = \frac{\mu N i}{l} \quad (2.8)$$

El flujo total que atraviesa el área del núcleo (la cual es considerada constante) se expresa de la siguiente forma

$$\phi = BA = \frac{\mu N i A}{l} \quad (2.9)$$

En esta última ecuación se observa que “la corriente en una bobina de alambre conductor, enrollado alrededor de un núcleo produce un flujo magnético en éste” [1]. Se puede hacer una analogía con el voltaje que produce un flujo de corriente en un circuito eléctrico, por lo que “es posible definir un circuito magnético cuyo comportamiento está determinado por ecuaciones análogas a aquellas establecidas para un circuito eléctrico” [1]. El circuito magnético se muestra en la figura 2.4b.

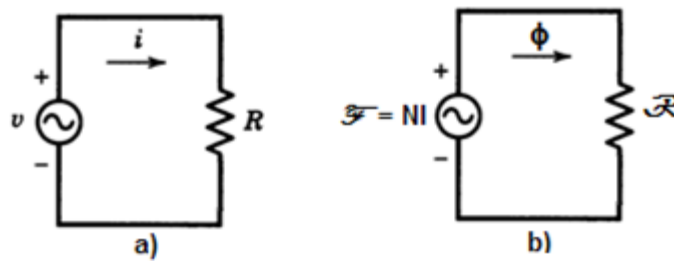


Figura 2. 4 (a) Circuito Eléctrico real (b) Circuito magnético representado por analogía con circuito eléctrico

La letra  $\mathcal{F}$  se denomina fuerza magnetomotriz (fmm), medida en amperes-vueltas y es análoga a la fuerza electromotriz de un circuito eléctrico (figura 2.4a) y se expresa de la siguiente manera

$$\mathcal{F} = N i \quad (2.10)$$

En el circuito magnético, al igual que una fuente de voltaje, la fuerza magnetomotriz presenta una polaridad asociada, y depende de la entrada y salida del flujo. La terminal positiva de la fuente de fmm es la “terminal” de donde sale el flujo y la terminal negativa es la terminal por donde el flujo regresa a “la fuente”. Esto se determina por medio de la regla de la mano derecha.

Así como en un circuito eléctrico una fuerza electromotriz produce una corriente, en el circuito magnético la fuerza magnetomotriz produce un flujo  $\phi$ . La relación entre estas cantidades es análoga a la ley de ohm ( $V = i R$ ) y esta dada por

$$\mathcal{F} = \phi \mathcal{R} \quad (2.11)$$

Donde  $\mathcal{R}$  es la reluctancia del circuito magnético medida en amperes-vuelta por weber. Para encontrar una relación de la reluctancia de un circuito magnético como el expresado en la figura 2.4b partimos de la ecuación (2.9) y sustituimos el flujo magnético de la ecuación (2.11)

$$\phi = \mathcal{F} \frac{\mu A}{l} \quad (2.12)$$

Por lo que el valor de la reluctancia del núcleo de la figura 2.4b es

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} \quad (2.13)$$



Esta última ecuación es análoga a la ecuación de resistencia para un determinado conductor, donde la permeabilidad es el análogo a la resistividad, pero en el caso de la primera, depende del tipo de material. Las reluctancias obedecen las mismas reglas que las resistencias en el circuito eléctrico.

Para realizar el análisis de un circuito magnético, considerando la analogía que existe entre éste y el circuito eléctrico, podemos también utilizar las ecuaciones que rigen a los últimos, tal como es la ley de ohm, y las leyes de Kirchhoff, tabla 2.1.

Tabla 2. 1 Relación entre circuito eléctrico y la analogía del circuito magnético [11]

<i>Magnético</i>	<i>Eléctrico (dc)</i>
$\frac{Ni}{\phi} = \mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$	Ley de Ohm: $\frac{v}{i} = R = \frac{l}{A/\rho}$
$\phi \sum_k \mathcal{R}_k = \sum_m N_m i_m$	Ley de Voltaje de Kirchhoff: $i \sum_k R_k = \sum_m v_m$
$\sum \phi_k = 0$	Ley de Corriente de Kirchhoff: $\sum_k i_k = 0$

Los cálculos de flujo en el núcleo, que se obtienen utilizando los conceptos del circuito magnético, *siempre* son aproximaciones. Esto se debe a que el concepto del circuito magnético hace ciertas suposiciones, las cuales son:

1. El flujo magnético esta confinado y restringido a través del material magnético sin que exista flujo que se escape, al cual se le conoce como flujo disperso, figura 2.5.
2. El cálculo de la reluctancia de un núcleo supone una longitud media y una sección transversal del núcleo. Se pueden “eliminar esta fuente de error si se utilizan una longitud de recorrido media y una sección transversal ‘efectiva’, en lugar de la longitud física y área reales obtenidas en los cálculos” [1].

3. El efecto marginal (incremento en la sección transversal del flujo en el entrehierro, figura 2.5) es despreciable siempre y cuando la longitud del entrehierro sea menor comparada con las dimensiones del núcleo. El área del núcleo es la misma que la del entrehierro.

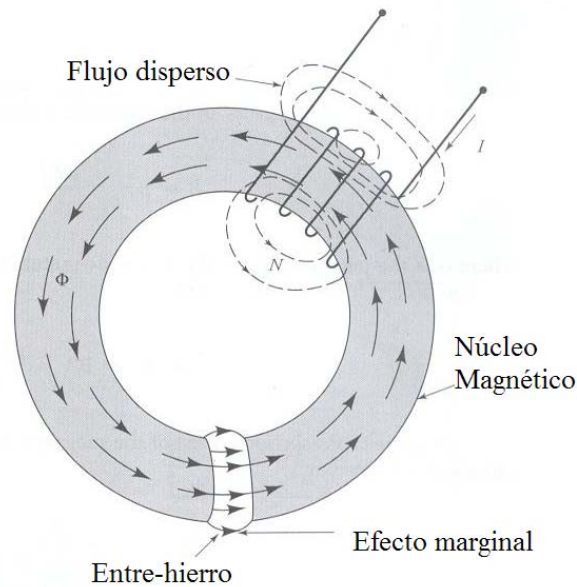


Figura 2. 5 Efectos ocasionado por la introducción de un entrehierro [8]

## 2.6. Voltaje inducido: Ley de Faraday

Existen diversas maneras en las que un campo magnético afecta sus alrededores, una de las cuales es la inducción de voltaje. La inducción de voltaje es el fundamento de la ley de Faraday, la cual establece “que si un flujo atraviesa una espira de alambre conductor, se inducirá en ésta un voltaje directamente proporcional a la tasa de cambio del flujo con respecto al tiempo” [1]. La ley de Faraday establece la siguiente ecuación

$$e_{ind} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (2.14)$$

En donde N se refiere al número de vueltas de alambre en la bobina, y el signo menos es una expresión de la ley de Lenz, la cual establece que “la dirección del voltaje inducido en la bobina es tal que si los extremos de ésta estuvieran en cortocircuito, se produciría en ella una corriente que generaría un flujo opuesto al flujo inicial” [1]. Esto se representa en la figura 2.6

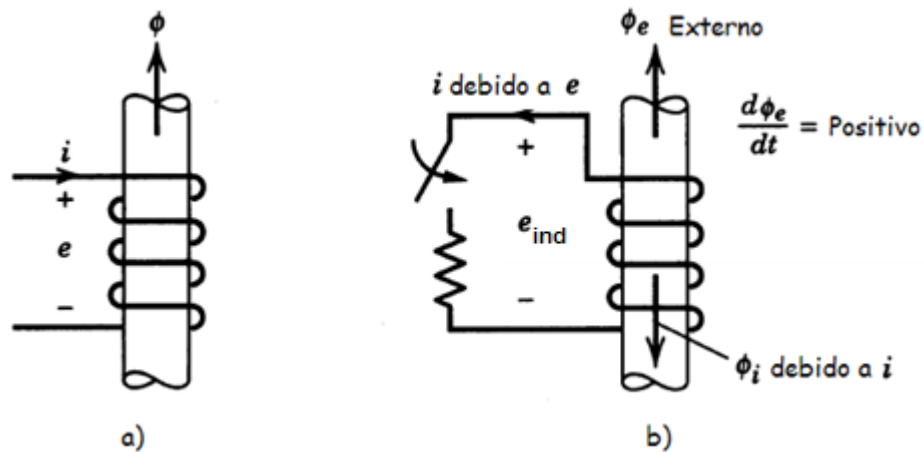


Figura 2. 6 (a) Dirección del flujo y polaridad del voltaje. (b) Ley de Lenz [11]

En la figura 2.6a se observa la dirección del flujo y la polaridad del voltaje que ocasiona ese flujo. En la figura 2.6b se observa que si un flujo  $\phi_e$  externo se incrementa con el tiempo en la dirección indicada, entonces la polaridad del voltaje inducido se obtiene hipotéticamente cerrando el circuito a través de una resistencia. La corriente deberá de fluir fuera de la terminal superior (de la regla de la mano derecha) con el fin de oponerse al cambio en el flujo en el embobinado produciendo  $\phi_i$  por lo que sabemos que el voltaje deberá ser positivo en la terminal superior.

## 2.7. Autoinductancia

Una bobina enrollada en un núcleo magnético, como el de la figura 2.1b es comúnmente encontrada en circuitos eléctricos. Este embobinado puede ser representado por un elemento ideal de un circuito, conocido como inductancia, la cual es definida como el flujo del embobinado por ampere de su corriente. La inductancia se define con la siguiente expresión

$$L = \frac{N\phi}{i} \quad (2.15)$$

Si sustituimos la ecuación 2.9 obtendremos una expresión reducida para la inductancia

$$\begin{aligned} L &= \frac{N\phi}{i} = \frac{NBA}{i} = \frac{N\mu HA}{i} \\ &= \frac{N\mu HA}{Hl/N} = \frac{N^2}{l/\mu A} \\ L &= \frac{N^2}{\mathcal{R}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esta ecuación reducida nos expresa la inductancia en términos del número de vueltas así como de las dimensiones físicas del núcleo como son la longitud media y el área de sección transversal y la permeabilidad relativa del núcleo.

Hasta el momento se ha proporcionado un estudio sobre circuitos magnéticos con una serie de expresiones para voltaje inducido, reluctancia e inductancia, las cuales son importantes para posteriormente realizar un análisis de circuitos magnéticos con entrehierro y proporcionar expresiones similares para éste.