

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO.

3.1 INTRODUCCIÓN A LOS FILTROS.

En la vida cotidiana es difícil tener una señal eléctrica pura o aislada, por lo regular las señales se entremezclan o distorsionan, por ello es necesario contar con algún tipo de dispositivo que nos permita separar las señales unas de otras o simplemente eliminar el ruido presente en ellas. Los filtros eléctricos son aquellos dispositivos de los cuales nos servimos para dichos fines. Estos sistemas se entienden como redes de dos puertos, uno de entrada y uno de salida, que funcionan en el dominio de la frecuencia. Su funcionamiento se centra en la discriminación de señales con relación a su contenido espectral, es decir, son sistemas que están diseñados para transmitir o bloquear señales eléctricas dentro de un cierto rango o intervalo de frecuencias. Así, al rango de frecuencias dentro del cual las señales pasan inalteradas se conoce como *banda de paso*, y al intervalo de frecuencias donde las señales son bloqueadas se le llama *banda de rechazo*.

El diseño de estos circuitos puede estar formado por componentes puramente *pasivos* (resistencias, capacitores e inductores), *activos* (con amplificadores operacionales) o *digitales* (implementados con circuitería digital o programados en una computadora). Destacando que trabajarán sobre señales de entrada produciendo una señal de salida, cuyo contenido espectral será función no sólo de la señal de entrada sino también del tipo del filtro.

De aquí se puede observar que existen dos grandes divisiones dentro de estos sistemas: los *filtros analógicos* que son empleados para tratamiento de señales continuas en el tiempo, y los *filtros digitales* que trabajan con señales discretas en el dominio del tiempo.

Como ya se mencionó con anterioridad, las aplicaciones de estos sistemas son numerosas y muy variadas: sistemas de telecomunicaciones, instrumentos de medición, sistemas de audio y video, transmisión de datos, sistemas de control electrónico, osciloscopios, analizadores espectrales, procesamiento de señales, fuentes de poder, transformadores, etc. Un ejemplo práctico es el sintonizador de estación de una radio o el selector de canal de un televisor, los cuales operan dejando pasar sólo la frecuencia de la señal deseada y rechazando las demás estaciones, de modo tal que si no se aplicara el filtrado, lo que se obtendría a la salida sería una combinación de todas las estaciones o canales.

Así mismo, dependiendo de la aplicación y funcionamiento deseados, se deberá seleccionar el tipo de filtro adecuado. Existen cuatro tipos de filtros, y se denominan *filtro pasabajas* si opera dejando pasar frecuencias bajas y rechazando frecuencias altas, *filtro pasaaltas* si funciona dejando pasar frecuencias altas y rechazando frecuencias bajas, *filtro pasabanda* si trabaja dejando pasar una banda o intervalo de frecuencias definido y rechaza las frecuencias mayores o menores a los límites de dicha banda y *filtro rechazabanda* si lo hace con señales cuya frecuencia está comprendida dentro de una cierta banda de frecuencias y deja pasar inalteradas las señales fuera de ésta.

3.2 TIPOS DE FILTROS.

Como se acaba de mencionar, existen cuatro tipos de filtros y se clasifican de acuerdo a las frecuencias que discriminan, sea dicho que afectan ya sea dejándolas pasar o rechazándolas, a continuación se describirán brevemente los distintos tipos que se mencionaron dentro de esta clasificación.

3.2.1 FILTRO PASABAJAS.

Un filtro que proporcione una salida constante a partir de CD hasta una frecuencia de corte determinada y que más allá de ella no permita pasar a ninguna señal, es un filtro ideal pasabajas. En otras palabras, se caracteriza por *dejar pasar frecuencias bajas* en su banda de paso y rechazar frecuencias altas en la banda de rechazo. Dichas bandas quedan establecidas por:

- Banda de paso: de 0 hasta ω_p
- Banda de rechazo: de ω_s hasta ∞

donde,

ω_p : frecuencia de paso, ω_s : frecuencia de corte.

En la siguiente gráfica se ilustra su magnitud ideal:

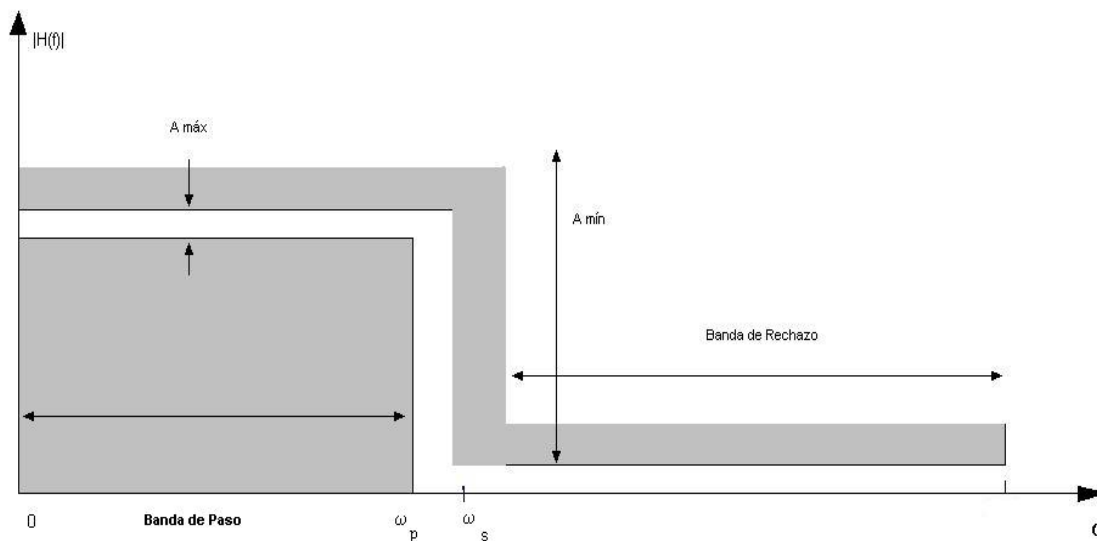


Figura 1. Respuesta en magnitud ideal para un filtro pasabajas.

3.2.2 FILTRO PASAALTAS.

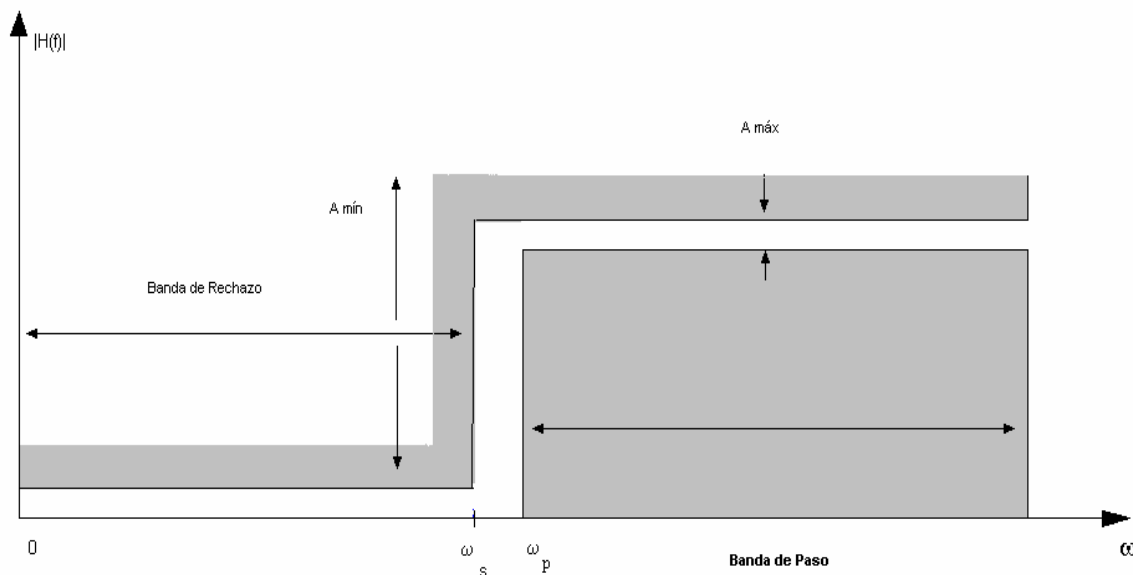
Es aquel filtro, que al contrario del anterior, *deja pasar frecuencias altas* en su banda de paso y rechaza frecuencias bajas en su banda de rechazo. En pocas palabras, únicamente permite el paso de señales arriba de su frecuencia de corte. Las bandas de frecuencia que describen a este tipo de filtro, se describen por:

- Banda de paso: desde ω_p hasta ∞
- Banda de rechazo: desde 0 hasta ω_s

donde,

ω_p : frecuencia de paso, ω_s : frecuencia de corte.

Aquí se muestra la magnitud ideal para el presente tipo de filtro:



Fi

Figura 2. Respuesta en magnitud ideal para un filtro pasaaltas.

3.2.3 FILTRO PASABANDA.

Se denomina de esta manera a aquél en el cual las señales son transmitidas si se encuentran arriba de una primer frecuencia de corte y por debajo de una segunda frecuencia de corte. Esto significa que en este tipo de filtros hay presentes dos bandas de rechazo, una inferior y una superior, las cuales definen la banda de paso y *únicamente dejará pasar frecuencias dentro del rango definido*. Esto queda definido por:

- Banda de paso: desde ω_{p1} hasta ω_{p2}
- Banda de rechazo inferior: desde 0 hasta ω_{s1}

- Banda de rechazo superior: desde ω_{s2} hasta ∞

donde,

ω_{p1} y ω_{p2} : frecuencias de paso inferior y superior respectivamente

ω_{s1} y ω_{s2} : frecuencias de corte inferior y superior respectivamente

$$\omega_{s1} < \omega_{p1} < \omega_{p2} < \omega_{s2}$$

A continuación se muestra la magnitud ideal para este tipo de sistema:

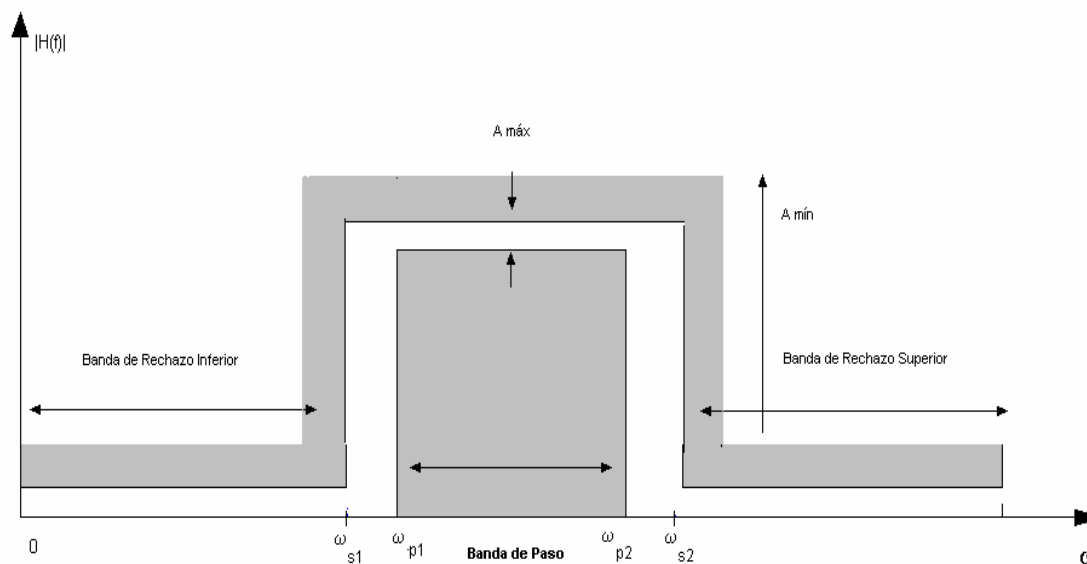


Figura 3. Respuesta en magnitud ideal para un filtro pasabanda.

3.2.4 FILTRO RECHAZABANDA.

Cuando el circuito de filtrado bloquea señales que se encuentran por encima de una frecuencia de corte y por debajo de una segunda frecuencia de corte, se dice que es un filtro rechazabanda. Este tipo de circuito, al contrario del pasabanda, tiene una banda de paso inferior, una banda de rechazo y una banda de paso superior, y *funciona bloqueando sólo cierto rango de frecuencias*. Lo anterior se parafrasea de:

- Banda de paso inferior: desde 0 hasta ω_{p1}
- Banda de rechazo: desde ω_{s1} hasta ω_{s2}
- Banda de paso superior: desde ω_{p2} hasta ∞

donde,

ω_{p1} y ω_{p2} : frecuencias de paso superior e inferior respectivamente

ω_{s1} y ω_{s2} : frecuencias de corte superior e inferior respectivamente

$$\omega_{p1} < \omega_{s1} < \omega_{s2} < \omega_{p2}$$

En la siguiente gráfica se muestra la magnitud ideal para estos sistemas:

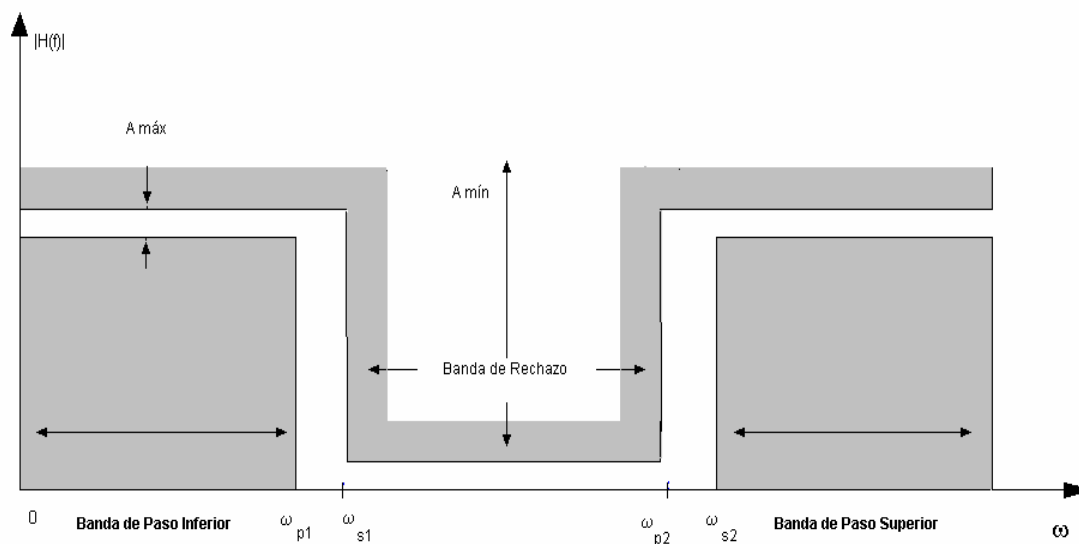


Figura 4. Respuesta en magnitud ideal para un filtro rechazabanda.

3.3 TIPOS DE APROXIMACIÓN PARA FILTROS ANALÓGICOS.

En la vida real, no es posible implementar ningún circuito capaz de realizar alguna de las funciones cuyas magnitudes ideales se ilustraron para cada tipo de filtro. Lo único que es posible es aproximar esas magnitudes ideales por medio de funciones matemáticas de la frecuencia (ω) y posteriormente construir algún tipo de circuito que realice la función obtenida. Se han desarrollado varios tipos de *funciones matemáticas de ω ó aproximaciones* para acercarse a las magnitudes ideales. En la teoría de circuitos, una de las áreas de más estudio es la teoría de aproximación. Dado que toda función de transferencia representativa de un sistema está determinada por su magnitud y por su fase, es posible realizar aproximaciones para

cualquiera de ellas, obteniendo sus realizaciones circuitales respectivas. En el caso de los filtros se aplican las aproximaciones en magnitud, las cuales se explican a continuación.

3.3.1 APROXIMACIÓN BUTTERWORTH.

Se le conoce así por su inventor. La *magnitud* de esta función es *monótona*, lo que significa que su magnitud siempre disminuye o aumenta cuando la frecuencia aumenta. Tiene magnitud máximamente plana en $\omega=0$, todos los ceros se localizan en el infinito y sus polos se encuentran ubicados alrededor de un círculo en el plano complejo. Dichas características proporcionan la condición máximamente plana para la mayor parte de las frecuencias, además de la caída del valor de la magnitud para altas frecuencias. Lo anterior se ve reflejado en la ecuación matemática de la magnitud al cuadrado, es decir:

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1 + a_n \omega^{2n}}$$

en la cual, el coeficiente a_n se denota por ε^2 , reescribiendo la función como:

$$|N_B(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}$$

la cual es conocida como *Función Butterworth normalizada*, cuyas propiedades son:

- La banda de paso queda determinada por el rango de frecuencias $0 < \omega < 1$ rad/seg.
- La banda de rechazo se define por el rango $\omega > 1$ rad/seg.
- $|N(j\omega)|^2 = H^2 / 1 + \varepsilon^2$ en $\omega = 1$ rad/seg es independiente del valor de n.
- La pendiente de $|N(j\omega)|^2$ es proporcional a $-n/2$ en $\omega = 1$.
- La función $|N(j\omega)|$ es una función monótona de ω .

Para obtener el valor de ε se parte de la definición de la *atenuación máxima*:

$$A_{max} = 20 \log |N(j0)| - 20 \log |N(j1)| = 20 \log \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_{max}/10} - 1}$$

La *atenuación* a una *frecuencia determinada* y la *frecuencia* a la que se presenta una *atenuación específica* se calculan mediante las fórmulas:

$$A(\omega) = 20 \log |N(j0)| - 20 \log |N(j\omega)| = 20 \log \sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}$$

$$\omega = \left[\frac{10^{0.1A(\omega)} - 1}{\varepsilon^2} \right]^{1/2n}$$

Por otra parte, los *polos* de una función *Butterworth* se obtienen de la función normalizada, de dicho modo se tiene que:

$$p_k = \sigma_k + j\omega_k \qquad \sigma_k = -\frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}} \operatorname{sen} \frac{2k-1}{2n} \pi \qquad \omega_k = -\frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}} \operatorname{cos} \frac{2k-1}{2n} \pi$$

para $k = 1, 2, 3, \dots, n$

y para los cuales, la *Frecuencia* y *Q* están dadas por:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}} \qquad Q_k = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right)} \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Por último, la *atenuación mínima* y el *orden* del sistema quedan determinados por:

$$A_{min} = 20 \log |N(j\omega)| - 20 \log |N(j\omega_s)|$$

$$n \geq \frac{\log \left[\frac{10^{0.1 A_{min}} - 1}{\epsilon^2} \right]^{1/2}}{\log \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)}$$

Ilustrativamente, la magnitud de la respuesta en frecuencia de un sistema de orden 10 utilizando esta aproximación, sería como se muestra:

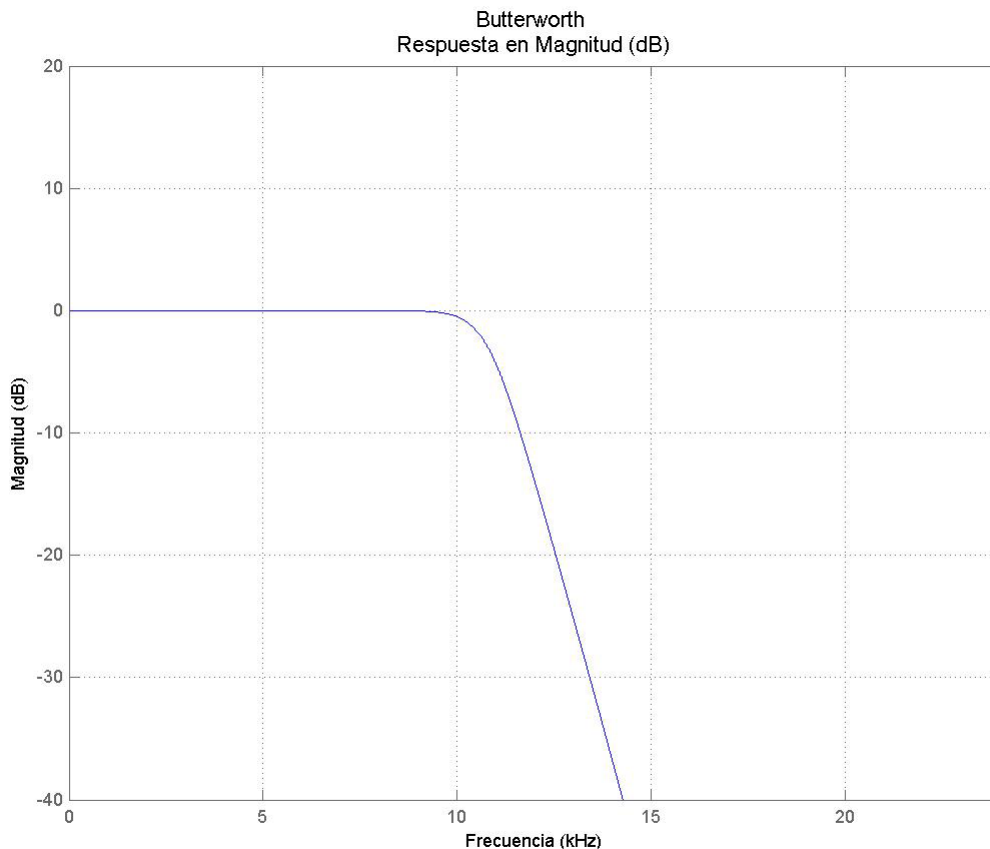


Figura 5. Respuesta en magnitud para un filtro pasabajas Butterworth de orden 10.

3.3.2 APROXIMACIÓN CHEBYSHEV.

Esta aproximación fue desarrollada por el matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev y tiene como función de transferencia una magnitud con **máximos y mínimos en la banda de paso**, los cuales ocasionan que el orden del filtro se reduzca en comparación con un filtro Butterworth. Presenta rizados en la banda de paso cuyo número es dependiente del orden del filtro y la función es monótona en la banda de rechazo. Además, los polos Chebyshev están

más cerca del eje $j\omega$ que los polos de funciones Butterworth y se encuentran ubicados sobre una elipse. Estas nuevas funciones se obtienen al modificar el denominador de la función generada por la aproximación Butterworth al introducir un polinomio tipo Chebyshev, los cuales son funciones de ω . Dichos polinomios pueden encontrarse a partir de la fórmula:

$$C_n(\omega) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(n-m-1)! (2\omega)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}$$

Los polinomios Chebyshev tienen las siguientes características:

- Son polinomios pares o impares de ω dependiendo de si el grado del polinomio es par o impar, respectivamente.
- Para $\omega < 1$, el valor del polinomio está acotado por ± 1 .
- El polinomio Chebyshev toma los valores de $+1$ y -1 alternadamente para $\omega < 1$.
- El valor del polinomio Chebyshev en $\omega = 1$ es la unidad sin importar el orden del mismo.
- El valor del polinomio es cero para $\omega = 0$ si n es impar y su valor absoluto es la unidad si n es par.

Alternativamente, los *polinomios Chebyshev* se pueden representar trigonométricamente por:

$$C_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1} \omega) & 0 \leq \omega \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1} \omega) & \omega > 1 \end{cases}$$

Dado que estos polinomios poseen rizados que tienen la misma magnitud extrema, esto es, su máximo valor es 1 para $\omega < 1$ y su valor mínimo es -1 para el mismo rango de valores de ω , también son conocidos como **funciones de rizo igual**.

La **magnitud** que se obtiene para estas funciones al substituir los polinomios Chebyshev en la función de Butterworth normalizada, queda determinada por:

$$|N_{Ts}(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}$$

En la cual el significado de ε es el mismo que se tenía para la característica Butterworth y, por lo tanto, está dado por:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_{max}/10} - 1}$$

Y la **frecuencia** a la que la magnitud de la característica Chebyshev disminuye en **3 decibeles** es calculable por la siguiente fórmula:

$$|N(j\omega_{3dB})|^2 = \frac{H^2}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega_{3dB})} = \frac{H^2}{2}$$

Hay que destacar que para $\omega=0$ el valor de la magnitud queda dado por:

$$|N(j0)| = H \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$$|N(j0)| = \frac{H}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad \text{para } n \text{ par}$$

$$|N(j1)| = \frac{H}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad \text{para toda } n$$

Por otra parte, el *orden* de una *función Chebyshev* se puede determinar observando su gráfica de magnitud correspondiente, contando el número de máximos en la banda de paso y multiplicarlos por un factor de dos. Analíticamente se emplean las fórmulas:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{\epsilon^2}}}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)}$$

donde,

$$A_{min} = 20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega_s)}$$

o bien,

$$A_{min} = 20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2 \cosh^2(n \cosh^{-1} \omega_s)}$$

Del mismo modo, las fórmulas para obtener los *polos* de funciones *Chebyshev* se deducen por continuación analítica y tratamiento matemático de la función de magnitud, y quedan determinados por:

$$p_k = \sigma_k + j\omega_k$$

para

$$\sigma_k = -\operatorname{sen} u_k \operatorname{senh} v \qquad \omega_k = \operatorname{cos} u_k \operatorname{cosh} v \qquad \text{cuando } k = 1, 2, 3, \dots, n$$

donde,

$$u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \qquad k = 1, 2, \dots, 2n \qquad \text{y} \qquad v = \frac{1}{n} \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{\varepsilon}$$

En última instancia se tiene que la *frecuencia* y *Q de los polos* están dados por:

$$\omega_n = \sqrt{\operatorname{sen}^2 u_k \operatorname{senh}^2 v + \operatorname{cos}^2 u_k \operatorname{cosh}^2 v}$$

$$Q_k = \frac{1}{2 \operatorname{sen} u_k} \sqrt{\operatorname{sen}^2 u_k + \operatorname{cos}^2 u_k \operatorname{cosh}^2 v}$$

A modo de conclusión, en la siguiente gráfica se ilustra la magnitud de la característica Chebyshev para un filtro pasabajas de orden 10:

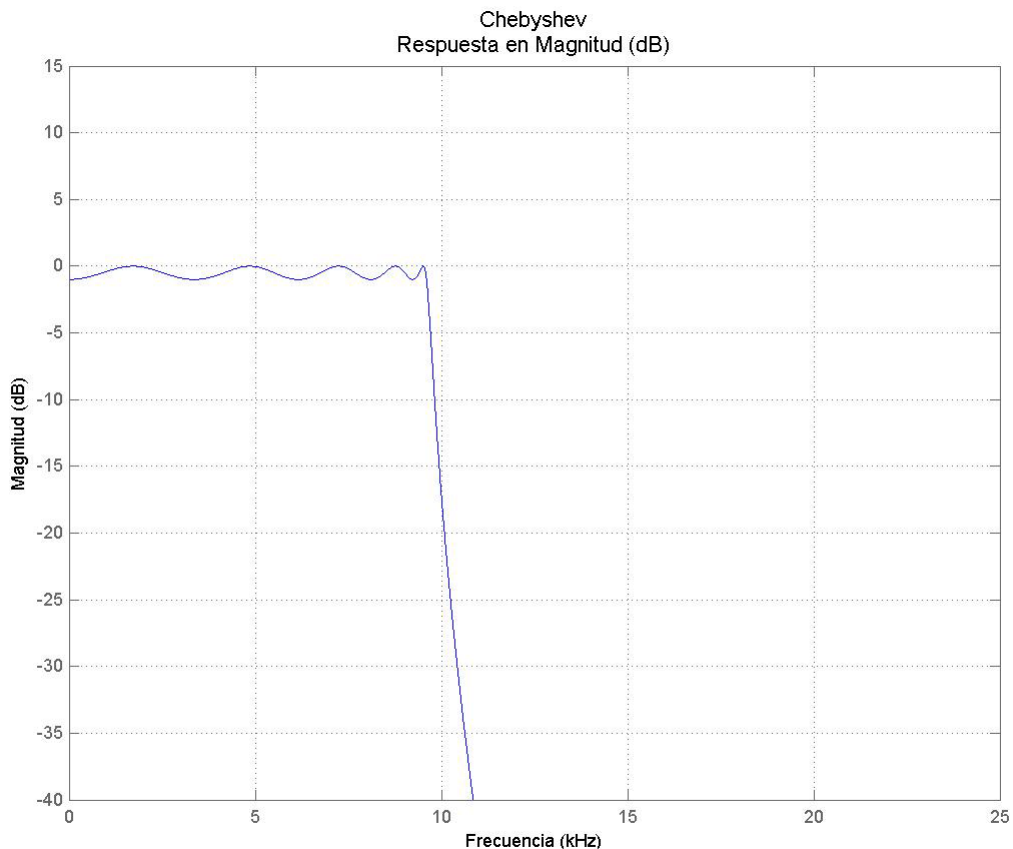


Figura 6. Respuesta en magnitud para un filtro pasabajas Chebyshev de orden 10.

3.3.3 APROXIMACIÓN CHEBYSHEV INVERSA.

Se diferencia de la aproximación Chebyshev en que es *monótona* descendente *en la banda de paso* y tiene *rizos en la banda de rechazo*, y debido a sus propiedades de magnitud inversas a las de la característica Chebyshev es que se le conoce de esta manera. Una de las ventajas que tiene sobre la aproximación Chebyshev es que sus características de fase son mejores. Pero debido a que posee ceros finitos ubicados sobre el eje $j\omega$ se tiene como consecuencia que sus realizaciones, tanto pasivas como activas, sean más complicadas que las

de una función Chebyshev. La **magnitud** para este tipo de aproximación queda determinada por:

$$|N_{CI}(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}$$

A continuación se presentan las fórmulas para la obtención de los parámetros correspondientes a esta función:

Atenuación mínima $A_{min} = 10 \log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)$

Atenuación máxima $A_{max} = 10 \log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2 + C_n^2\left(\frac{1}{\omega_c}\right)}\right)$

Orden $n_{CI} \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{10^{0.1A_{max}} - 1}\right)^{1/2}}{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\omega_c}\right)}$

Por otra parte, los *polos y ceros* de las funciones Chebyshev inversas se obtienen de:

Ceros:

$$z_k = \alpha_k + j\beta_k$$

donde $\alpha_k = 0$ $\beta_k = \frac{1}{\cos u_k}$

cuando $k = 1, 2, \dots, n$ y $u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi$

Polos:

$$p_k = \frac{1}{\sigma_k + j\omega_k}$$

donde $\sigma_k = -\sin u_k \sinh v$ y $\omega_k = \cos u_k \cosh v$ para toda $k = 1, 2, \dots, n$

y a su vez $u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi$ $k = 1, 2, \dots, 2n$ $v = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}$

Para finalizar, la *frecuencia* y *Q de polo*, quedan dados por las siguientes ecuaciones:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2}}$$

$$Q = \frac{1}{2 \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega_k}{\sigma_k} \right) \right]}$$

Para concluir, al aproximar de esta manera un filtro pasabajas se tiene una gráfica de magnitud como esta:

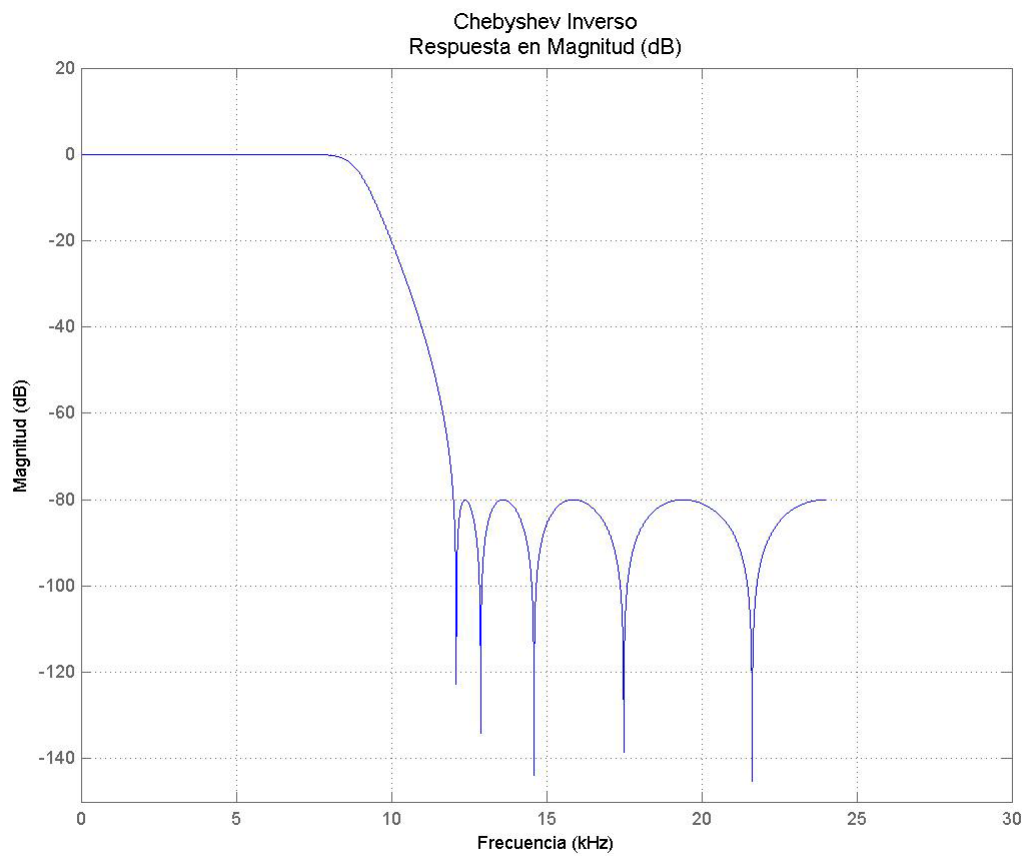


Figura 7. Respuesta en magnitud para un filtro pasabajas Chebyshev Inverso de orden 10.

3.3.4 APROXIMACIÓN ELÍPTICA O CAUER.

Esta aproximación presenta *rizos* tanto *en la banda de paso como en la banda de rechazo*. Esta variante de aproximación fue desarrollada en la década de los 30's por el ingeniero alemán Wilhelm Cauer y por tal razón a los circuitos obtenidos de este modo se les conoce como *Filtros Cauer*. Para poder calcular los parámetros de estos filtros es necesario utilizar funciones elípticas Jacobianas. Los filtros con característica elíptica tienen la ventaja de requerir un menor orden para la misma calidad, lo que implica un menor número de componentes en la implementación que para los obtenidos por las aproximaciones Butterworth o Chebyshev.

Las *funciones de magnitud* con característica *elíptica* se muestran a continuación:

$$|N_E(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\omega)}$$

donde la función racional $R_n(\omega)$ está definida como

$$R_n(\omega) = \frac{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots ((\omega_k^2 - \omega^2))}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_2^2 \omega^2) \dots (1 - \omega_k^2 \omega^2)} \quad \text{cuando } n \text{ es impar y } k = \frac{n-1}{2}$$

y

$$R_n(\omega) = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots ((\omega_k^2 - \omega^2))}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_2^2 \omega^2) \dots (1 - \omega_k^2 \omega^2)} \quad \text{cuando } n \text{ es par y } k = \frac{n}{2}$$

donde $0 < \omega < 1$ para $i = 1, 2, \dots, k$

Aplicando esta aproximación para obtener un filtro pasabajas de orden 10, se puede visualizar su gráfica de magnitud la siguiente forma:

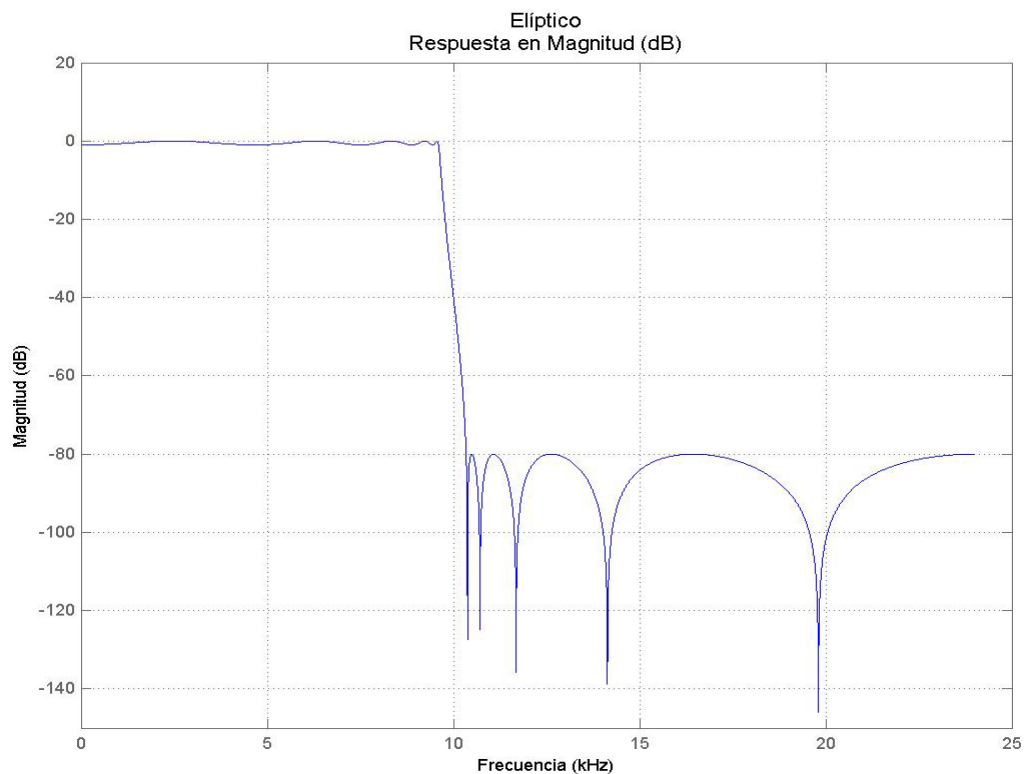


Figura 8. Respuesta en magnitud para un filtro pasabajas Caer de orden 10.

3.4 REALIZACIONES PASIVAS Y ACTIVAS DE FILTROS ANALÓGICOS.

El último paso en el proceso de síntesis de un filtro es la obtención de un circuito que realice la función deseada, es decir, la implementación del circuito según los valores de componentes calculados para realizar las funciones deseadas y de acuerdo a los parámetros obtenidos durante el proceso de diseño. La circuitería puede ser una red pasiva o activa, dependiendo del tipo de componentes empleados para la realización del filtro.

3.4.1 REALIZACIONES PASIVAS.

Los filtros pasivos son aquellos que están implementados con elementos pasivos, tales como resistores, capacitores e inductores. Y, pese a que el uso de inductores es una limitante en el diseño de estos filtros por ser componentes caros y voluminosos, brindan la ventaja de presentar bajas sensibilidades. La *topología* más útil y comúnmente usada es la de *escalera*, cuyo nombre se debe a que la disposición de los componentes parece formar una escalera. Esta topología es útil por tener baja sensibilidad y no disipar energía, razón por la cual también se les conoce como *filtros sin pérdidas*. Esta forma de red sirve para implementar filtros de los cuatro tipos sin importar mediante qué tipo de aproximación hayan sido calculados, ya que existen ecuaciones y algoritmos para la obtención de los valores de los elementos. Otros tipos de redes pasivas que se utilizan para implementar funciones de transferencia, son las *redes cruzadas o tipo reja* y las *redes Darlington*. En general, los algoritmos consisten en la aplicación de fórmulas para el cálculo de parámetros y valores, y la selección de un valor comercial para alguno o algunos de los componentes para poder obtener los valores de los

demás, en adición, por lo regular se parte del cálculo de un filtro pasabajas sobre el cual se realiza una transformación mediante fórmulas para llegar al tipo de circuito deseado.

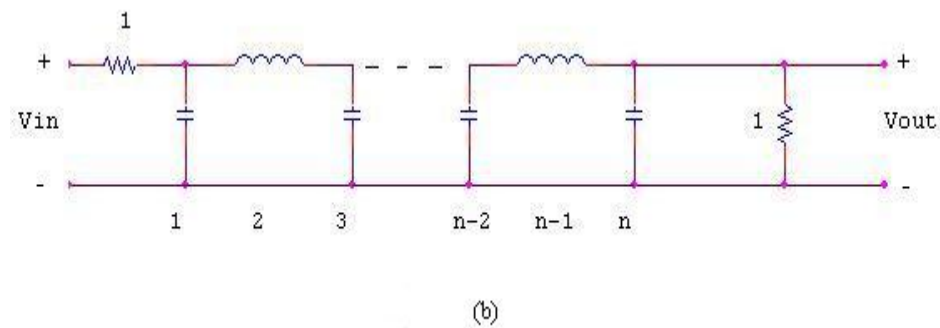
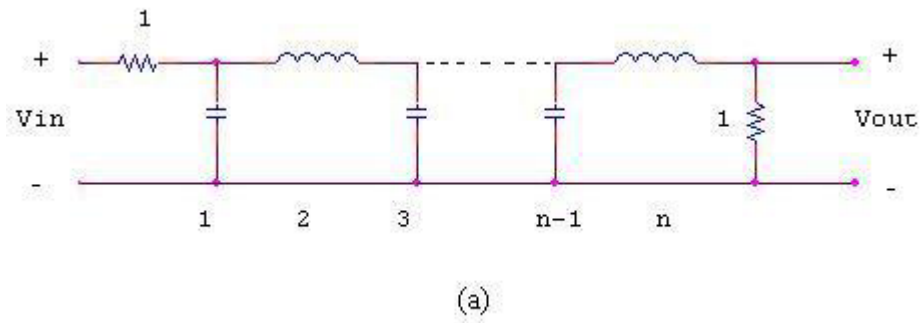


Figura 9. Configuraciones para redes escalera a) Orden par, b) Orden impar.

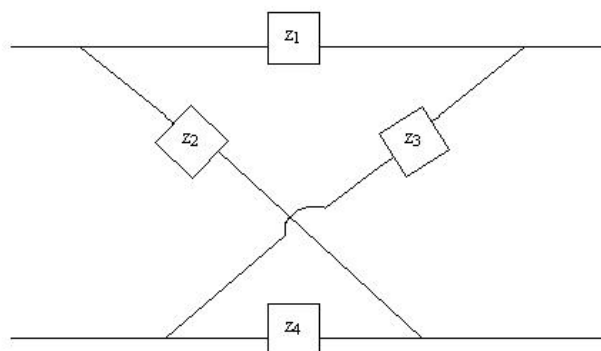


Figura 10. Red tipo reja o cruzada.

3.4.2 REALIZACIONES ACTIVAS.

Este nombre proviene del uso de elementos activos como son los amplificadores operacionales, además de resistores y capacitores, los cuales también pueden ser implementados mediante la utilización de circuitos integrados. Esto conlleva a que no sea necesario el uso de inductores, por lo que el tamaño y costo se vean reducidos considerablemente, pero la desventaja principal de este tipo de implementaciones es que presentan sensibilidades muy altas.

Existen diferentes tipos de realizaciones activas, proporcionando distintas opciones de diseño. De todas las existentes, la forma más sencilla de implementar filtros activos es conectar en cascada etapas de segundo orden, cada etapa realizando un par de polos complejos conjugados si el orden de la función de transferencia es par, y si el orden es impar se requerirá añadir una etapa de primer orden que realice solamente un polo real. La norma es que las etapas deben conectarse en orden ascendente del valor de Q del puerto de entrada hacia el puerto de salida.

De este modo, la realización activa de segundo orden más simple y más empleada es la *realización Sallen-Key*, conocida así por sus creadores R.P Sallen y E.L. Key, considerados como padres de los filtros activos. De igual forma se puede utilizar para implementar cualquiera de los tipos de filtros obtenidos a través de los distintos tipos de aproximación. Como ejemplo, a continuación se muestra una típica red pasabajos específica de este tipo de configuración:

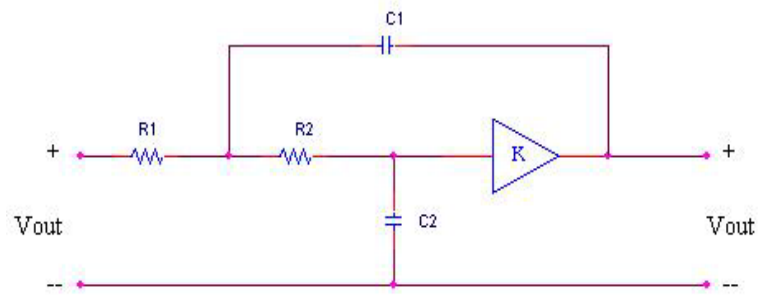


Figura 11. Filtro Sallen-Key pasabajos de segundo orden.

Otra realización muy ampliamente difundida, es la **configuración de retroalimentación múltiple** que, a diferencia de la anterior, posee dos trayectorias de retroalimentación negativa. De la misma manera que en los casos anteriores, se parte de la síntesis del circuito pasabajos para la obtención de los demás tipos. En la siguiente figura se muestra la red pasabajos para esta configuración:

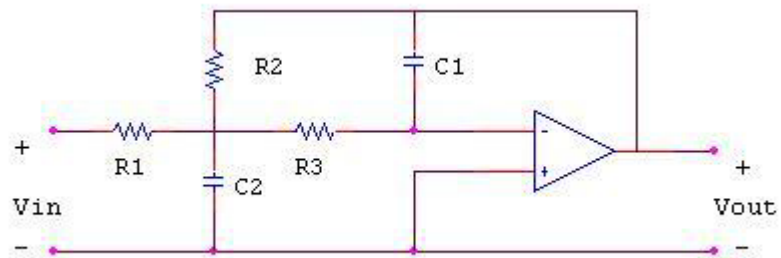


Figura 12. Filtro pasabajos de retroalimentación múltiple.

Siguiendo la misma línea, existe un tercer tipo de red activa, la **realización Deliyannis-Friend**, la cual es una variación de la topología de retroalimentación múltiple y cuyo propósito es reducir la disparidad de los valores en los componentes pasivos. Dicha variación consiste en introducir una malla de retroalimentación positiva mediante un divisor de voltaje. Esta configuración es muy útil, ya que para realizar funciones Chebyshev inversas no es posible usar ninguna de las otras topologías debido a que se requiere la realización de ceros finitos, y una de las mayormente empleadas es la de Deliyannis-Friend modificada, conocida como **Filtro Bicuadrático de Deliyannis-Friend**; cabe mencionar que la configuración bicuadrática no es adecuada para la implementación de funciones pasabajas. El circuito pasabajas típico de la configuración Deliyannis-Friend es el mostrado a continuación:

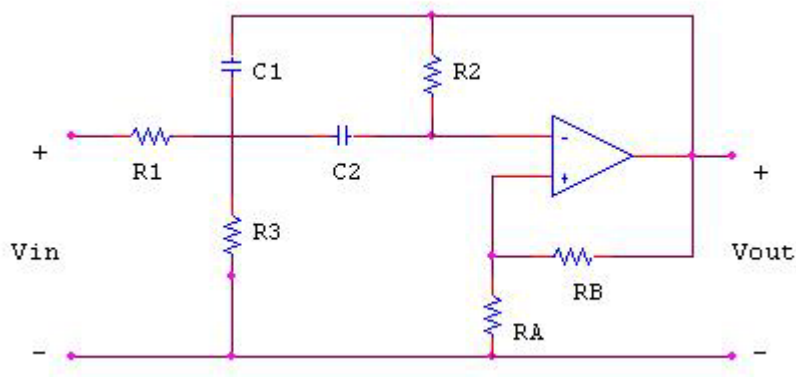


Figura 13. Filtro Deliyannis-Friend pasabanda.

Por otra parte, en este diagrama se ilustra la red bicuadrática:

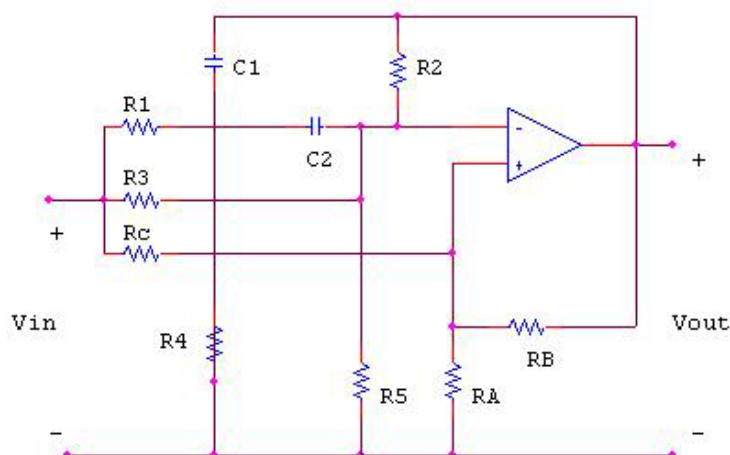


Figura 14. Filtro bicuadrático.

Por último, pero no de menor importancia, se tiene al **Filtro** de segundo orden *de Variables de Estado*, conocido también como **Filtro KHN** por sus inventores W.J. Kerwin, L.P. Huelsman y R.N. Newcomb, el cual fue el primer circuito constituido incluyendo tres amplificadores operacionales y es capaz de realizar funciones pasabajas, pasaaltas y pasabanda, y si se le realizan modificaciones mínimas también realizará funciones rechazabanda. El nombre de **filtro de variables de estado** tiene como origen los métodos de variables de estado para la resolución de ecuaciones diferenciales a los que se recurren para la obtención del circuito. Estas redes toman ventaja de la reducción del costo de los amplificadores operacionales, y de este modo proporcionan ventajas como mayor sencillez en las ecuaciones de diseño, realización de varios tipos de funciones con sólo cambiar la selección del nodo de salida y menor sensibilidad. En esta figura se ilustra dicha red:

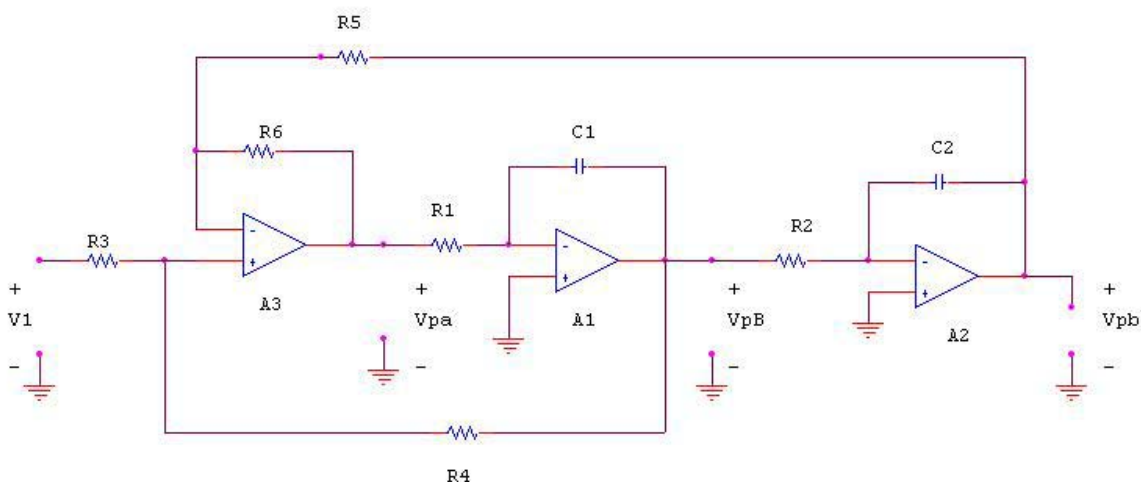


Figura 15. Filtro KHN.

A modo de conclusión de este apartado, cabe mencionar que las limitantes para todas las redes activas son el ancho de banda y ganancia finitos de los amplificadores operacionales. Es decir, no sería prudente considerar dichos elementos como ideales, ya que la ganancia A que los caracteriza no es infinita, sino que es función de la frecuencia. Dichos efectos fueron estudiados por Aram Budak y Dashamir M. Petrela, y observaron que se presenta un corrimiento de los polos hacia el origen y hacia el eje $j\omega$ para valores pequeños del producto ganancia ancho de banda ($GB = A_0\omega_3$), que corresponde a la frecuencia donde la ganancia del amplificador tiene valor unitario, lo cual se traduce como un aumento de la Q y una disminución de la frecuencia de corte.

3.5 FILTROS DIGITALES.

Un filtro digital es un *sistema lineal e invariante en el tiempo discreto*, cuyo propósito es modificar la distribución en frecuencia de los componentes de una señal, con base en una serie de especificaciones y empleando operaciones aritméticas de precisión limitada. La operación que consiste en modificar esa distribución utilizando un sistema digital, es conocida como filtrado digital. Las señales analógicas tienen que ser convertidas en señales de datos muestreados para poder ser filtradas digitalmente, esto significa que las señales continuas deben convertirse en datos discretos, siempre recordando el teorema de Nyquist, que establece que la frecuencia del muestreo debe ser por lo menos igual a dos veces la frecuencia de la señal a muestrear.

Por razones históricas, los filtros digitales han sido estudiados más que cualquier otra rama del procesamiento digital de señales. Han sido desarrollados y estudiados para simular por computadora filtros analógicos. Esto permitió comprobar el rendimiento y optimizar los parámetros de dichos filtros antes de su implementación. Con el paso del tiempo, además de los beneficios de la simulación, se han desarrollado métodos específicos para el diseño de filtros digitales. De igual manera, las aplicaciones se han incrementado y entre ellas se encuentran mejoramiento de radares, reducción de la redundancia en las señales de voz, reconocimiento de voz, simulación de sistemas físicos, modelado de canales de transmisión, modelado de sistemas lineales, procesamiento de señales sísmicas, procesamiento de imágenes, y procesado de señales de audio y de control, entre otras tantas.

El diseño de los sistemas de filtrado digitales involucra tres pasos básicos: 1) la especificación de las propiedades deseadas del sistema; 2) la aproximación de dichas

especificaciones utilizando un sistema causal de tiempo discreto; y 3) la realización del sistema empleando aritmética de precisión finita. Pueden ser implementados en el laboratorio utilizando compuertas y circuitos digitales o bien utilizando una computadora. La implementación dependerá siempre de la aplicación y el entorno del usuario. Por ejemplo, en la educación y la investigación se implementan típicamente como programas en una computadora de propósito general; en la industria comúnmente se implementan con una microcomputadora; y en aplicaciones de alta velocidad o de gran volumen, como control de motores de automóviles, los filtros digitales pueden consistir en circuitos integrados de propósito especial.

En términos generales, un filtro digital consiste en la interconexión de tres tipos de elementos simples: *sumadores, multiplicadores y registros*. El sumador y el multiplicador son componentes simples conceptualmente y están implementados en la unidad lógica de una computadora. Los registros son componentes que dan acceso a valores futuros y pasados de la secuencia de datos. Los registros pueden ser positivos o negativos. Un registro positivo, o de retardo, se implementa por una localidad de memoria que almacena valores actuales de una secuencia durante un intervalo de muestreo. Un registro negativo, o de avance, se usa para predecir el siguiente valor en una secuencia, y se utilizan comúnmente en aplicaciones en las cuales la secuencia de datos completa debe estar disponible al inicio del procesamiento, como en el procesamiento digital de imágenes.

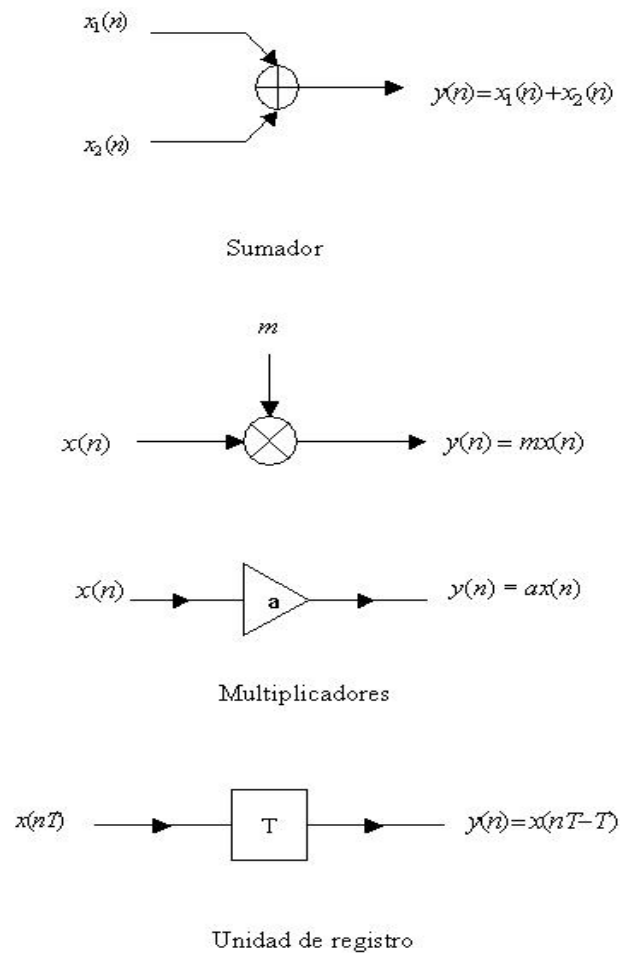


Figura 16. Elementos de los filtros digitales.

En el aspecto matemático, se tiene que la respuesta en frecuencia $G(f)$ de un sistema lineal e invariante en el tiempo, se describe por las transformadas de Fourier de las señales de la salida $Y(f)$ y la entrada $X(f)$, denotada por la expresión:

$$Y(f) = G(f)X(f)$$

La cual indica que las distribuciones en frecuencia de la amplitud y la fase de la señal de entrada $x(k)$ son modificadas por el sistema de acuerdo con la forma particular de la función compleja $G(f)$, que determina la atenuación o amplificación de las diferentes componentes frecuenciales.

En el dominio del tiempo, la ecuación anterior se conoce como producto convolución, y se escribe:

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(l)x(k-l)$$

donde $g(k)$ es la respuesta al impulso del sistema. La transformada Z de ambos lados de la ecuación conduce a:

$$Y(z) = G(z)X(z)$$

donde $G(z)$, que denota la transformada Z de la respuesta al impulso $g(k)$, es la función de transferencia del sistema.

Si asumimos que la función de transferencia puede ser escrita como el cociente de dos polinomios en z o z^{-1} , las señales de entrada y la salida quedan relacionadas por la siguiente ecuación diferencial:

$$\sum_{n=0}^N a_n y(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m)$$

Para que sea posible implementarlo, el sistema debe ser al mismo tiempo causal y estable. Además, el filtrado debe ser realizado con un número finito de operaciones aritméticas de precisión finita necesariamente. De este modo, si la respuesta al impulso es de longitud finita y se tiene que:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{+\infty} g(l)x(k-l)$$

Por último, en función de la duración de su respuesta al impulso unitario, se clasifican en *filtros de respuesta infinita al impulso (IIR)* y *filtros de respuesta finita al impulso (FIR)*. Básicamente los filtros IIR y FIR se diferencian en que los sistemas IIR deben aproximarse a la respuesta en frecuencia deseada mediante una función racional, y los FIR mediante una aproximación polinomial. En cuanto a la implementación la diferencia estriba en que los primeros presentarán trayectorias de retroalimentación, en tanto que los segundos no. A continuación se describirán brevemente ambos tipos de sistemas.

3.5.1 FILTROS DIGITALES DE RESPUESTA INFINITA AL IMPULSO (IIR).

Este tipo de filtros digitales se asemeja a los filtros analógicos en la respuesta al impulso unitario, la cual decrece exponencialmente en el dominio del tiempo, pero nunca desaparece completamente. Como se puede inferir de su nombre, sus respuestas al impulso son de duración infinita, en otras palabras las muestras $g(k)$ son diferentes de cero en un intervalo infinito esto es $k_0 \leq k \leq \infty$. Presentan cortes más agudos en su respuesta de magnitud que los

FIR, por lo que requieren menos localidades de memoria para su realización, la cual es recursiva. En la implementación la entrada se retroalimenta con las salidas, por lo que el filtro puede ser un sistema inestable; en cuanto al cálculo si se requieren polos cerca del círculo unitario se deberá tener cuidado para asegurarse de que no se presenten inestabilidades. Usualmente son más eficientes en términos de tiempo de cómputo y requerimientos de memoria que los filtros IIR. La respuesta actual de un sistema de este tipo, estará definida tanto por el valor actual de la muestra, como de valores futuros, así como del valor de la respuesta anterior.

La respuesta de un filtro recursivo en un instante nT , estará dada por:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N a_i x(nT - iT) - \sum_{i=1}^N b_i y(nT - iT) - \quad a_i, b_i = \text{constantes}$$

En esta figura se muestra la implementación de un sistema de este tipo:

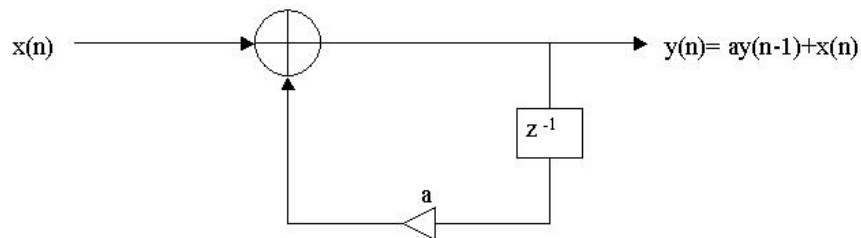


Figura 17. Filtro digital recursivo de primer orden.

3.5.2 FILTROS DIGITALES DE RESPUESTA FINITA AL IMPULSO (FIR).

Como su nombre lo describe, estos filtros se caracterizan por presentar respuestas al impulso de duración finita. En este caso, las muestras $g(k)$ son diferentes de cero sólo en un intervalo de duración finita L con lo cual $k_0 \leq k \leq k_0 + L - 1$. No presentan problemas de estabilidad ni de causalidad, ya que no existen lazos de retroalimentación de la o las salidas hacia la entrada, de este modo la salida actual no estará definida por las salidas anteriores ni se obtendrá una respuesta sin una señal de entrada. Con ellos se puede obtener una respuesta en fase lineal y su implementación es no recursiva debido a que la entrada no es una función de la salida, como ya se mencionó. El diseño de un filtro FIR que aproxime una magnitud arbitraria manteniendo una fase lineal es sencillo, esta propiedad de linealidad de fase es necesaria para aplicaciones que requieran que la forma de onda original sea conservada, tales como procesamiento y transmisión de datos. En otras palabras, la fase del retardo es constante, así como el retardo de grupo, por lo que la forma de onda de la salida de un filtro lineal es la misma que la forma de onda de la entrada con un simple tiempo de retraso. El ruido asociado con estas realizaciones puede ser más fácilmente disminuido que en las de respuesta infinita al impulso. Pese a lo anterior, estos dispositivos presentan la desventaja de que para órdenes de filtros más altos se requiere aproximar filtros de corte más agudos.

La siguiente ecuación define la respuesta de un filtro no recursivo en un instante nT :

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N a_i x(nT - iT) \quad a_i = \text{constantes}$$

A continuación se muestra la implementación de un sistema de este tipo:

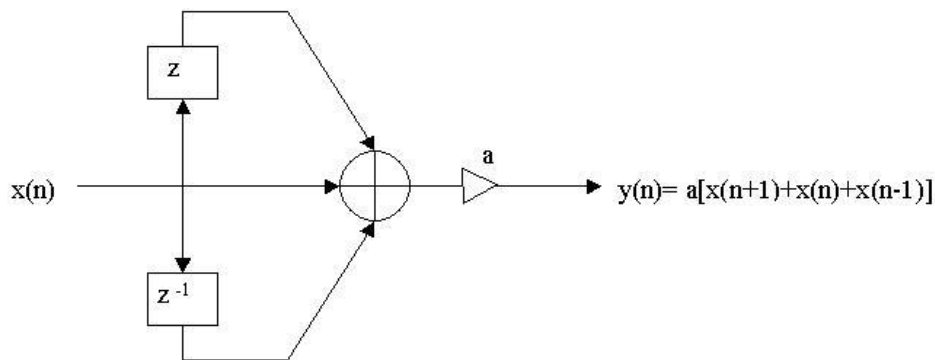


Figura 18. Filtro digital no recursivo de primer orden.

3.5.3 MÉTODOS DE DISEÑO DE FILTROS DIGITALES.

El problema central del diseño de los filtros digitales estriba en la aproximación. Para el diseño, se emplean métodos muy diferentes, dependiendo del tipo de sistema que se quiera obtener, IIR o FIR. A continuación se explicarán los procedimientos específicos que han sido desarrollados, pero el algoritmo general de diseño consiste en:

- a) Elección del tipo de filtro (IIR o FIIR)
- b) Determinación de los coeficientes del filtro que concuerden con las especificaciones.
- c) Verificación de que el diseño resultante cumpla con las especificaciones.

3.5.3.1 DISEÑO DE FILTROS IIR.

La aproximación tradicional para el diseño de filtros digitales IIR involucra la transformación de un filtro analógico en un filtro digital que cumpla con las especificaciones establecidas. Esto es razonable ya que el arte del diseño de filtros analógicos es altamente avanzado y muchos métodos útiles en su diseño se basan en fórmulas cerradas relativamente simples.

Un procedimiento para transformar un diseño de filtro analógico a uno digital consiste en la selección de la respuesta muestra simple del filtro digital como muestras igualmente espaciadas de la respuesta al impulso del filtro analógico. Este método se conoce como *Invarianza al Impulso* y va más allá de un simple mapeo algebraico del plano s al plano z . En otras palabras, consiste en escoger una respuesta muestra unitaria para el filtro digital que se asemeje en cierto sentido a la respuesta al impulso del filtro analógico. La desventaja que presenta este método es que introduce distorsión en la respuesta al impulso debido al aliasing, de no ser por ello, la correspondencia entre la frecuencia analógica y digital es lineal.

Un segundo método consiste en aproximar las derivadas de la ecuación diferencial descriptiva de un sistema analógico mediante diferencias finitas, dicha ecuación es la siguiente:

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M d_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k}$$

Este es un procedimiento estándar en análisis numérico y simulaciones de sistemas analógicos, que comúnmente se conoce como *Diseño basado en la solución numérica de la ecuación diferencial*.

En el caso anterior, se obtenía un filtro digital al aproximar derivadas mediante diferencias. Un procedimiento alternativo se basa en la integración de la ecuación diferencial y después aplicar aproximación numérica a la integral, y es denominado *Transformación Bilineal*. Esta aproximación siempre permite llegar a filtros digitales estables partiendo de filtros analógicos estables. Tienen como ventaja que evitan el problema del aliasing encontrado con el uso de la invarianza del impulso, porque realiza un mapeo completo del eje imaginario del plano s hacia el círculo unitario en el plano z . La consecuencia desfavorable que conlleva es la introducción de distorsión en el eje de frecuencias, por lo que consecuentemente, el diseño de filtros digitales usando la transformación bilineal solamente es útil cuando dicha distorsión puede ser tolerada o compensada.

3.5.3.2 DISEÑO DE FILTROS FIR.

En cuanto al diseño, se manejan series de Fourier, ya que se trabaja en el dominio de la frecuencia durante el proceso, y como se sabe, la expansión de dichas series llega hasta el infinito.

Dado que la respuesta en frecuencia de un filtro no recursivo es una función periódica de ω con un período ω , puede ser expresada como una serie de Fourier:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega n T}$$

donde

$$h(nT) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega n T} d\omega$$

y si $e^{j\omega T} = z$, se tiene que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) z^{-n}$$

Partiendo de una representación analítica de la respuesta en frecuencia, se puede derivar la función de transferencia correspondiente. Desafortunadamente esta es no causal y de orden infinito. Para una función de transferencia de orden finito, la serie anterior puede ser truncada asentando que

$$h(nT) = 0 \quad \text{para} \quad |n| > \frac{N-1}{2}$$

en cuyo caso

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} [h(-nT)z^n + h(nT)z^{-n}]$$

La causalidad puede lograrse al multiplicar $H(z)$ por $z^{-(N-1)/2}$, así se obtiene

$$H'(z) = z^{-(N-1)/2} H(z)$$

Esta modificación es permisible ya que la respuesta en amplitud permanece sin modificación alguna y el retardo de grupo será incrementado por una constante de $(N-1)T/2$.

Pero la truncación directa de las series de Fourier conlleva oscilaciones o perturbaciones en las bandas de paso y de rechazo, las cuales son debidas a la lenta convergencia de las series, a su vez ocasionadas por las discontinuidades en los límites de las bandas, lo cual se conoce como **Fenómeno de Gibbs**.

Como se puede entender, la anterior no es una vía razonable para el diseño de estos sistemas. Una técnica alternativa y sencilla para la reducción de las oscilaciones de Gibbs es pre-condicionar $h(nT)$ usando funciones en el dominio del tiempo llamadas **Funciones Ventana**. De esta manera:

$$H(z) = \mathcal{L} [h(nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)z^{-n}$$

$$W(z) = \mathcal{L} [w(nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nT)z^{-n}$$

$$H_w(z) = \mathcal{L} [w(nT)h(nT)]$$

donde $w(nT)$ representa la función ventana. El uso de la convolución compleja conduce a

$$H_w(z) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} H(v)W\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

donde Γ representa un contorno en la región común de convergencia de $H(v)$ y $W(z/v)$, con

$$v = e^{j\Omega T} \quad \text{y} \quad z = e^{j\omega T}$$

y $H(v)$ así como $W(z/v)$ convergen en el círculo unitario del plano v , y también se tiene que

$$H_w(e^{j\omega T}) = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} H(e^{j\Omega T})W(e^{j(\omega-\Omega)/T})d\Omega$$

Para fines de la exposición se establece que

$$H(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{para } \omega_c \leq |\Omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

y asumiendo que

$$W(e^{j\omega T}) = 0 \quad \text{para} \quad \omega_m \leq |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

$H_w(e^{j\omega T})$ puede ser formada, utilizando el siguiente método gráfico:

1. Desplazar $W(e^{j\omega T})$ hacia la derecha por ω .

2. Multiplicar $H(e^{j\Omega T})$ por $W(e^{j(\omega-\Omega)T})$.
3. Encontrar el área bajo a curva resultante.

Evidentemente, al satisfacer la ecuación anterior y que el área bajo la curva se igual a la unidad, la función derivada $H_w(e^{j\omega T})$ será una aproximación muy cercana a $H(e^{j\omega T})$ y, además, será libre de las oscilaciones de Gibbs.

Las Funciones Ventana más comúnmente empleadas son:

- Rectangular
- Triangular o Bartlett
- Hann
- Hamming
- Blackman
- Kaiser

y serán explicadas a continuación.

VENTANA RECTANGULAR.

La ventana rectangular está dada por:

$$W_R(nT) = \begin{cases} 1 & \text{para toda } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{para cualquier otro} \end{cases}$$

Lo que corresponde a la truncación directa de las series de Fourier, y sus efectos sobre $H(e^{j\omega T})$ ya fueron descritos anteriormente.

El espectro de $W_R(e^{j\omega T})$ puede ser obtenido mediante:

$$\begin{aligned} W_R(nT) &= \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-j\omega T} = \frac{e^{j\omega(N-1)T/2} - e^{-j\omega(N+1)T/2}}{1 - e^{-j\omega T}} \\ &= \frac{e^{j\omega NT/2} - e^{-j\omega NT/2}}{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}} = \frac{\sin(\omega NT / 2)}{\sin(\omega T / 2)} \end{aligned}$$

Partiendo de que $W(e^{j\omega T}) = 0$ en $\omega = m\omega_s / N$ para $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, el **ancho del lóbulo principal** es $2\omega_s / N$. La **razón de rizo** es definida como:

$$RR = \frac{100 \text{ (amplitud máxima del lóbulo secundario)}}{\text{amplitud del lóbulo principal}} \%$$

En esta gráfica se muestra el espectro típico que se obtiene al aplicar esta función:

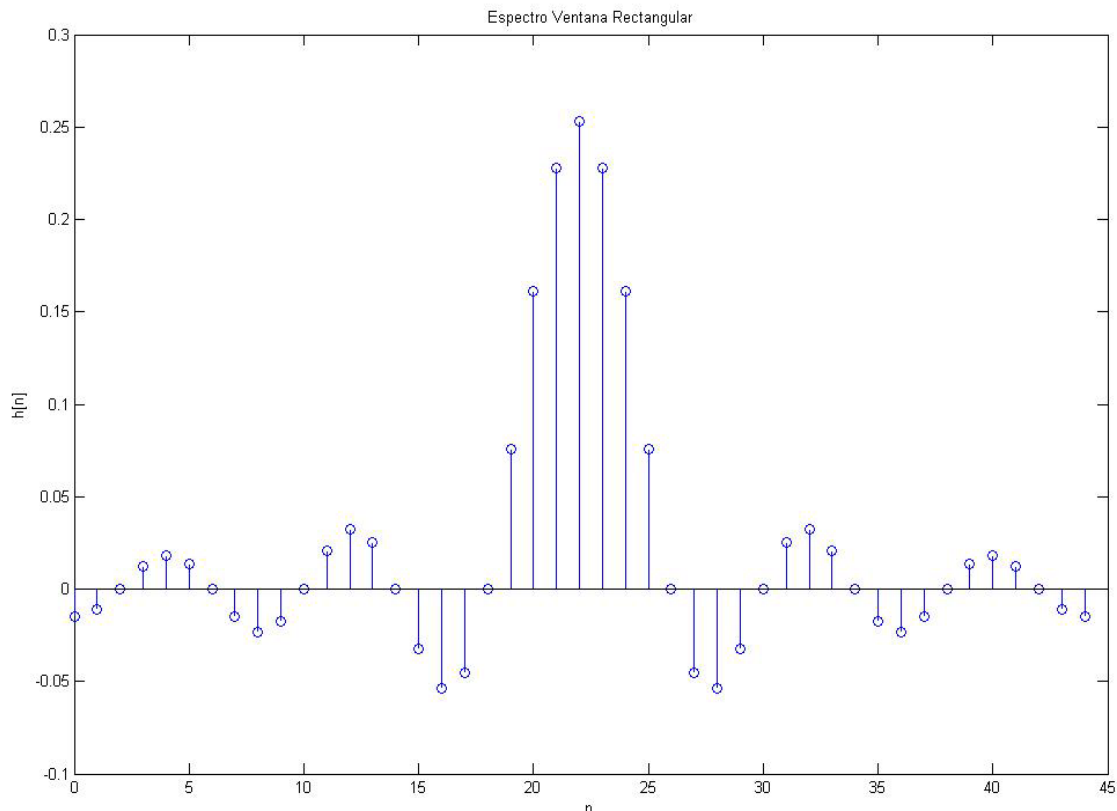


Figura 19. Espectro de la función ventana rectangular.

VENTANA TRIANGULAR O BARTLETT.

Esta función queda definida de la siguiente manera:

$$W_T(nT) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & \text{para } 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \text{para } \frac{N-2}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{para cualquier otro} \end{cases}$$

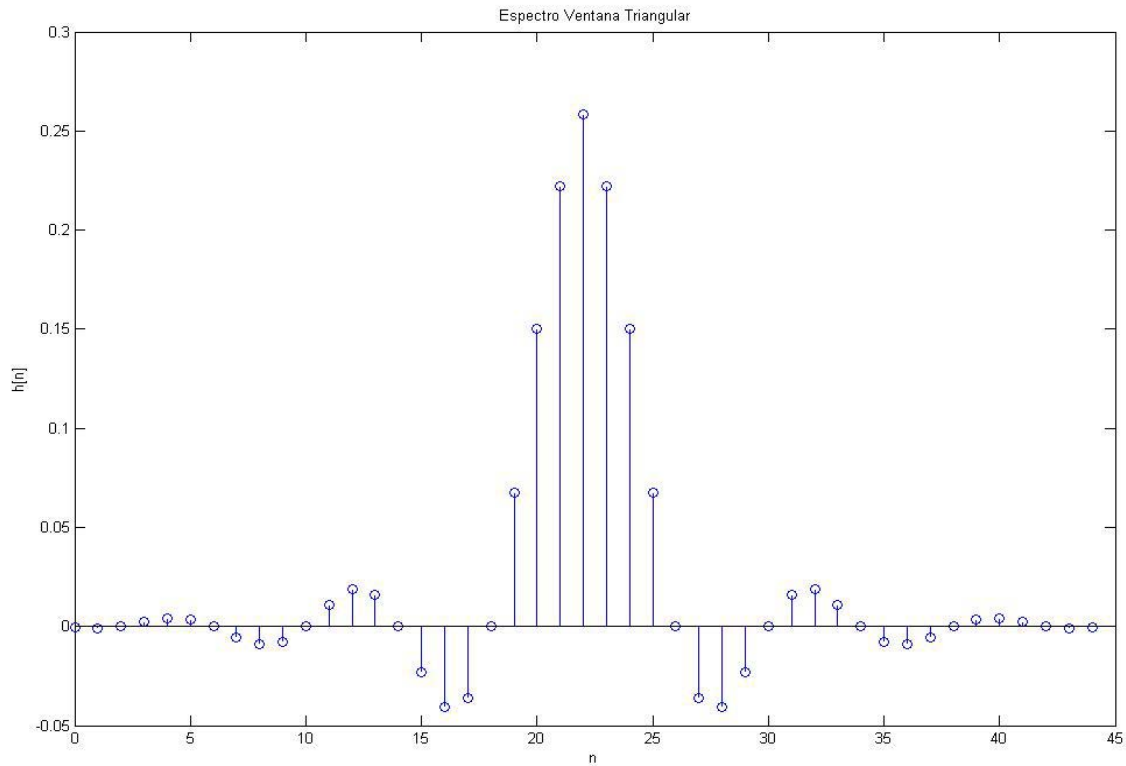


Figura 20. Espectro de la función ventana triangular.

VENTANAS HANN Y HAMMING.

Las ventanas Hann y Hamming están dadas por:

$$W_H(nT) = \begin{cases} \alpha + (1 + \alpha) \cos \frac{2n\pi}{N-1} & \text{para toda } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{para cualquier otro} \end{cases}$$

La diferencia entre ellas estriba en la selección del valor de α . Para la ventana Hann $\alpha = 0.5$, y en el caso de la ventana Hamming $\alpha = 0.54$.

Los espectros dichas funciones están definidos por la siguiente ecuación:

$$W_H(e^{j\omega}) = \frac{\alpha \sin(\omega NT / 2)}{\sin(\omega T / 2)} + \frac{1 - \alpha \sin[\omega NT / 2 - N\pi / (N - 1)]}{2 \sin[\omega T / 2 - \pi / (N - 1)]} + \frac{1 - \alpha \sin[\omega NT / 2 + N\pi / (N - 1)]}{2 \sin[\omega T / 2 + \pi / (N - 1)]}$$

Consecuentemente, los espectros de las ventanas Hann y Hamming pueden obtenerse al desplazar $W_R(e^{j\omega T})$ primero hacia la derecha y luego hacia la izquierda por un factor de $2\pi / (N-1)T$ y subsecuentemente realizando la suma de la ecuación anterior.

Cabe mencionar que tanto la función Hann como la función Hamming, presentan lóbulos laterales reducidos, en comparación con los de la Ventana Rectangular. El ***ancho del lóbulo principal*** en ambos casos es aproximadamente $4\omega_s / N$.

En estas gráficas se muestran los espectros típicos que se obtienen al aplicar estas funciones:

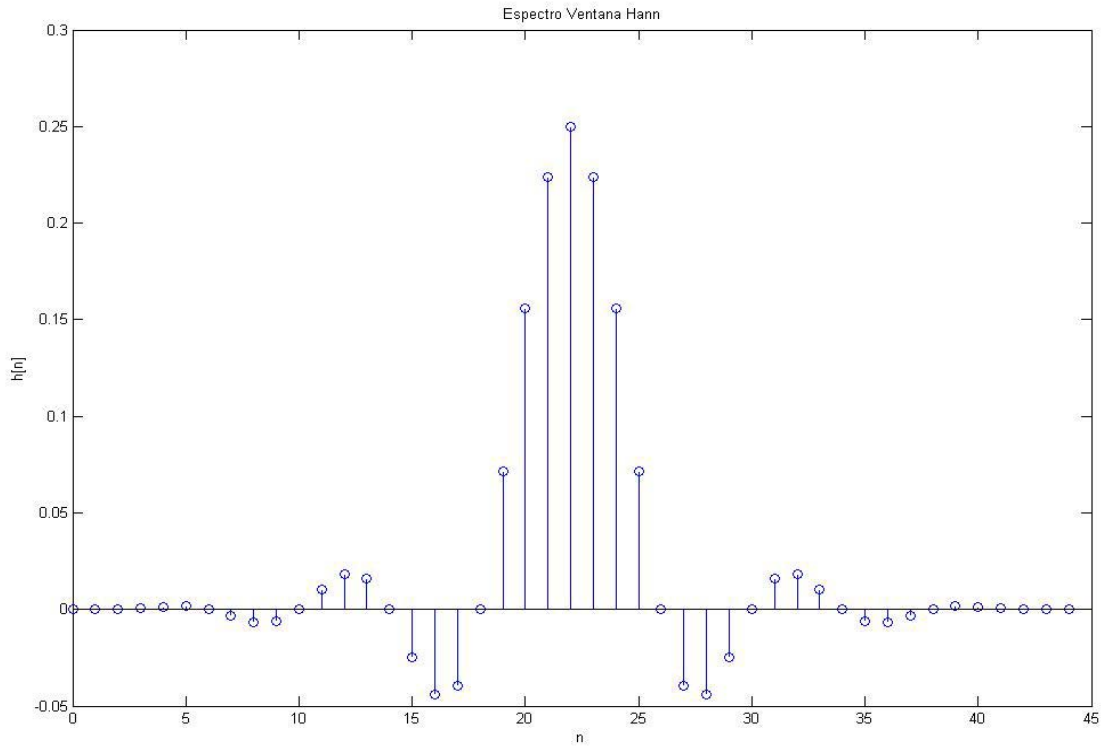


Figura 21. Espectro de la función ventana Hann.

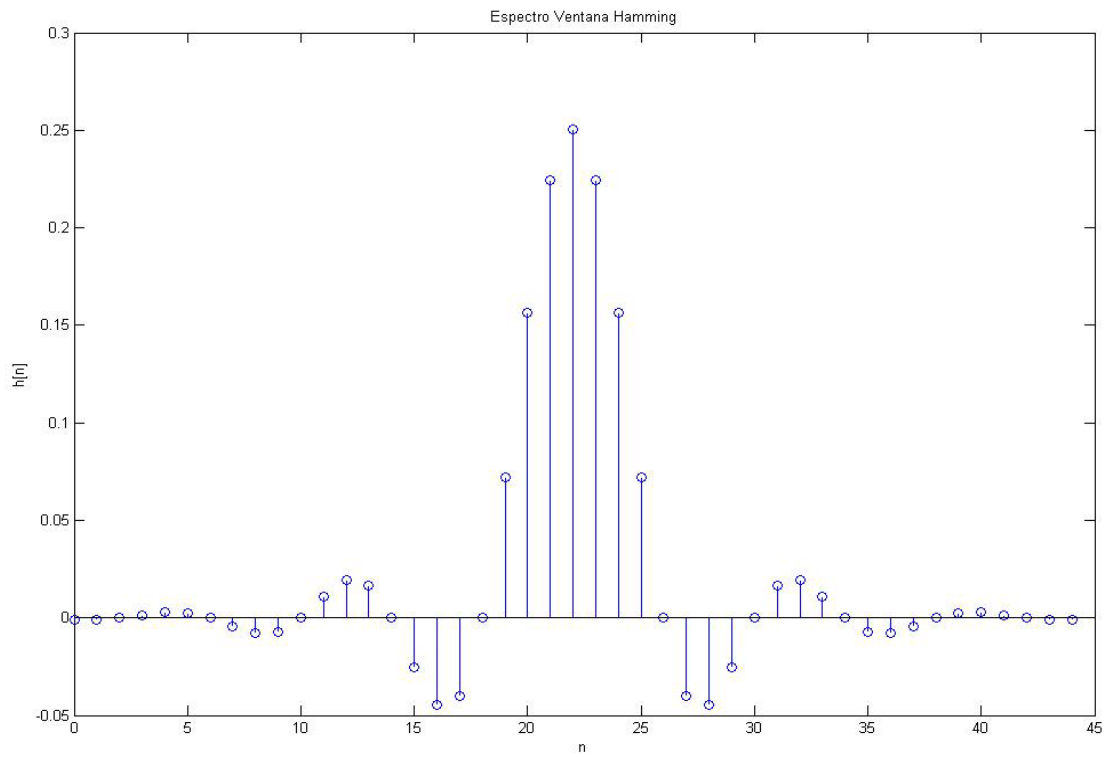


Figura 22. Espectro de la función ventana Hamming.

VENTANA BLACKMAN.

Es una función similar a las anteriores y está dada por:

$$W_B(nT) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos \frac{2n\pi}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4n\pi}{N-1} & \text{para toda } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{para cualquier otro} \end{cases}$$

El término coseno adicional conduce a una reducción de la amplitud de las oscilaciones introducidas por el fenómeno de Gibbs. En este caso, el *ancho del lóbulo principal* llega a $6\omega_s / N$.

En esta gráfica se muestra el espectro típico que se obtiene al aplicar esta función:

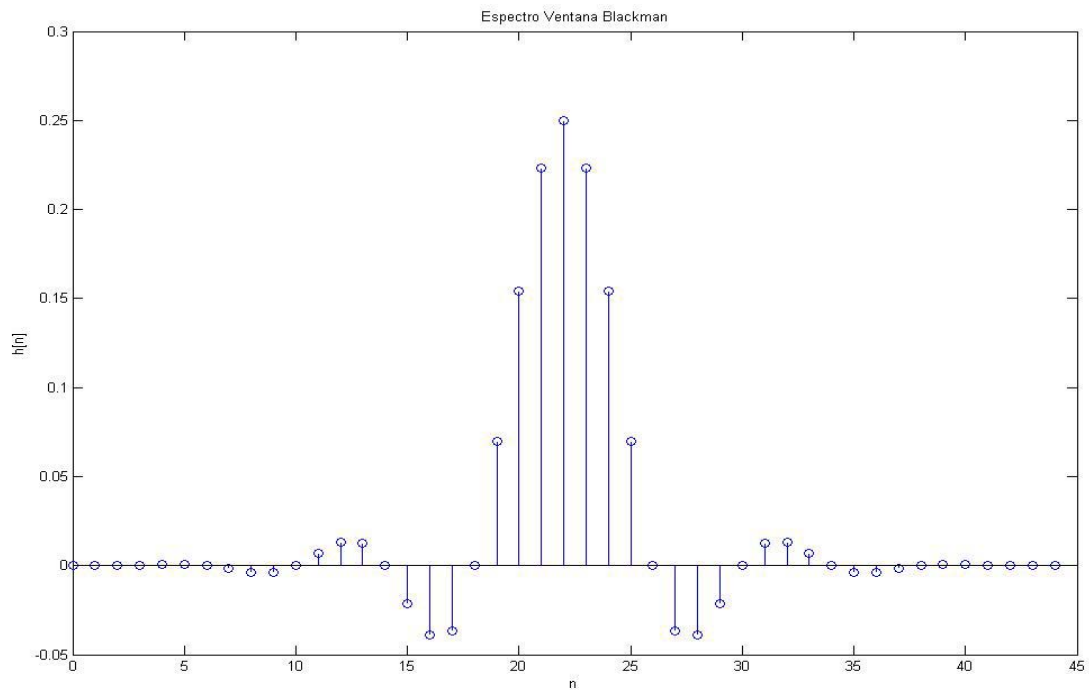


Figura 23. Espectro de la función ventana Blackman.

VENTANA KAISER.

Como ya se puede haber deducido, existe una relación inversamente proporcional entre el factor de rizo y el ancho del lóbulo principal. Este último parámetro puede ajustarse al variar el valor de N . Si en embargo, el factor de rizo se mantiene prácticamente constante para cada tipo de ventana. Así, para alcanzar la atenuación mínima en la banda de paso y rizo en la banda de paso, el diseñador debe primeramente seleccionar una ventana con una razón de rizo apropiada y después seleccionar N para lograr la transición de ancho pre establecida. Dado que el número de posibles razones de rizo está limitado por el número de ventanas disponible, el diseñador frecuentemente debe optar por una ventana con una razón de rizo innecesariamente baja y que, obviamente, tendrá un valor muy alto para el ancho del lóbulo principal. Subsecuentemente, para alcanzar la transición de ancho deseada, N y el orden del filtro deberán tomar valores innecesariamente altos. Una ventana que se sobrepone a este problema es la desarrollada por Kaiser. Esta ventana está definida por:

$$W_K(nT) = \begin{cases} \frac{I_0(\beta)}{I_0(\alpha)} & \text{para toda } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{para cualquier otro} \end{cases}$$

donde α es un parámetro independiente y

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}$$

$I_0(\alpha)$ es la función Bessel de primer tipo de orden cero. Esta puede ser evaluada con el grado de exactitud deseado utilizando la serie convergente

$$I_0(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right]^2$$

El espectro de $W_K(e^{j\omega T})$ puede obtenerse a partir de

$$W_K(nT) = w_K(0) + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} w_K(nT) \cos \omega nT$$

La propiedad más importante de esta función, es que la razón de rizo puede variar continuamente desde el valor bajo en la ventana Blackman hasta el valor alto de la ventana rectangular, con el simple hecho de variar el parámetro α . Y, como en las otras funciones, el ancho del lóbulo principal puede ser ajustado al variar N .

En esta gráfica se muestra el espectro típico que se obtiene al aplicar esta función:

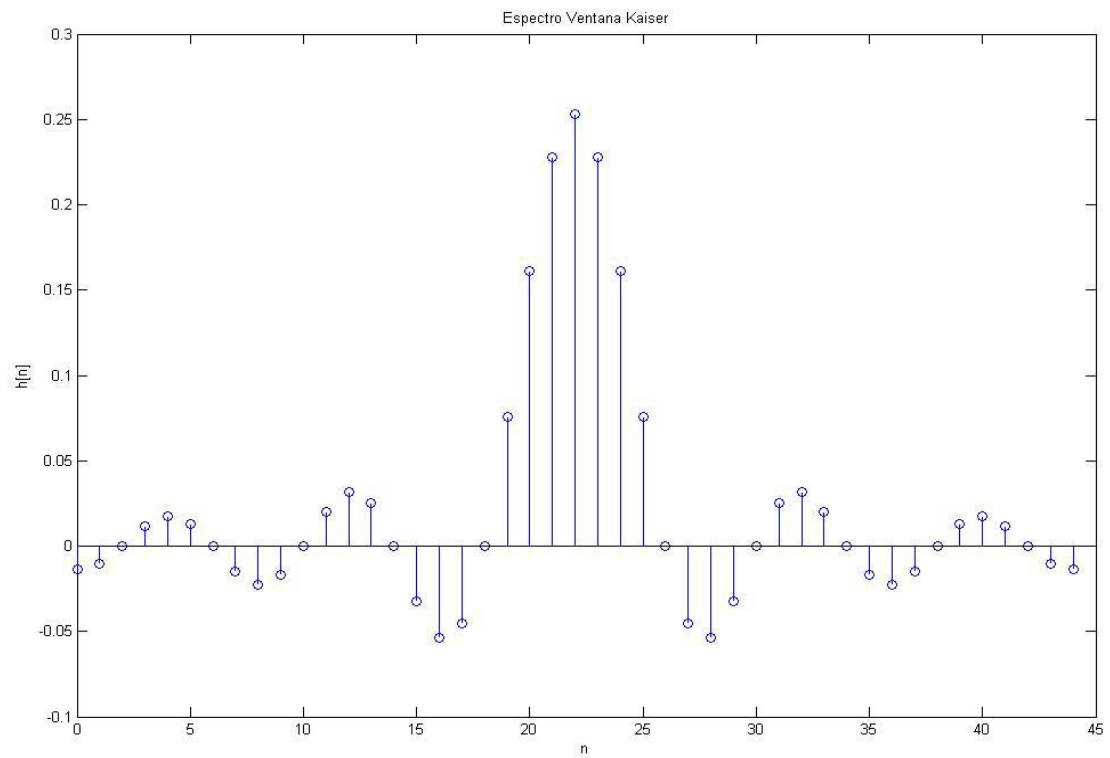


Figura 24. Espectro de la función ventana Kaiser.