

CAPÍTULO 5
-BANCOS DE FILTROS
DIGITALES-

5.1 INTRODUCCIÓN

Durante las dos últimas décadas, los bancos de filtros han encontrado varias aplicaciones en diferentes áreas, tales como codificación de voz, *scrambling*, procesamiento adaptivo de señales, compresión de imágenes, aplicaciones de procesamiento de señales e imágenes, así como también la transmisión de varias señales a través del mismo canal.

El principal uso de los bancos de filtros, es la habilidad de tener un sistema que separe la señal en consideración en el dominio de la frecuencia, en dos o más señales, o la de componer dos o más señales diferentes en una simple señal [5].

Cuando se divide la señal en dos o más señales, se usa un sistema de análisis-síntesis

Los bancos de filtros son generalmente categorizados de dos tipos, *bancos de filtros de análisis* y *bancos de filtros de síntesis*. Un banco de filtros de análisis consiste en un conjunto de filtros, acomodados en paralelo, las características de la respuesta en frecuencia de este banco de filtros, es que divide la señal en sub-bandas [3].

Por otro lado, un banco de filtros de síntesis consiste de un conjunto de filtros cuyas salidas son sumadas para formar la señal sintetizada.

Los bancos de filtros son frecuentemente usados para desarrollar análisis espectral y síntesis de señal. Cuando un banco de filtros es empleado en la computación de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de una secuencia $x(n)$, el banco de filtros se le llama *Banco de Filtros DFT* [4].

En muchos casos, se puede obtener una eficiencia considerable en la implementación de estos bancos de filtros o analizadores de espectros, al aplicar cuidadosamente las técnicas multifrecuencia.

5.2 BANCOS DE FILTROS DIGITALES

Un banco de filtros digitales es una colección de filtros digitales, con una entrada común o una salida común.[3] Ambos casos se muestran en la Figura 5.1, el sistema en la Figura 5.1(a) se le llama *banco de análisis*, y los filtros $H_k(z)$ son llamados *filtros de análisis*. El sistema divide una señal $x(n)$ en M señales $x_k(n)$ típicamente llamadas *señales de sub-banda*. Al sistema en la Figura 5.1(b) se le llama *banco de síntesis* y $F_k(z)$ son los filtros de síntesis. Estos filtros combinan las señales de M sub-bandas en una sola señal $\hat{x}(n)$ [3].

Las Figuras 5.1(c)-(e) muestran la respuesta en frecuencia típica para los filtros de análisis, éstos pueden ser marginalmente traslapados, no traslapados, o muy traslapados, dependiendo de la aplicación.

Dependiendo del número de canales usados para la separación de la señal, hay dos grupos de bancos de filtros uniformes, llamados, *multi-canales* o *Bancos de Filtros de M-canales* (para $M > 2$) y los *Bancos de Filtros de dos-canales* ($M=2$) [1].

En el primer grupo, la señal es separada en M canales diferentes, mientras que en el segundo grupo la señal es separada en dos canales. Usando una estructura de árbol, los bancos de filtros de dos canales, pueden ser usados para crear Bancos de Filtros de M canales en el caso cuando M es una potencia de dos. Una manera más efectiva de crear un Banco de Filtros de M canales, es primero diseñar un filtro prototipo de una manera apropiada. Los filtros en el banco de análisis y síntesis son generados con la ayuda de este prototipo [1].

Los bancos de filtros de dos canales son muy útiles en la generación de Bancos de Filtros Octavos. En este caso, la señal total es primero dividida con la ayuda de un banco de filtros de dos canales, esto para dividir la señal primero en dos bandas. Después de eso, la señal decimada y filtrada por un filtro pasa-bajas se vuelve a dividir en dos bandas usando el mismo banco de filtros de dos canales y así una vez más.

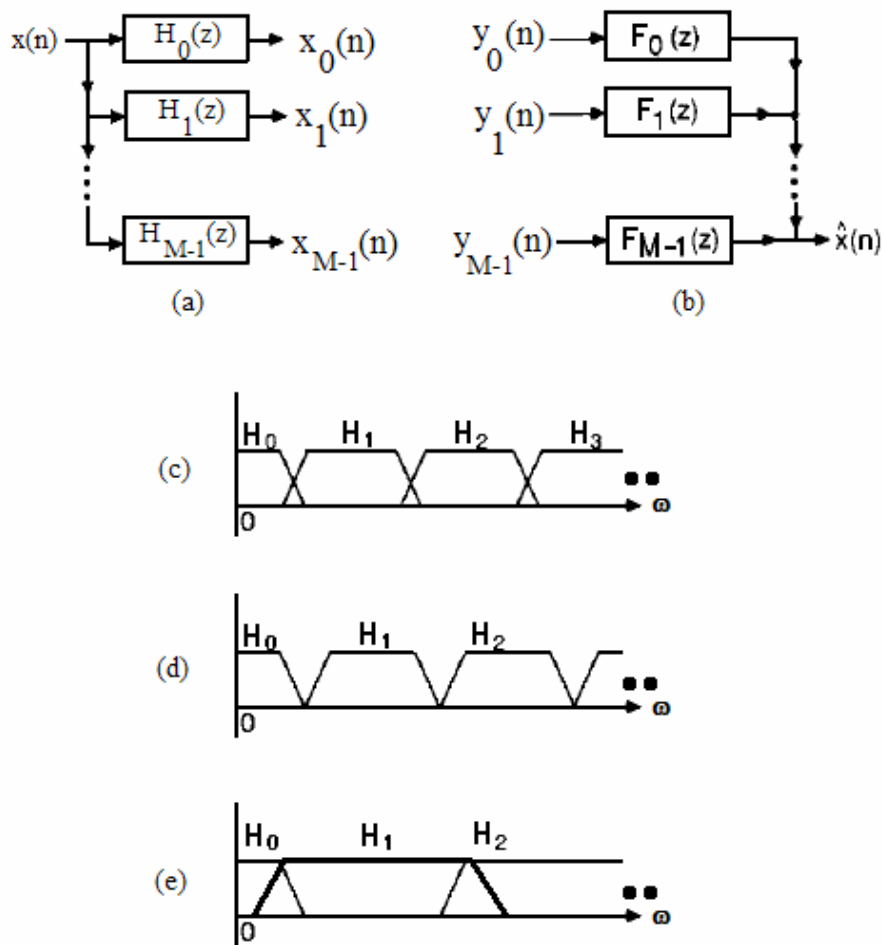


Figura 5.1: Bancos de Filtros Digitales y Respuestas Típicas

5.3 CODIFICACIÓN EN SUB-BANDA DE SEÑALES DE VOZ E IMÁGENES

En la práctica se encuentran señales con energía predominantemente concentrada en una región particular de frecuencia, sin embargo, es más común encontrar señales que no están limitadas en banda, y que tienen bandas de frecuencia dominantes. Un ejemplo se muestra en la Figura 5.2(a) [10].

La información en $|w| > \pi/2$ no es demasiado pequeña para ser descartada. Y tampoco podemos decimar a $x(n)$ sin causar *aliasing*. Desafortunadamente al parecer

una pequeña (pero no despreciable) fracción de energía en la región de alta frecuencia no nos permite algún tipo de compresión de la señal en lo absoluto.

Pero hay una manera de solucionar esta dificultad: podemos dividir la señal en dos bandas de frecuencia al usar un banco de análisis con una respuesta como se muestra en la Figura 5.2(b). La señal de sub-banda $x_1(n)$ tiene menos energía que la señal $x_0(n)$ y por lo tanto puede ser codificada con menos bits que $x_0(n)$. Este es el principio básico de codificación de sub-banda: dividir la señal en dos o más sub-bandas, decimar cada señal de sub-banda, y asignar un número determinado de bits por muestra en cada sub-banda dependiendo del contenido de energía. En la práctica, cuando se realiza la codificación de voz, el número de sub-bandas, el ancho de banda de los filtros y la asignación de bits son elegidos para explotar las *propiedades perceptuales* del escucha humano tales como el rango de frecuencia audible, intensidad del sonido, umbral de escucha, etc. [3]

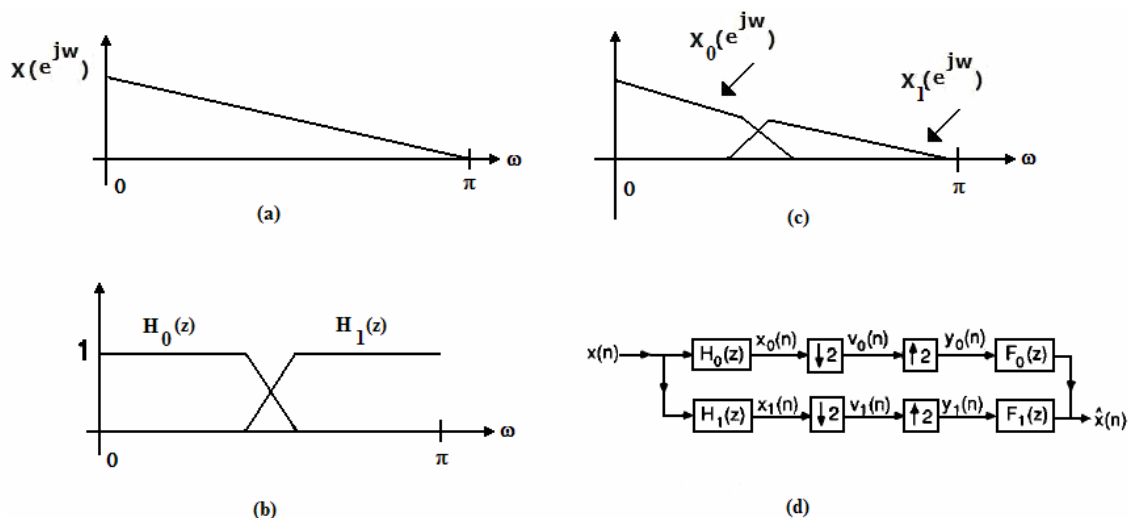


Figura 5.2: (a)-(c): División de una señal en sub-bandas $x_0(n)$ y $x_1(n)$, (d): Sistema de análisis/síntesis para codificación de sub-banda

La reconstrucción de la señal completa se realiza usando los interpoladores y los filtros de síntesis como se muestra en la Figura 5.2(d). Los interpoladores restauran la frecuencia de muestreo original, y los filtros $F_k(z)$ eliminan las imágenes [3].

Inmediatamente surgen más generalizaciones como: la señal puede ser dividida en M sub-bandas, cada una decimada por un factor M y cada una cuantizada independientemente.

La codificación en cada sub-banda es típicamente más sofisticada que el proceso de cuantización. La calidad de los codificadores de sub-banda es usualmente juzgada por lo que se le llama *resultado de la opinión media* (MOS). Este resultado se obtiene al aplicar pruebas de escucha con la ayuda de una amplia variedad de personas sin favoritismos, y pidiéndoles que asignen una puntuación para la calidad de la señal reproducida $\hat{x}(n)$ (en comparación con $x(n)$). El máximo puntaje es normalizado a 5 por convención [10].

La idea básica de la codificación de sub-banda ha sido expuesta, el sistema para el análisis/síntesis usado para este propósito es el “*banco de filtros máximamente decimado*”. La Figura 5.2(d) muestra la versión de dos canales, conocido popularmente como el “*Quadrature Mirror Filter (QMF) bank*”.

La señal de entrada $x(n)$ primeramente es filtrada mediante dos filtros $H_0(z)$ y $H_1(z)$, siendo éstos filtros pasa-bajas y pasa-altas como se muestra en la Figura 5.2(b). Cada señal $x_k(n)$ (señal en sub-banda) es por lo tanto limitada en banda aproximadamente en un ancho total de π (en la región de frecuencia de $0 \leq \omega \leq 2\pi$). Las señales en sub-banda son decimadas por un factor de 2 para obtener $v_k(n)$ [4].

Cada señal decimada $v_k(n)$ es entonces codificada de tal manera que las propiedades especiales de la sub-banda (tales como nivel de energía, importancia de percepción entre otras cosas) son explotadas. En el receptor, las señales recibidas son decodificadas para producir (aproximaciones de) las señales $v_0(n)$ y $v_1(n)$ las cuales son pasadas a través de dos interpoladores. Las señales de salida $y_0(n)$ y $y_1(n)$ se hacen pasar a través de los filtros $F_0(z)$ y $F_1(z)$ para producir la señal de salida $\hat{x}(n)$ [3]. $H_0(z)$ y

$H_I(z)$ son llamados filtros de análisis, y en conjunto $[H_0(z), H_I(z)]$ el banco de análisis. Este par seguido de los dos decimadores es el *banco de análisis decimado*.

Similarmente $F_0(z)$ y $F_I(z)$ son los filtros de síntesis (o reconstrucción), y el par $[F_0(z), F_I(z)]$ el banco de síntesis. En este capítulo veremos que la señal reconstruida $\hat{x}(n)$ difiere de $x(n)$ debido a tres razones: aliasing, distorsión en amplitud y distorsión en fase, se mostrará que los filtros pueden ser diseñados de tal manera que, algunas de todas estas distorsiones se pueden eliminar [10].

En el caso de señales de audio o voz, la meta es la de diseñar el sistema junto con la codificación de tal manera que nuestros oídos no puedan notar los errores causados al reducir el número de bits usados para propósitos de almacenamiento o transferencia [4].

En el caso de imágenes nuestros ojos sirven como jueces, es decir, el propósito es el de reducir el número de bits para representar la imagen al límite de que sea satisfactorio a nuestros ojos [4].

5.4 ERRORES CREADOS EN EL BANCO QMF

Las señales decimadas $v_k(n)$ (Figura 5.2(d)) son codificadas usando una de las diversas técnicas de codificación, y las señales resultantes son transmitidas. De estas señales codificadas, el receptor reconstruye una aproximación $v'_k(n)$ de $v_k(n)$. El error de decodificación $v_k(n) - v'_k(n)$ representa una distorsión no lineal (parecido a un error de cuantización). A este error se le llama *error de cuantización de sub-banda*. No puede ser corregido, es decir, no hay manera de reconstruir exactamente $v_k(n)$ de $v'_k(n)$, por lo que este error será ignorado para fines de análisis por lo que asumiremos que $v'_k(n) = v_k(n)$. [3]

5.5 ALIASING E IMAGING

En la práctica muchas señales no están limitadas en banda, y al decimarlas, hay aliasing. Para estudiar este efecto con más detalle, consideremos la Figura 5.3:

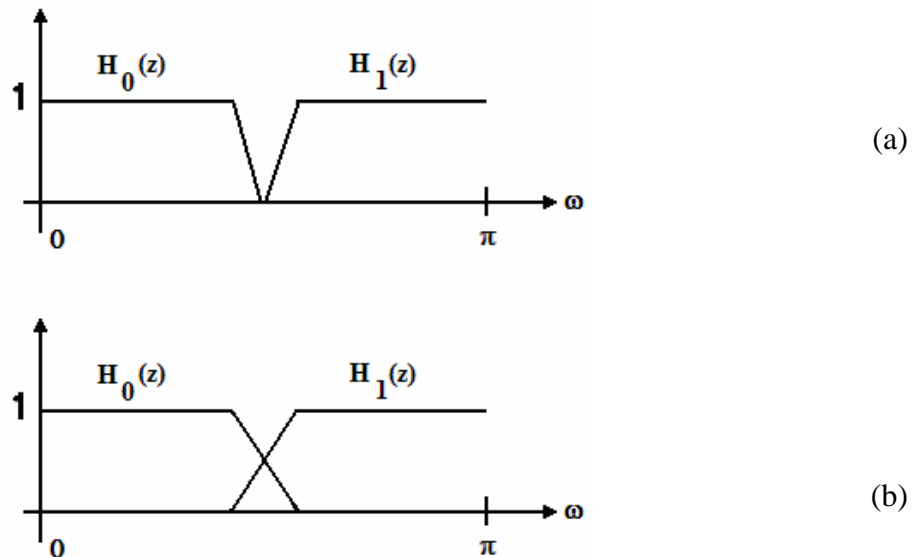


Figura 5.3: Dos posibles respuestas en magnitud para los filtros de análisis. (a) Sin traslape, y (b) Traslapados.

En la Figura 5.3(a), las respuestas $|H_0(e^{j\omega})|$ y $|H_1(e^{j\omega})|$ no se traslapan, por lo que el efecto de aliasing no sería muy serio. Sin embargo en la Figura 5.3(b), las respuestas se traslapan, y cada señal en sub-banda pudiera tener energía considerable para un ancho de banda que excede la region de paso ideal. El decimar estas señales produciría aliasing.

En principio, la elección de filtros con respuesta como la de la Figura 5.3(a) se harían cargo del problema de aliasing, sin embargo se tendría que diseñar que el ancho de transición sea muy estrecho y esto requeriría de filtros muy caros, por lo que una respuesta como la de la Figura 5.3(b) es la mejor opción, porque incluso, aunque causaría aliasing este efecto se puede cancelar mediante la elección cuidadosa de los *filtros de síntesis*. [10]

Expresión para la señal reconstruida

Usando los resultados desarrollados en el Capítulo 2, es fácil llegar a una expresión para $\hat{X}(z)$. De la Figura 5.2(d) tenemos que:

$$X_k(z) = H_k(z)X(z), \quad k = 0,1. \quad (1)$$

Las transformadas z de las señales decimadas $v_k(n)$ son [Capítulo 1, ecuación 18 con $M=2$]

$$V_k(z) = \frac{1}{2} \left[X_k(z^{1/2}) + X_k(-z^{1/2}) \right], \quad k = 0,1. \quad (2)$$

Sabemos del Capítulo 1 que el segundo término en la ecuación de arriba representa aliasing. La transformada z de $Y_k(z)$ es $V_k(z^2)$ por lo que [10]:

$$\begin{aligned} Y_k(z) = V_k(z^2) &= \frac{1}{2} [X_k(z) + X_k(-z)] \\ &= \frac{1}{2} [H_k(z)X(z) + H_k(-z)X(-z)], \quad k = 0,1. \end{aligned} \quad (3)$$

La señal reconstruida es:

$$\hat{X}(z) = F_0(z)Y_0(z) + F_1(z)Y_1(z) \quad (4)$$

Con la ayuda de la ecuación (3) y reacomodando, finalmente se obtiene que [10]:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]X(z) + \frac{1}{2} [H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]X(-z) \quad (5)$$

El segundo término en la ecuación de arriba se debe precisamente al aliasing, la ecuación (5) se puede escribir de una forma compacta como:

$$Y(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z) \quad (6)$$

donde

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_0 F_0(z) + H_1 F_1(z)] \quad (7)$$

y se le llama *distorsión de la función de transferencia*, [1] mientras que

$$A(z) = \frac{1}{2} [H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)] \quad (8)$$

Cancelación de Aliasing

Como se pudo observar, desde la ecuación (5) aparece un término de aliasing, sin embargo, es posible elegir los filtros de análisis y síntesis de tal manera que el efecto de aliasing sea cancelado, para llegar a eso, necesitamos que: [1]

$$A(z) = 0,$$

Por lo que

$$\begin{aligned} H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) &= 0 \\ F_0(z) = H_1(-z), \quad F_1(z) &= -H_0(-z) \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto dados $H_0(z)$ y $H_1(z)$ es posible cancelar completamente el aliasing mediante la elección de éstos filtros de síntesis, por lo que, la idea básica en banco QMF es el de permitir el aliasing en el banco de análisis en lugar de tratar de evitarlo. [10]

Si cancelamos el aliasing de esta manera, tenemos que:

$$\hat{X}(z) = T(z)X(z) \quad (10)$$

Sabemos desde la sección 1 que el *up-sampler* y el *down-sampler* son componentes variantes en el tiempo y, como resultado, la estructura QMF de la Figura 5.2(d) es un sistema lineal variante en el tiempo (LTV) [3], sin embargo, es posible elegir los filtros de análisis y síntesis de tal manera que el efecto de aliasing sea

cancelado, dando como resultado un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) con una función de transferencia: [10]

$$T(z) = \frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)] \quad (11)$$

La cual representa la distorsión causada por el banco QMF. [1]

Punto de vista gráfico

Es más fácil de visualizar el mecanismo de cancelación de aliasing en términos de las gráficas de respuesta en frecuencia. Para este fin, el sistema considerado es el de la Figura 5.2(d), mientras que en la Figura 4(a) muestra en espectro de una señal de entrada arbitraria $X(e^{j\omega})$, la señal en sub-banda después del filtrado pasa-bajas $X_0(e^{j\omega})$, y la señal decimada $V_0(e^{j\omega})$.

El componente de aliasing $0.5X_0(-e^{j\omega/2})$ se traslapa con $0.5X_0(e^{j\omega/2})$. La señal $Y_0(e^{j\omega})$ tiene contribuciones de $X(z)$ así como también de $X(-z)$. La contribución que viene de $X(-z)$ (región sombreada) es el componente de aliasing, y se traslapa con el área sin sombrear.

De manera similar, se presentan las gráficas de $X_I(e^{j\omega})$, $V_I(e^{j\omega})$ y $Y_I(e^{j\omega})$. Las áreas sombreadas en $Y_0(e^{j\omega})$ y $Y_I(e^{j\omega})$ representan los efectos de aliasing e imaging, y ocupan predominantemente las regiones pasa-bajas y pasa-altas. Los filtros $F_0(z)$ y $F_I(z)$,

los cuales son pasa-bajas y pasa-altas respectivamente, tienden a eliminar éstas porciones, pero debido a que no son ideales, la salida de $F_0(z)$ aún contiene un área

residual (Figura 5.4(h)) así como también la salida de $F_1(z)$ (Figura 5.4(i)). Estas dos componentes de aliasing pueden ser diseñadas para que se cancelen mutuamente.[3]

5.6 DISTORSIONES EN AMPLITUD Y FASE

Supongamos que la elección de (9) es elegida de tal manera que el banco QMF sea libre de aliasing. Por lo que se tendría una ecuación como en (10).

Pero si nos damos cuenta, incluso después de que el aliasing es cancelado, la señal $\hat{X}(z)$ sufre de una distorsión lineal $T(z)$ como se expresó en (11).

Al usar la ecuación (9) tenemos que:

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)] \quad (12)$$

Al expresar $T(e^{j\omega}) = |T(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}$, tenemos que:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = |T(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} X(e^{j\omega}). \quad (13)$$

A menos que $T(z)$ sea un filtro pasa-todo, $\hat{X}(e^{j\omega})$ sufre de distorsión en amplitud. Similarmente a menos que $T(z)$ tenga fase lineal $\hat{X}(e^{j\omega})$ también sufre de distorsión en fase [10].

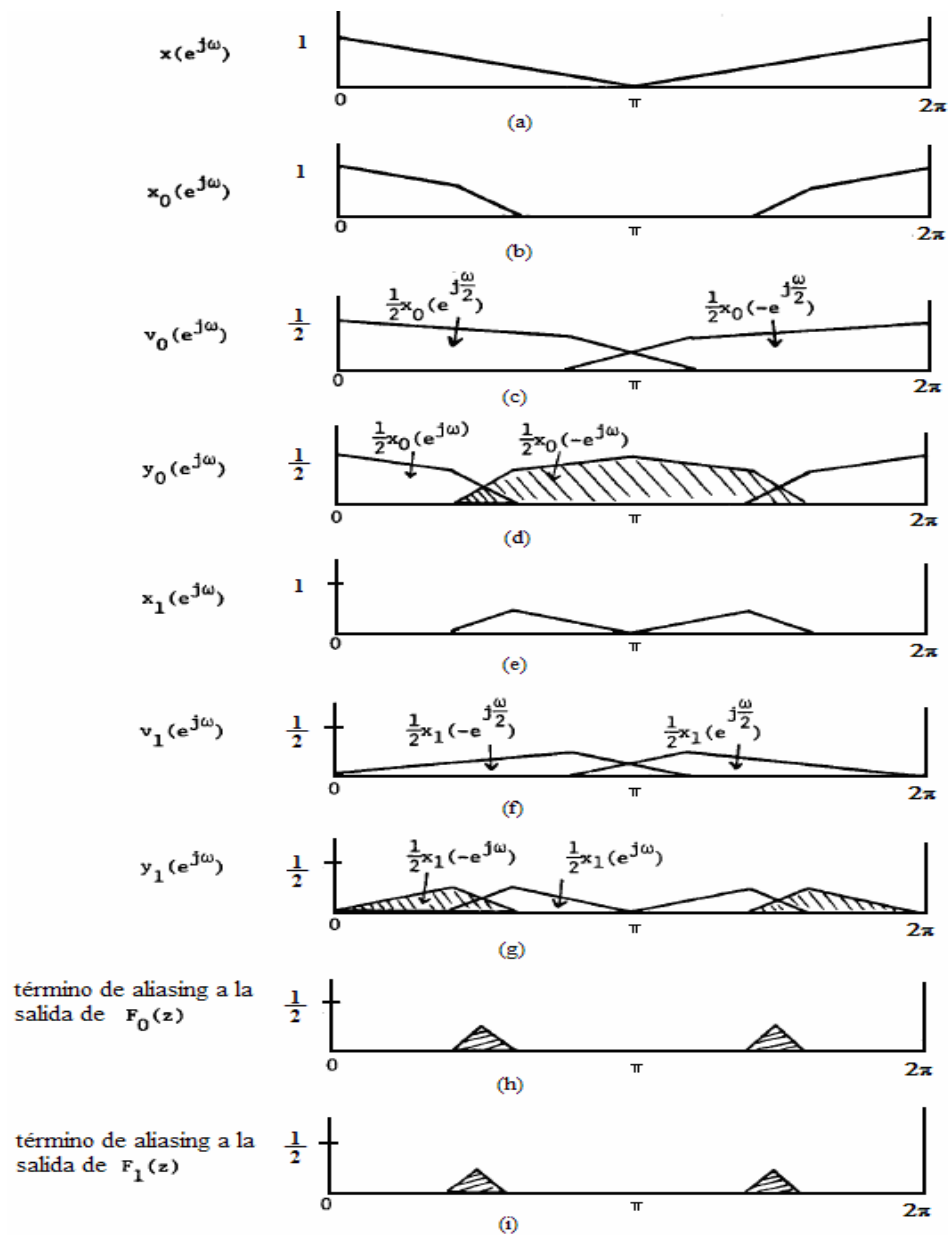


Figura 5.4: Gráficas de varias señales internas en el banco QMF y mecanismo de cancelación del aliasing (©adaptado de [10])

Reconstrucción perfecta en un banco QMF

Si un banco QMF es libre de aliasing, distorsión en amplitud, y distorsión en fase. Se dice que tiene la propiedad de la reconstrucción perfecta (abreviado PR). Esto

es equivalente a la condición $T(z) = cz^{-n_0}$. Para un banco QMF con reconstrucción perfecta tenemos que [1]:

$$\hat{X}(z) = cz^{-n_0} X(z), \quad \hat{x}(n) = cx(n - n_0), \quad c \neq 0 \quad (14)$$

para todas las entradas posibles $x(n)$. En otras palabras $\hat{x}(n)$ es meramente una versión escalada y retrasada de $x(n)$. Esto por supuesto, ignorando los errores de codificación/decodificación, ruido, etc.

5.7 UN SISTEMA QMF LIBRE DE ALIASING

Para cualquier par de filtros de análisis, la elección de (9) de los filtros de síntesis eliminan la distorsión de *aliasing* [10], en los primeros bancos QMF conocidos [6], los filtros de análisis estaban relacionados mediante:

$$H_1(z) = H_0(-z) \quad (15)$$

$$F_0(z) = H_0(z), \quad F_1(z) = -H_1(z) = -H_0(-z) \quad (16)$$

Se puede observar que la ecuación (15) implica que $|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\pi-\omega)})|$, mientras que la elección de (15) asegura que $H_1(z)$ es un filtro pasa-altas si $H_0(z)$ es un filtro pasa-bajas. La elección de (16) es equivalente a la de (9) bajo las condiciones de (15) [10].

Con filtros elegidos como se mencionó anteriormente, la función de distorsión es:

$$T(z) = \frac{1}{2} (H^2_0(z) - H^2_1(z)) = \frac{1}{2} (H^2_0(z) - H^2_0(-z)) \quad (17)$$

Ejemplo 5.1

Expresar la salida $y(n)$ de la Figura 5.5 en función de la señal de entrada $x(n)$. Al simplificar la expresión derivada, mostrar que $y(n) = x(n-1)$.

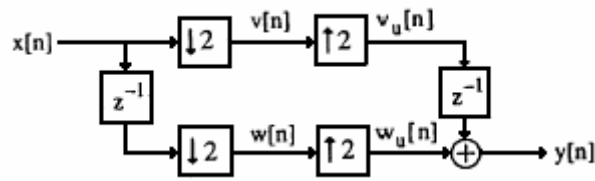


Figura 5.5: Ejemplo de un banco de filtro sencillo

Solución:

De la Figura 5.5:

$$V(z) = \frac{1}{2} X(z^{1/2}) + \frac{1}{2} X(-z^{1/2}), \quad W(z) = \frac{z^{-1/2}}{2} X(z^{1/2}) - \frac{z^{-1/2}}{2} X(-z^{1/2}),$$

$$V_u(z) = \frac{1}{2} X(z) + \frac{1}{2} X(-z), \quad W_u(z) = \frac{z^{-1}}{2} X(z) - \frac{z^{-1}}{2} X(-z), \quad \text{Por lo que:}$$

$$Y(z) = z^{-1} V_u(z) + W_u(z) = z^{-1} X(z), \quad \text{o en otras palabras; } y(n) = x(n-1).$$

Ejemplo 5.2

Considérese el banco de filtro de análisis-síntesis de la siguiente Figura. Desarróllese la relación de entrada y salida de esta estructura en el dominio Z. Sea $H_0(z) = \frac{(1+z^{-1})}{2}$ y $H_1(z) = \frac{(1-z^{-1})}{2}$. Determinar los filtros de síntesis $G_0(z)$ y $G_1(z)$ de tal manera que la estructura de la Figura 5.6 sea un banco de filtro de reconstrucción perfecta.

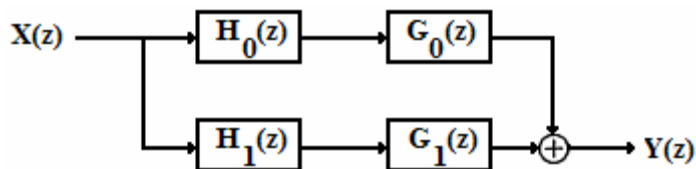


Figura 5.6: Ejemplo de un banco de filtro de análisis-síntesis

Solución:

$$Y(z) = (H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z))X(z). \text{ Y } H_0(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}, \text{ y } H_1(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$$

Se eligen $G_0(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$, y $G_1(z) = -\frac{1-z^{-1}}{2}$, por lo que:

$$Y(z) = \left(\frac{1}{4}(1+z^{-1})^2 - \frac{1}{4}(1-z^{-1})^2 \right) X(z) =$$

$$\frac{1}{4}(1+2z^{-1}+z^{-2} - 1+2z^{-1}-z^{-2})X(z) = z^{-1}X(z).$$

En otras palabras, $y(n)=x(n-1)$ indicando que la Figura 5.6 es un banco de filtro de reconstrucción perfecta.

5.6 Simulación de un banco de filtro

A continuación, se muestra en la Figura 5.7 la simulación del banco de filtro mostrado en la Figura 5.5, la señal de entrada es una señal sinusoidal de amplitud unitaria, de frecuencia 0.675 (rads/seg) y un tiempo de muestreo de 0.2 segundos.

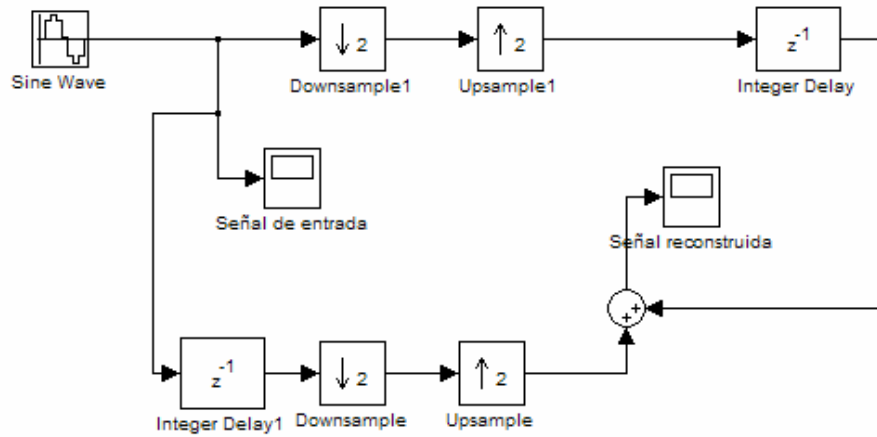
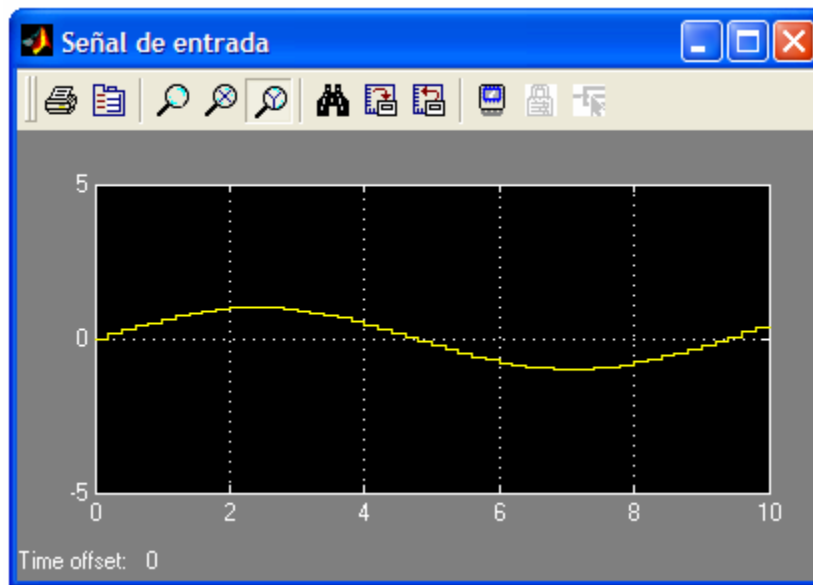
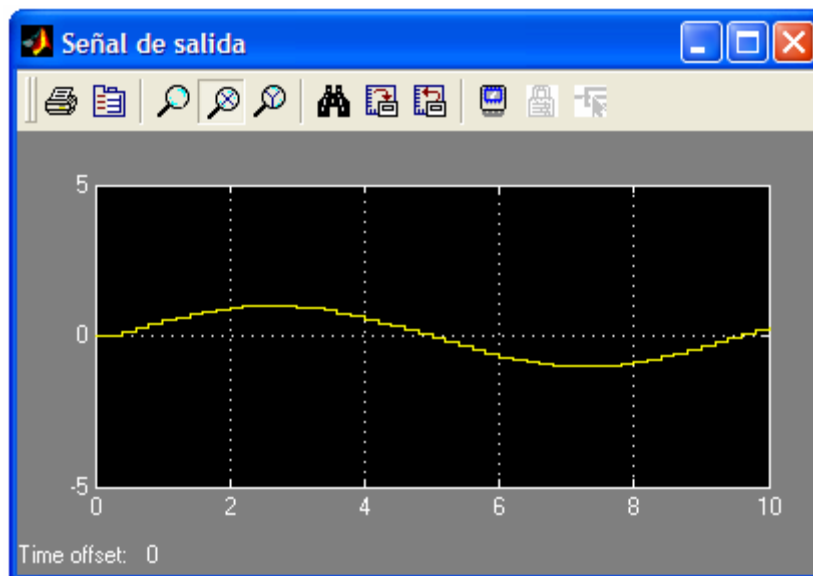


Figura 5.7: Ejemplo de simulación de un banco de filtro

Las salidas correspondientes a este sistema se muestran en la Figura 5.8



(a) Señal de entrada



(b) Señal de Salida

Figura 5.8: Resultados obtenidos de la simulación de un banco de filtro

Como se puede observar, al inicio de la señal de salida, se tiene un pequeño retraso con respecto a la señal original, ésto debido al resultado que se obtuvo previamente en el análisis teórico.

5.9 SIMULACIÓN DEL BANCO QMF

A continuación se muestra la simulación de un banco QMF en Simulink:

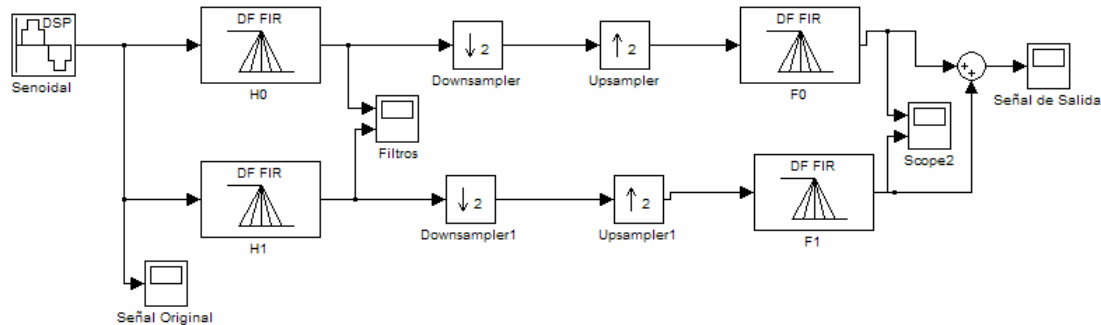


Figura 5.9: Simulación del banco QMF en Simulink

La señal de entrada es una señal senoidal, se tienen 4 filtros así como los upsamplers y downsamplers, los parámetros de simulación se muestran a continuación:

	FORMA DE ONDA	AMPLITUD	FRECUENCIA	UNIDADES	Fs
Señal de entrada	Seno	1	0.5	Hertz	1/1000

	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	COEFICIENTES DEL NUMERADOR
H0	FIR	[0.5 0.5]
H1	FIR	[0.5 -0.5]
F0	FIR	[1 1]
F1	FIR	[-1 1]

	Parámetros de Simulación
Tipo	Variable-step Ode45

Tabla 4: Parámetros de Simulación para el QMF Bank

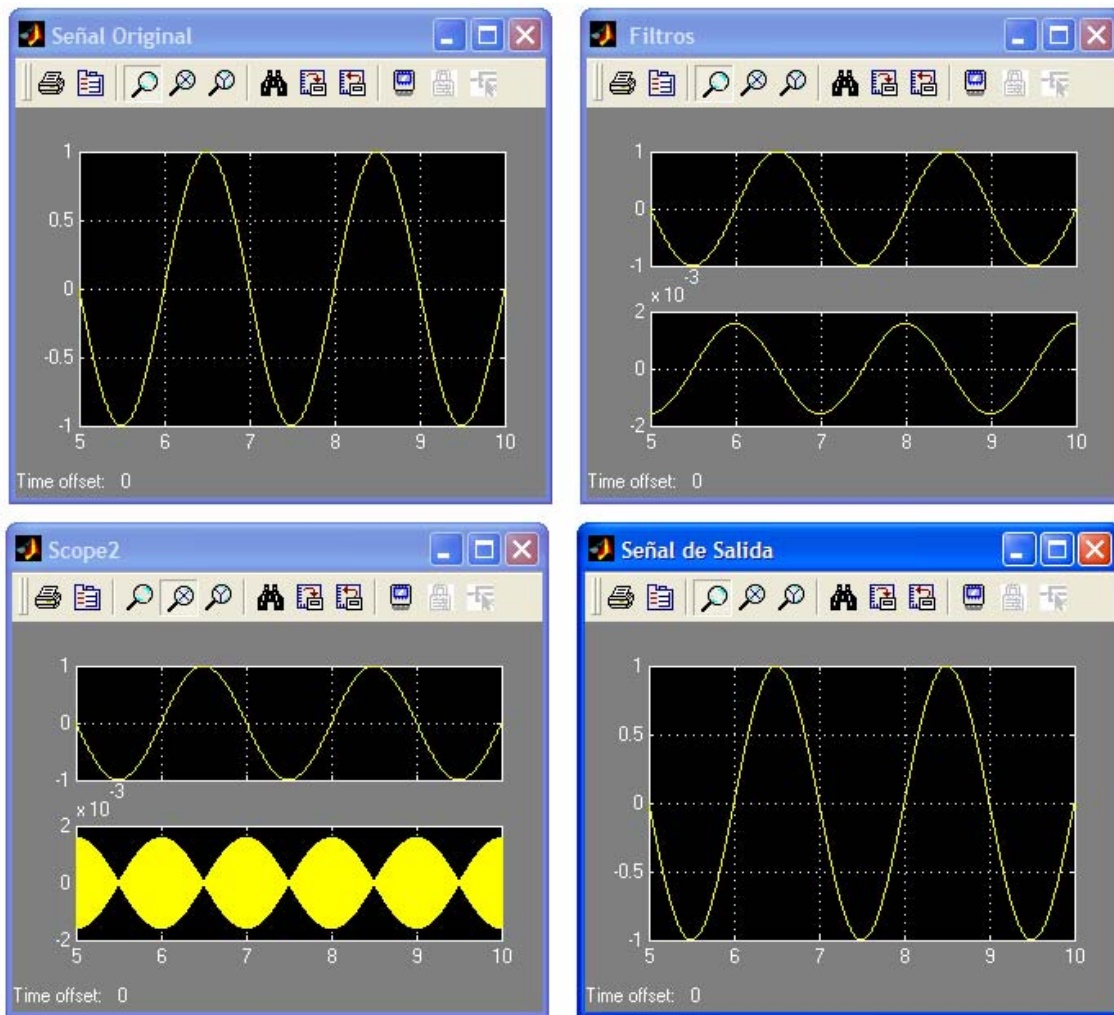


Figura 5.10: Señales de salida para el banco QMF

Las salidas mostradas en la Figura 5.10 corresponden a las diferentes etapas que se desarrollan en el banco QMF, se puede observar la señal de entrada al sistema, después como varía con los filtros aplicados así la salida correspondiente después de los procesos de downsampling/upsampling . y finalmente, la señal reconstruida a la salida del filtro, como se puede observar, mediante la correcta selección de los filtros, se puede obtener una reconstrucción perfecta.