

CAPÍTULO 3 -INTERPOLACIÓN-

3.1 INTRODUCCIÓN

El procedimiento de incrementar la frecuencia de muestreo se le llama *interpolación*, y consiste de dos etapas: *upsampling* y filtrado (como se muestra en la Figura 3.1). A continuación se analizará al proceso de interpolación en detalle en los dominios tanto de la frecuencia como del tiempo.

3.2 UPSAMPLING

El procedimiento de *upsampling* incrementa la frecuencia de muestreo por un factor L , al insertar ceros igualmente espaciados entre cada par de muestras como lo muestra la Figura 3.2. El símbolo de esta operación es una caja con una flecha apuntando hacia arriba, seguida del factor de interpolación.

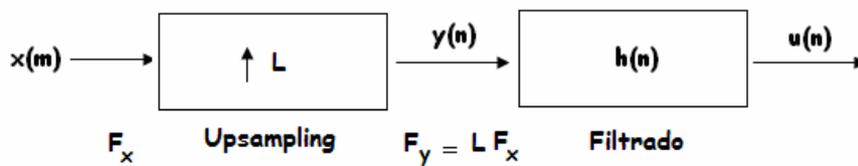


Figura 3.1: Interpolación por un factor L

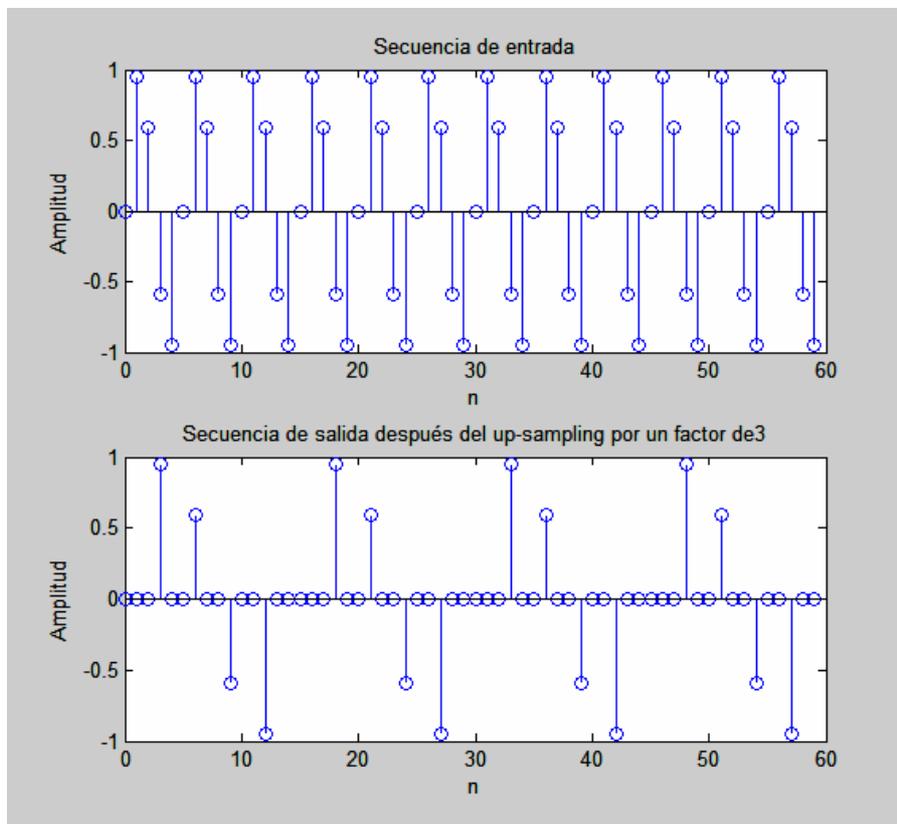


Figura 3.2: Upsampling en el dominio del tiempo

En la Figura 3.3 se muestra el proceso de interpolación en el tiempo

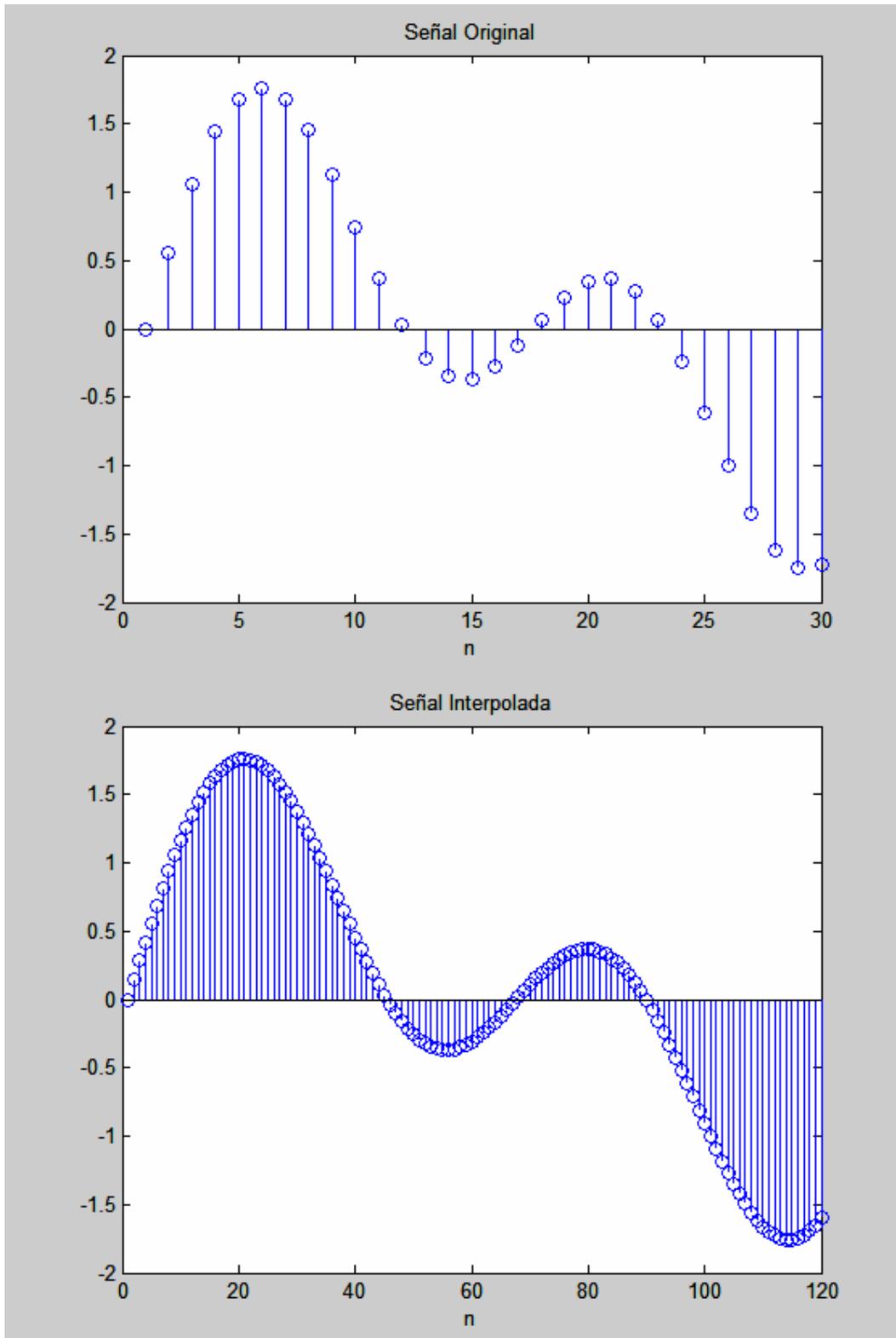


Figura 3.3: Interpolación en el dominio del tiempo

Este dispositivo toma una entrada $x(m)$ y produce una secuencia de salida $y(n)$, la cual está definida por [1]:

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & \text{para } n = mL \\ 0, & \text{cualquier otro valor de } n \end{cases} \quad (1)$$

donde L representa el factor de interpolación, como se puede observar, la frecuencia de entrada F_x es incrementada L veces. El *upsampler* es usado en la interpolación, pero se necesita de un filtro para completar el proceso; veremos cómo las muestras introducidas de valor cero, se convierten en muestras interpoladas al usar un filtro pasabajas a la salida del *upsampler*.

Podemos analizar la operación de interpolación con la ayuda de la ecuación (1) [4]:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=\text{mult. de } L}^{\infty} y(n)z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kL)z^{-kL} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-kL} \quad \therefore Y(z) = X(z^L) \end{aligned} \quad (2)$$

De la ecuación (2) podemos sacar las siguientes conclusiones:

- ∞ Ya que $Y(z) = X(z^L)$, podemos interpretar a $Y(e^{j\omega})$ como una versión comprimida L veces de $X(e^{j\omega})$ como se muestra en la Figura 3.4, a las múltiples copias del espectro comprimido se les llaman *imágenes*.
- ∞ El proceso de *upsampling* no cambia el contenido de la señal de entrada, y sólo introduce escalamiento en el eje del tiempo por un factor L .

∞ La operación de *upsampling* (no así la de *downsampling*) es invertible, es decir, es posible recuperar exactamente la señal de entrada $x(m)$ de las muestras de $y(n)$.

∞ La inserción de ceros da como resultado un escalamiento en el eje del tiempo y consecuentemente un escalamiento en el eje de la frecuencia. Como resultado de esto, $L-1$ imágenes no deseadas del espectro de la señal de entrada son introducidos en el intervalo $[0, 2\pi]$.

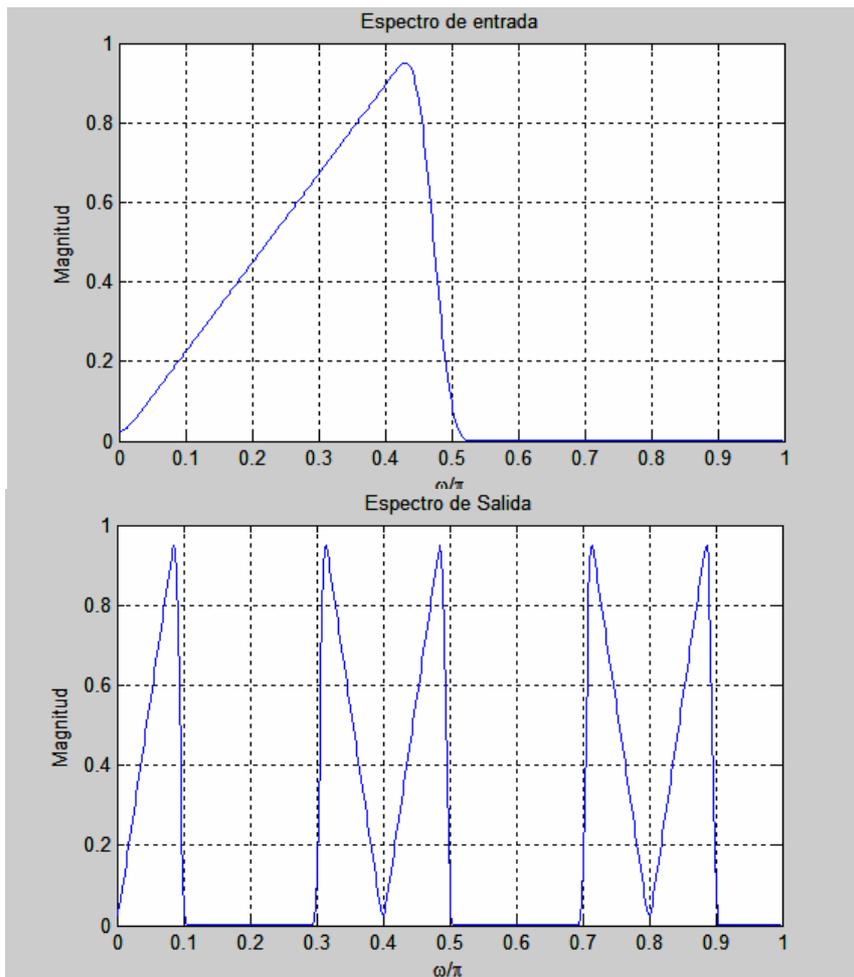


Figura 3.4: Efectos del upsampling en el dominio de la frecuencia

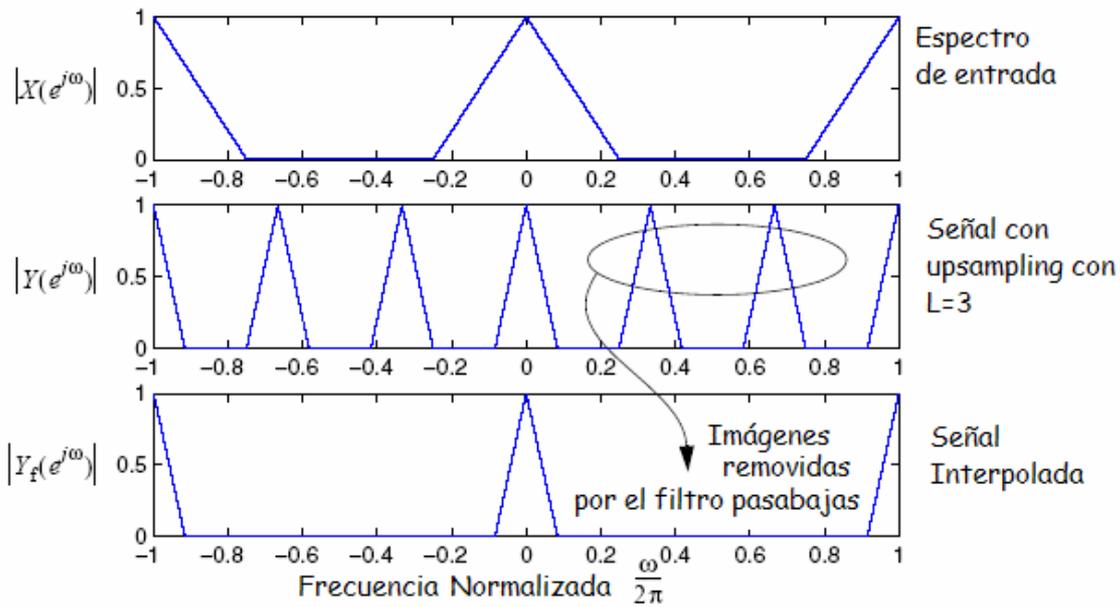


Figura 3.5: Proceso completo de la Interpolación en el dominio de la frecuencia

3.3 IMAGING

El proceso de *upsampling* introduce réplicas del espectro principal cada $2\pi/L$. A esto se le llama *imaging*, ya que hay $L-1$ réplicas (imágenes) en 2π . Para remover las imágenes no deseadas necesitamos un filtro pasabajas, típicamente con una frecuencia de corte de π/L inmediatamente después del *upsampling*. A este filtro se le llama *filtro anti-imaging*. En el dominio del tiempo, el efecto es que las muestras de valor cero introducidas por el *upsampling* son convertidas en valores “interpolados”. Debido a esta propiedad, el filtro se le llama *filtro de interpolación* [2].

Las especificaciones para el filtro de interpolación están dadas por: [1]

$$|H(e^{jw})| = \begin{cases} L, & |w| \leq w_c / L \\ 0, & \pi / L \leq |w| \leq \pi \end{cases} \quad (3)$$

donde w_c es la frecuencia más alta que necesita ser conservada en la señal interpolada. Similarmente a un filtro *anti-aliasing*, un filtro *anti-imaging* es usualmente diseñado como un filtro FIR. En el caso del filtro *anti-imaging* a diferencia del filtro

anti-aliasing, el primero se diseña con una ganancia L como se explica en las siguientes líneas [1].

Asumamos que $x(m)$ (véase la Figura 3.1) ha sido obtenida al muestrear una señal continua limitada en banda $x_c(t)$ a la frecuencia de Nyquist. La Transformada de Fourier de la señal discreta $X(e^{j\omega})$ está relacionada con la Transformada de Fourier de la señal continua $X_c(j\Omega)$, (Ω es una frecuencia continua), mediante [5]:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T_x} - j\frac{2\pi k}{T_x}\right); \quad \Omega = \frac{\omega}{T_x}, \quad (4)$$

donde T_x es el periodo de muestreo.

De manera similar, podemos asumir que la señal interpolada $u(n)$ en la Figura 3.1 es también obtenida al muestrear la misma señal continua, con un periodo de muestreo $T_x = LT_y$. Su transformada de Fourier está relacionado con $X_c(j\Omega)$ mediante:

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{j\omega}{T_y} - \frac{2\pi k}{T_y}\right) = \frac{L}{T_x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{j\omega L}{T_x} - \frac{2\pi k L}{T_x}\right); \quad \Omega = \frac{\omega}{T_y} \quad (5)$$

La señal de salida $u(n)$ se pasa a través de un filtro pasa-bajas, por lo que solamente el espectro base es retenido. Por lo tanto, en (5), todos los componentes espectrales diferentes de $k=0$ son eliminados, lo que nos lleva a [1]:

$$U(e^{j\omega}) = \frac{L}{T_x} X_c\left(\frac{j\omega L}{T_x}\right), \quad (6)$$

Con las ecuaciones (4) y (6) podemos llegar a:

$$U(e^{j\omega}) = LX(e^{j\omega L}), \quad (7)$$

Ya que no se introdujo escalamiento en la amplitud durante el *upsampling*, la ganancia L en la ecuación (7) debe ser compensada para la etapa de filtrado [4].

3.4 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

En el dominio del tiempo, la señal interpolada $u(n)$ es una convolución de $y(n)$ con la respuesta al impulso $h(n)$. El efecto es que las muestras de valor cero introducidas por el up-sampler se convierten en valores interpolados, como lo muestra la Figura 3.6

En la Figura 3.6(A) se muestra la señal de entrada $x(m)$, en la Figura 3.6(B) se muestra la señal original después del proceso de *upsampling*, se introducen $L-1$ muestras de valor cero entre cada par de muestras, en la Figura 3.6(C) se muestra la respuesta al impulso del filtro pasa-bajas, en la Figura 3.6(D) se muestra la señal original después del proceso de interpolación, que es la convolución de las Figuras 3.6(B) y 3.6(C).

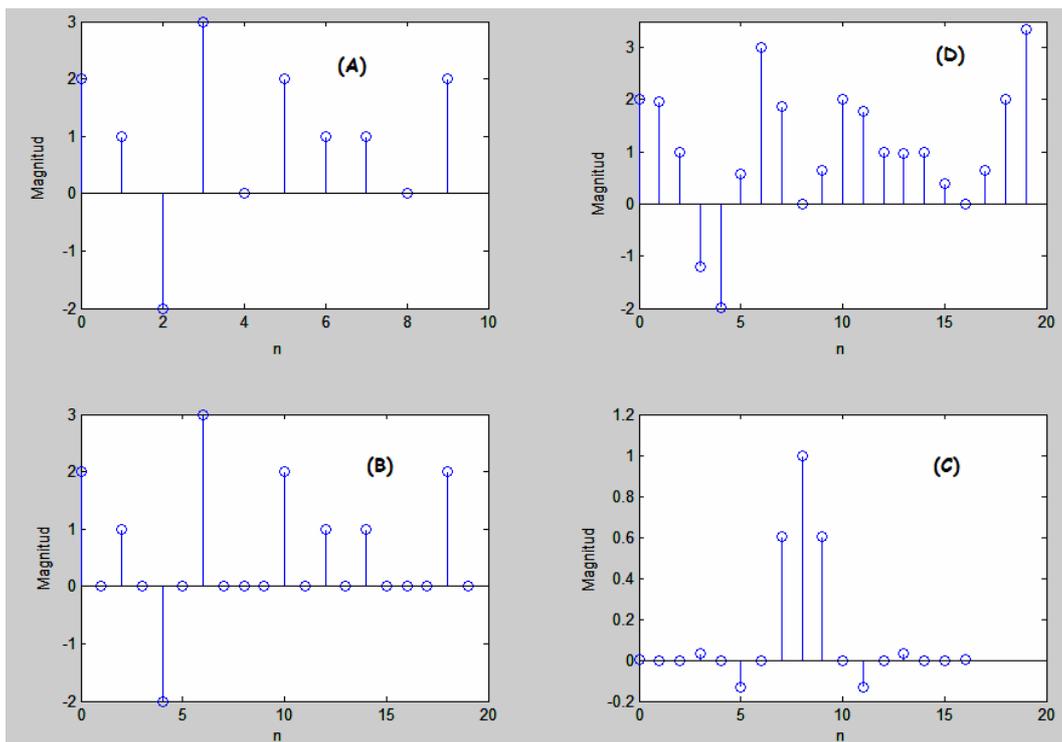


Figura 3.6: Proceso de la Interpolación

Si $h(n)$ denota la respuesta al impulso unitario de $H(w)$, entonces de la figura 1, $u(n)$ puede ser expresado como:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)y(k) \quad (8)$$

Al combinar las ecuaciones (1) y (8) podemos llegar a la relación de entrada y salida en el dominio del tiempo del interpolador:

$$\begin{aligned} u(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k/L), \quad k/L \text{ es un entero} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(n-rL)x(r) \end{aligned} \quad (9)$$

3.5 PROPIEDADES DEL PROCESO DE UPSAMPLING

En esta sección verificaremos que el proceso de *upsampling* es una operación lineal y variante en el tiempo. La propiedad de linealidad es ilustrada en la Figura 3.7:

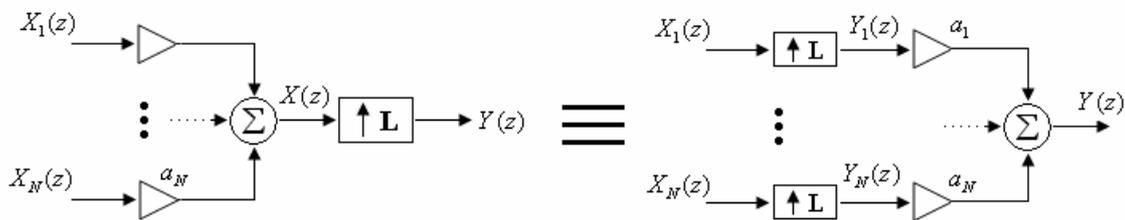


Figura 3.7: Principio de Superposición

Ahora consideraremos si esta operación es variante en el tiempo. Supongamos que la entrada del *upsampler* de la Figura 1, tiene un retraso de D muestras:

$$x(m-D) \quad (10)$$

La señal después del proceso de *upsampling* se convierte en:

$$y((m-D)L) = y(mL-DL) = y(n-DL) \neq y(n-D) \quad (11)$$

Consecuentemente, el *upsampling* es una operación dependiente del tiempo.

3.5.1 IDENTIDAD DEL UPSAMPLING

Una identidad del *upsampling* asegura que, las señales de salida $Y_1(z), \dots, Y_N(z)$, las cuales son el resultado después de que la señal de entrada ha pasado por el proceso de *upsampling* y ha sido escalada por factores a_1, \dots, a_N , respectivamente (Figura 3.8(a)), dará el mismo resultado como si la señal fuera primero escalada y después se le hiciera pasar por el proceso de *upsampling* (Figura 3.8(b)).

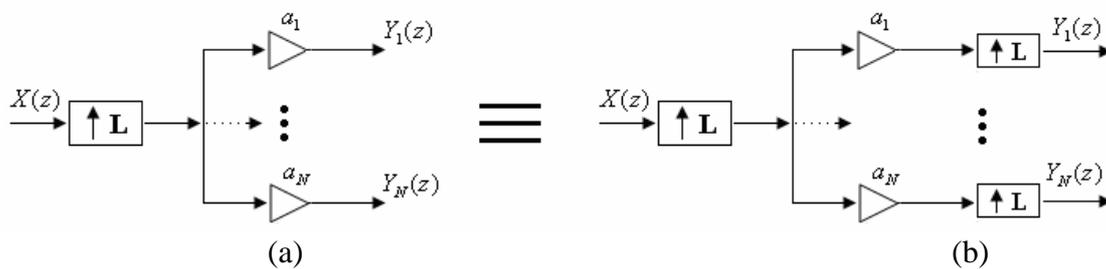


Figura 3.8: Identidad de Upsampling

3.6 CONVERSIÓN DE LA FRECUENCIA DE MUESTREO POR UN FACTOR RACIONAL D/L

Las técnicas descritas hasta el momento nos permiten alterar la frecuencia de muestreo de una señal por un factor entero (tal como L o D). Sin embargo, en algunas aplicaciones, es necesario cambiar la frecuencia por un número racional (tal como L/D). Por ejemplo consideremos la Figura 3.9(a) la cual muestra la transformada $X(e^{j\omega})$ de una señal limitada en banda a $|\omega| \leq 2\pi/3$. No podemos decimar la señal por un factor de dos ya que crearíamos un error de *aliasing*.

Pero sí es posible decimar la señal por un factor de 1.5 (y la Transformada de Fourier se alargaría como lo muestran las líneas punteadas). Una forma de hacer esto, sería convertir la señal discreta, a una señal continua y muestrearla a una frecuencia más baja. Sin embargo, es más simple desarrollar las alteraciones de la frecuencia de

muestreo directamente en el dominio digital, mediante la combinación de la decimación e interpolación.

Hay dos posibles conexiones en cascada dependiendo de lo que se desarrolla primero, decimación o interpolación, como se muestra en la Figura 3.10(a) y 3.10(b).

En la estructura donde la interpolación se desarrolla antes de la decimación (Figura 3.10(b)), podemos ver que los filtros de la decimación e interpolación son filtros pasabajas que operan a la misma frecuencia de muestreo. Por lo tanto, pueden ser combinarse en un filtro $G(z)$, como se muestra en la Figura 3.10(c).

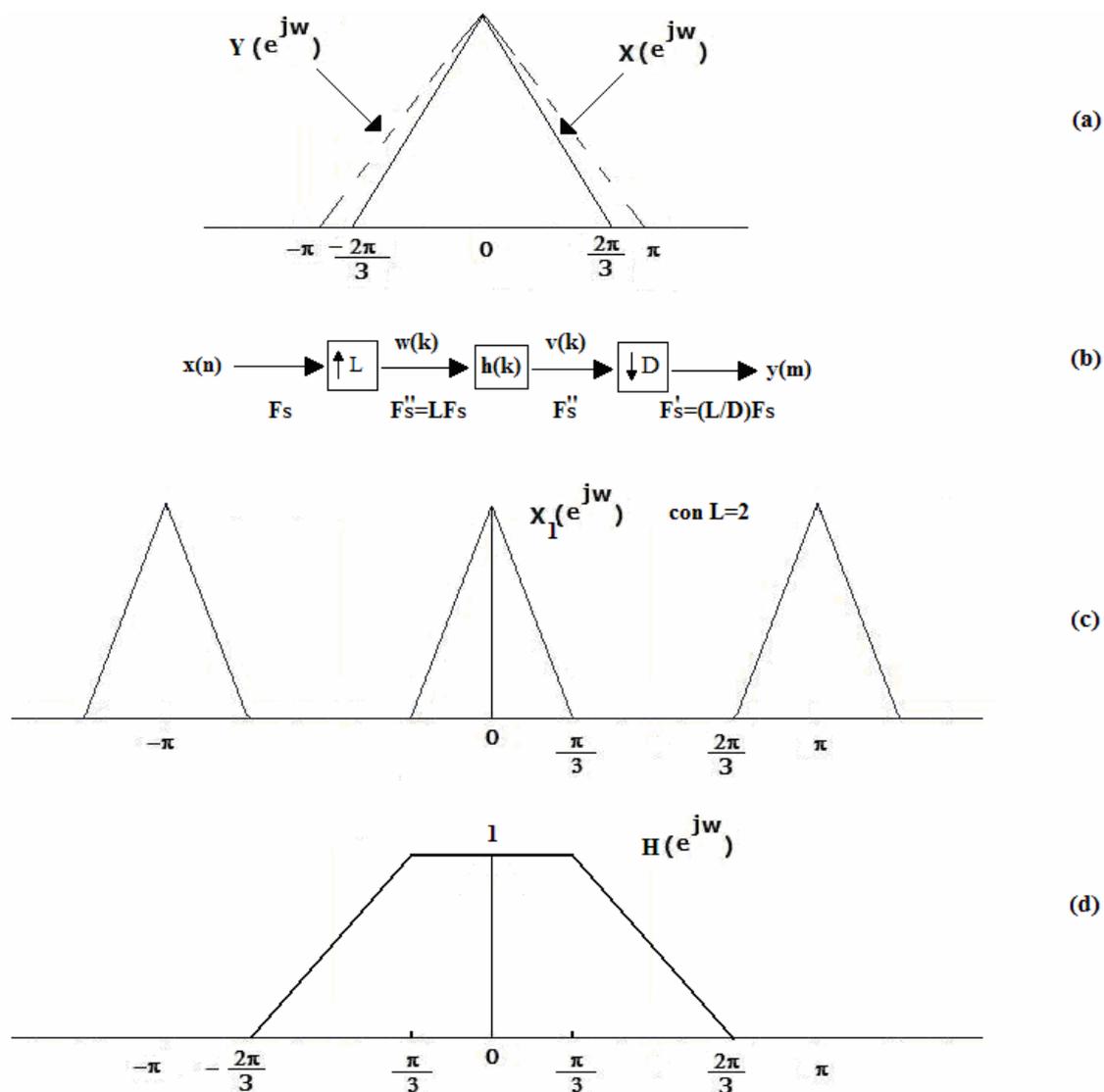


Figura 3.9: Ejemplo de decimación racional

El filtro pasabajas $H(z)$ tiene una frecuencia de corte de $W_s = \min(\pi / L, \pi / M)$, el cual suprime el *imaging* causado por el *upsampling* y al mismo tiempo elimina el *aliasing* causado por el *downsampling*.

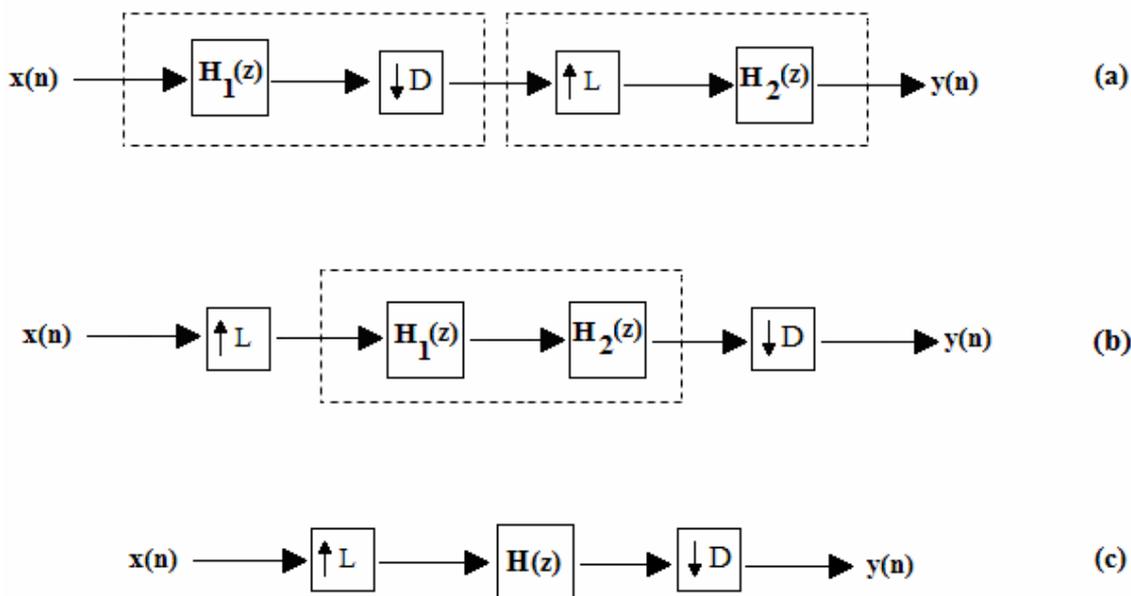


Figura 3.10: Conversión de muestreo racional

Para el ejemplo en consideración tomaremos la conexión más eficiente, la 3.10(c), con valores $L=2, M=3$; así el factor de la frecuencia de muestreo está dado por $M/L=3/2$. La cantidad $X_1(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$ se muestra en la parte 3.9(c). Si diseñamos a $H(z)$ para que sea un filtro pasabajas de fase cero con una respuesta como se muestra en la Figura 3.9(d), entonces la salida del filtro $X_2(e^{j\omega})$, se muestra en la Figura 3.9(c). La decimación por 3, finalmente da como resultado $y(n)$ cuya transformada $Y(e^{j\omega})$ se muestra en las líneas punteadas en la Figura 3.9(a).

Se puede observar claramente que la técnica descrita previamente puede ser generalizada para reducir la frecuencia de muestreo por cualquier número racional M/L . En la práctica, la calidad del filtro $H(z)$ determina la calidad del resultado, es decir, un filtro diseñado con un alto orden y mediante un método eficiente, responderá con una

frecuencia de corte más exacta y una banda de rechazo más precisa, obteniendo así un filtro de mayor calidad, la calidad del filtro así como las especificaciones de $H(z)$ dependen del método elegido de diseño.

En la Figura 3.11 se muestra el significado en el dominio del tiempo de la decimación por un factor de $5/3$

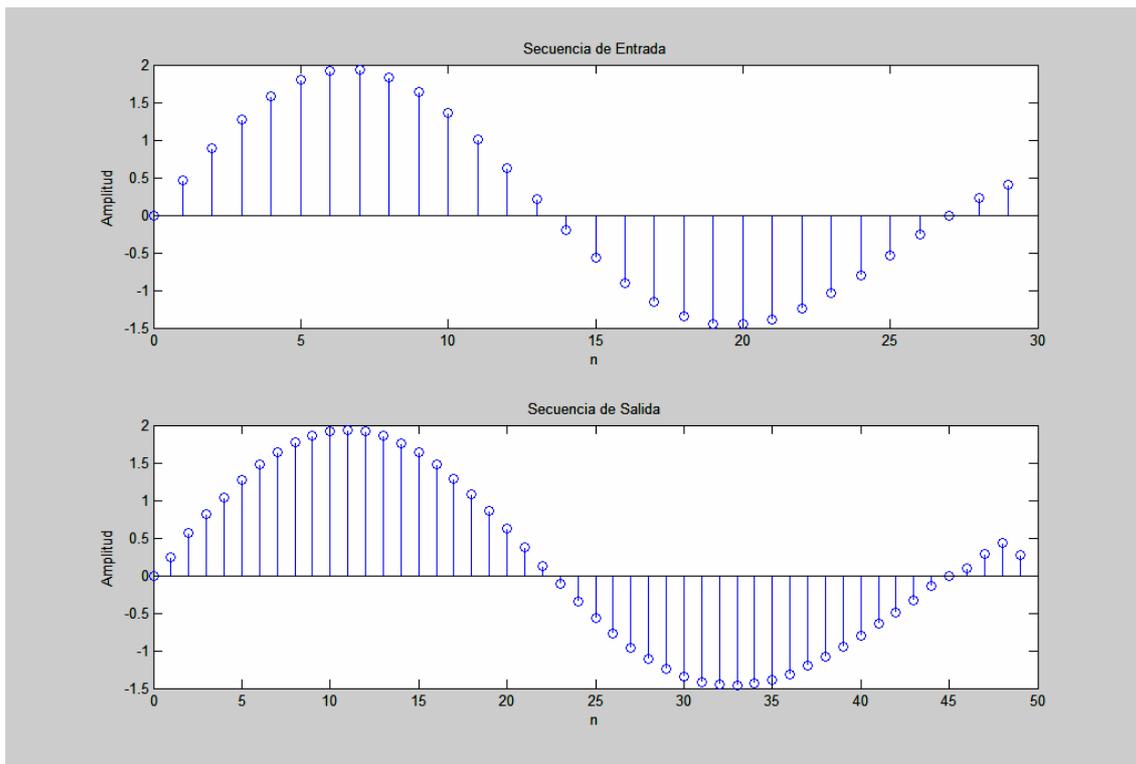


Figura 3.11: Una señal $x(n)$ y su versión $y(n)$ fraccionalmente decimada. El factor de decimación es de $5/3$

3.6.1 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

La relación de entrada-salida en el dominio del tiempo para la estructura mostrada en la Figura 3.9(b), puede ser derivada al considerar las relaciones de la decimación e interpolación previamente desarrolladas. De la ecuación (9) podemos ver que $v(k)$ puede ser expresado como:

$$v(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k - rL)x(r) \quad (12)$$

Recordando a la ecuación (1) del Capítulo 1, $y(m)$ puede ser expresado en términos de $v(k)$ como:

$$y(m) = v(mD) \quad (13)$$

Combinando las ecuaciones (12) y (13) llegamos al resultado deseado:

$$y(m) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(mD - rL)x(r) \quad (14)$$

Ejemplo 3.1

Simplifíquese y desarróllese una expresión para la salida $y(n)$ como una función de la entrada $x(n)$ para la estructura mostrada en la Figura 3.12:

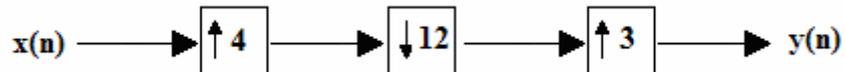


Figura 3.12: Ejemplo de un sistema para cambio de frecuencia racional

Solución:



Quedando la relación de entrada y salida como:

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & \text{para } n = 3r \\ 0, & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

Ejemplo 3.2

Analizar el sistema que se muestra a continuación y encontrar la relación de entrada y salida.

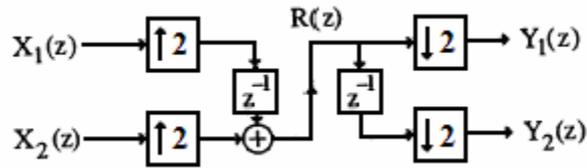


Figura 3.13: Ejemplo de un sistema Multi-frecuencia con retrasos

Solución:

Tenemos que: $R(z) = z^{-1}X_1(z^2) + X_2(z^2)$

$$Y_1(z) = \frac{1}{2}[R(z^{1/2}) + R(-z^{1/2})] = \frac{1}{2}[z^{-1/2}X_1(z) + X_2(z)] + \frac{1}{2}[-z^{-1/2}X_1(z) + X_2(z)] \therefore$$

$$Y_1(z) = X_2(z)$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{2}[z^{-1/2}R(z^{1/2}) - z^{-1/2}R(-z^{1/2})]$$

$$= \frac{1}{2}[z^{-1}X_1(z) + z^{-1/2}X_2(z)] + \frac{1}{2}[z^{-1}X_1(z) - z^{-1/2}X_2(z)] = z^{-1}X_1(z)$$

Por lo tanto, la salida $y_1(n)$ es una réplica de la entrada $x_2(n)$, mientras que la salida $y_2(n)$ es una réplica de la entrada retrasada $x_1(n-1)$

3.7 SIMULACIÓN DEL UPSAMPLER

A continuación se muestra una simulación del *upsampler* construido en Simulink, como ya se vio previamente, el *upsampler* crea L-1 muestras de valor cero entre cada muestra de la señal original.

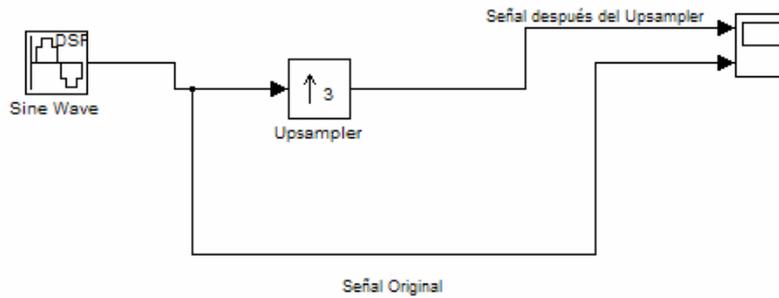


Figura 3.14: Sistema simulado en Simulink

La señal sinusoidal tiene una frecuencia de 0.2Hz y un tiempo de muestreo de 0.5 segundos, a continuación se muestra la salida de este sistema, mostrando la señal original y la señal con las muestras intercaladas de valor cero.

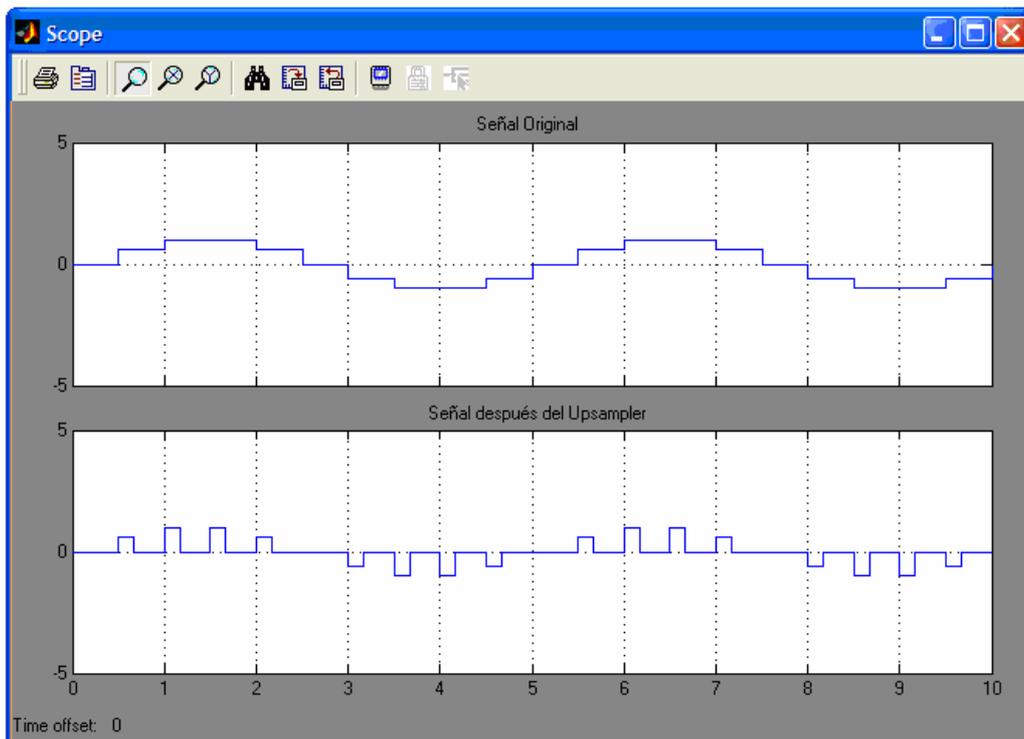


Figura 3.15: Diferentes salidas para el sistema con Upsampler

Cuando se quiere aumentar la frecuencia por un factor grande (arriba de 10 veces) es posible conectar en cascada varios upsamplers como lo muestra la Figura 3.16 en donde la señal de entrada es una señal generada aleatoriamente y el factor de *Upsampling* es de 18.

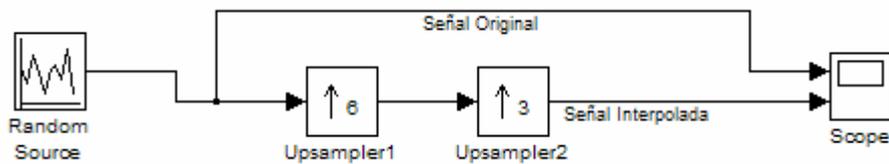


Figura 3.16: Simulación del Upsampler con una señal aleatoria

La señal aleatoria se configura mediante los parámetros que se muestran en la Figura 3.17

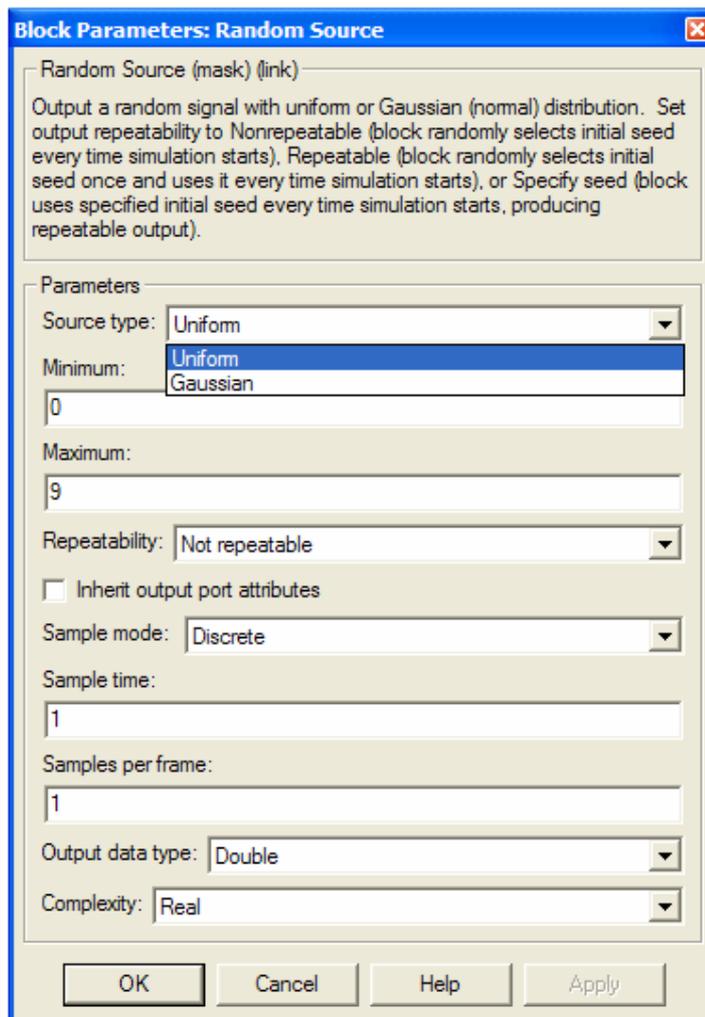


Figura 3.17: Parámetros de Configuración del Generador de Señales Aleatorias

La salida de la señal interpolada se muestra en la Figura 3.18, en la cual se puede observar que se han insertado ceros igualmente espaciados entre cada par de muestras.

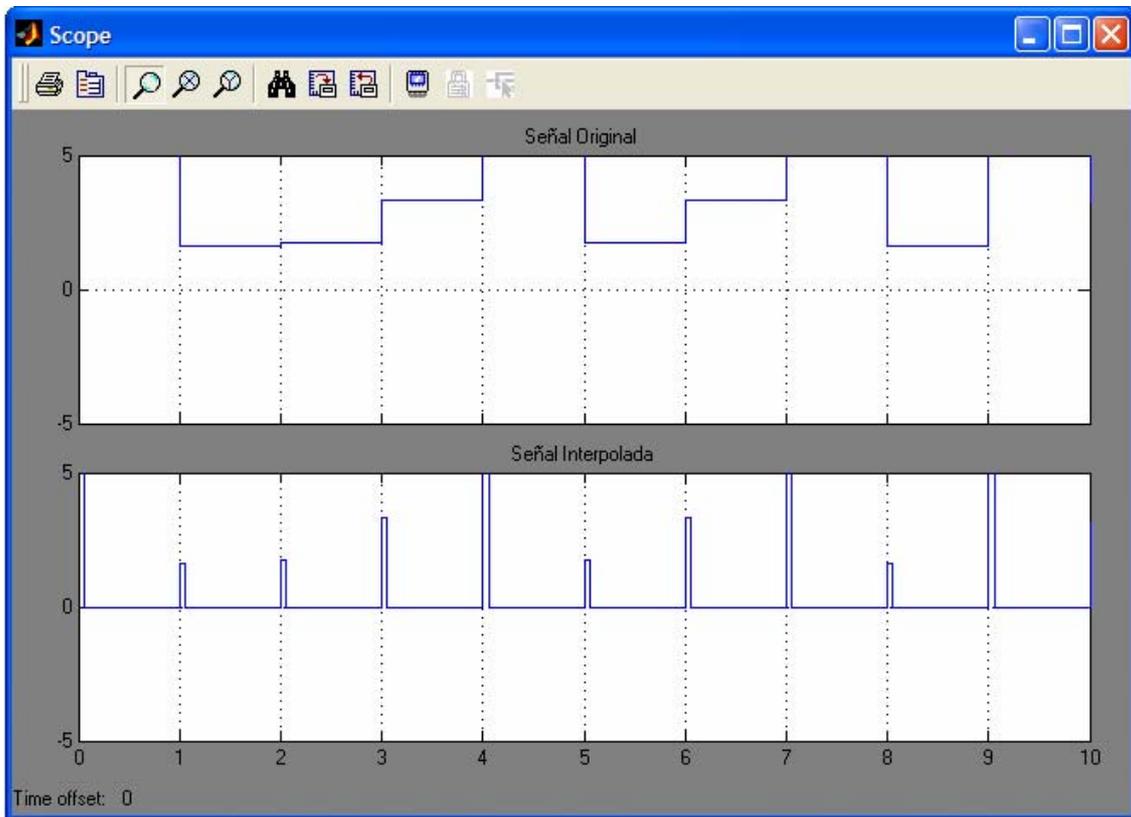


Figura 3.18: Señales de entrada y salida para el Upsampler con un factor

$$L=18$$