

### **3 Sistemas Dinámicos**

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo. El estudio de los sistemas dinámicos puede dividirse en 3 subdisciplinas [10]:

- **Dinámica aplicada:** Modelado de procesos por medio de ecuaciones de estado que relacionan estados pasados con estados futuros.
- **Matemáticas de la dinámica:** Se enfoca en el análisis cualitativo del modelo dinámico.
- **Dinámica experimental:** Experimentos en laboratorio, simulaciones en computadora de modelos dinámicos.

#### **3.1 Clasificación de sistemas dinámicos**

##### **3.1.1 Discretos y Continuos**

Los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grandes clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente y en los que el tiempo transcurre discretamente. Los sistemas dinámicos de tiempo continuo se expresan con ecuaciones diferenciales; éstas pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs), ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDEs) y ecuaciones diferenciales con retrasos (DDEs). Por otro lado si el tiempo es discreto los sistemas se describen por medio de ecuaciones de diferencias (DEs), también conocidas como mapas iterados.

En lo referente a ecuaciones diferenciales, la diferencia entre las ODEs y las PDEs es la variable con respecto a la cual varían las variables de estado del sistema. En las ODEs sólo hay una variable independiente que es generalmente el tiempo (por ejemplo:  $dx/dt = -\exp(-t)$ ). En contraste, en una PDE puede haber 2 o más variables independientes (por ejemplo:  $du/dt = \partial^2 u / \partial x^2$ ). Los sistemas dinámicos más comunes en electrónica son ODEs en el caso de electrónica analógica y DEs con electrónica digital. De ahora en adelante los sistemas dinámicos que se analizarán estarán representados por ODEs, a excepción que se indique lo contrario.

Un sistema dinámico continuo  $n$ -dimensional se puede representar por la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\dot{\mathbf{x}} = d[x_1 \cdots x_n]^T / dt \in \mathbb{R}^n$  y

$$\mathbf{F} = [f_1(\mathbf{x}) \cdots f_n(\mathbf{x})]^T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n.$$

### 3.1.2 Autónomos y No autónomos

Un sistema dinámico es autónomo si está representado por una ecuación diferencial ordinaria autónoma o no forzada de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

mientras que si al sistema dinámico lo modela la ODE no-autónoma o forzada

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (3.3)$$

el sistema dinámico es no autónomo. La diferencia entre (3.2) y (3.3) radica en que la primera no contiene ningún estímulo externo al sistema dependiente al sistema que force el comportamiento natural de la dinámica del sistema, mientras que (3.3) sí.

La función que fuerza el comportamiento del sistema (3.3) puede ser constante, periódica, aleatoria, etc.

### 3.1.3 Invariantes en el tiempo o variantes en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si éste no depende explícitamente del tiempo. De la definición se puede concluir que todo sistema autónomo es invariante en el tiempo. En general, un sistema dinámico es invariante en el tiempo si

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\delta) = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + \delta) \quad \forall t \quad (3.4)$$

es decir, para que el sistema sea invariante en tiempo dos trayectorias que pasen por el mismo punto en diferentes tiempos tendrán la misma evolución con un desplazamiento en el tiempo. De no cumplir con la ecuación (3.4) el sistema dinámico recibe el nombre de sistema variante en el tiempo.

### 3.1.4 Lineales y No lineales

Un sistema dinámico es lineal si se cumple

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{F}(\mathbf{x}) + b\mathbf{F}(\mathbf{y}) \quad (3.5)$$

es decir, es lineal si la función  $\mathbf{F}$  que relaciona la tasa de incremento de las variables de estado con sus valores actuales cumple con el principio de superposición.

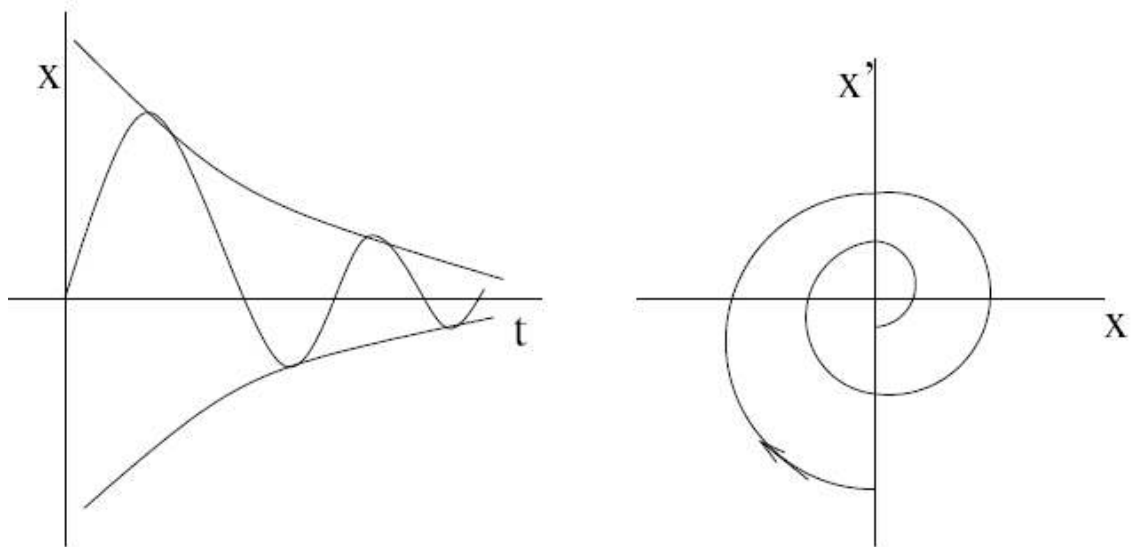
Los sistemas lineales son sencillos de analizar y de trabajar, ya que la solución del sistema sujeto a condiciones complejas se puede lograr simplificando el problema a la suma de respuestas del sistema a condiciones más sencillas. Existen técnicas ampliamente usadas para analizar estos sistemas como lo son la transformada de Laplace, el principio de superposición, la transformada de Fourier, etc. Por lo anterior es usual encontrar soluciones

analíticas exactas de sistemas lineales, aunque también es muy común recurrir a métodos geométricos para visualizar la evolución del sistema en el tiempo.

Sin embargo, si la ecuación (3.5) falla en un sistema, éste se dice ser no lineal. El hecho de ser no lineal hace que su análisis sea mucho más complejo (ya que no se puede simplificar el problema a instancias más sencillas). En la mayoría de las ocasiones no se podrá encontrar soluciones analíticas exactas a los problemas no lineales, por lo tanto la representación de la dinámica del sistema se auxilia mucho de técnicas geométricas de visualización y análisis.

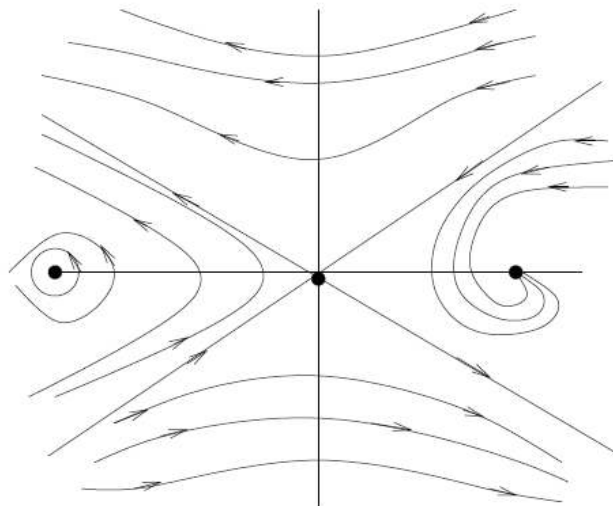
### **3.2 Geometría y estabilidad de los sistemas dinámicos**

La forma de visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico puede ser en forma de serie de tiempo (gráfica de una variable de estado contra tiempo), o en forma de espacio fase. El espacio fase de un sistema  $n$ -dimensional  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  es el espacio donde todos los posibles estados de un sistema son representados, cada parámetro del sistema se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada punto del espacio representa cada posible estado de las variables de sistema. En este tipo de representación el tiempo se vuelve un parámetro implícito; como ejemplo se muestra la Figura 3-1 una serie de tiempo (izquierda) y un plano fase (derecha) de un sistema dinámico.



**Figura 3-1** Serie de tiempo (izquierda) y plano fase (derecha) de un sistema dinámico

El espacio fase está descrito por un *campo vectorial*  $\mathbf{F}$  que rige el recorrido de las variables del sistema  $\mathbf{x}(t)$  en el tiempo, el recorrido de estas variables recibe el nombre de *trayectoria*. La Figura 3-2 muestra el campo vectorial en el espacio fase de un sistema dinámico, en él se pueden apreciar singularidades (puntos, ciclos o subconjuntos del espacio fase) que atraen a las trayectorias que pasan cerca de ellas y otras que las repelen.



**Figura 3-2** Espacio fase de sistema dinámico no lineal

Se dice que una singularidad del espacio fase es *estable*, *sumidero* o *atractor* si toda trayectoria que comienza cerca de ella se aproxima a ella conforme el tiempo transcurre. De hecho si dicha región atrae a todas las trayectorias del espacio fase, recibe el nombre de *atractor global*.

Por otro lado, una singularidad del espacio fase es *Liapunov-estable* si todas las trayectorias que comienzan suficientemente cercanas a ella se mantienen cercanas a ésta durante todo el tiempo. Puede darse la situación de que una singularidad del espacio fase sea Liapunov-estable pero no atractor, si esto sucede se dice que es *neutralmente estable*. Sin embargo, por lo general los dos tipos de estabilidad ocurren al mismo tiempo, y en ese caso la singularidad se dice ser *asintóticamente estable*.

Por último, una singularidad es *inestable*, *repulsor* o *fuelle* cuando no es ni atractor ni Liapunov-estable, es decir, las trayectorias que inician cercanas a ella divergen conforme pasa el tiempo.

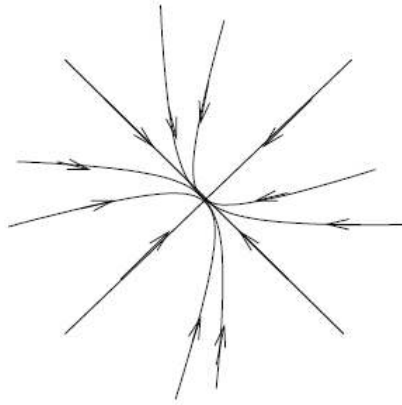
La importancia de la estabilidad de las singularidades radica en ésta determina la estabilidad del sistema en el que se presenten las singularidades. En sistemas lineales las singularidades sólo pueden ser puntos, los cuales se conocen como puntos fijos; en cambio los sistemas no lineales pueden presentar puntos fijos, ciclos límite y regiones llamadas atractores extraños.

### 3.2.1 Puntos Fijos

Las singularidades  $\mathbf{x}^*$  para las cuales  $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$  son llamadas *puntos fijos* o *críticos*; en estos puntos el campo vectorial que determina la dirección de las trayectorias en el espacio fase es nulo. Los eigenvalores  $\lambda$  del sistema guardan una estrecha relación con los puntos fijos ya que determinan la forma en que las trayectorias interactúan con el punto

fijo. En base al comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos fijos, éstos pueden ser:

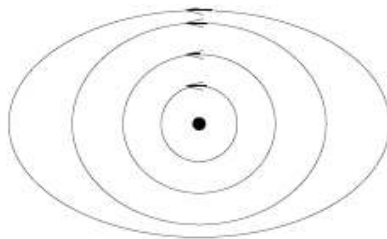
- *Nodo*: es un punto tal que en sus proximidades todas las órbitas entran a él. Es asintóticamente estable si las órbitas están direccionadas al punto lo que sucede si los eigenvalores del sistema son reales, negativos y distintos entre sí, ver Figura 3-3. En cambio, si las trayectorias se alejan del nodo, éste es inestable y los eigenvalores del sistema son reales, positivos y diferentes entre ellos.
- *Nodo estrella*: Es un nodo en el que la tasa de rapidez con que todas las trayectorias convergen o divergen del punto es igual. En este caso, los eigenvalores del sistema son reales e iguales, si son positivos el nodo estrella es inestable y si son negativos es estable.
- *Foco*: Este punto es asintóticamente estable cuando todas las órbitas en sus proximidades tienden a él pero no entran en él; para que esto suceda los eigenvalores del sistema son complejos conjugados con parte real negativa. Los focos inestables se producen cuando las trayectorias tienden a él en  $t \rightarrow -\infty$  y corresponden a sistemas con eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, ver Figura 3-4.
- *Centro*: Es tal que en sus proximidades todas sus órbitas son cerradas. Ninguna órbita entra y ninguna sale. Este punto es neutralmente estable y se presenta cuando los eigenvalores del sistema son imaginarios puros, ver Figura 3-5.
- *Punto Silla*: Las trayectorias inicialmente tienden al punto pero después divergen de él. Este tipo de punto es inestable y se da cuando existen eigenvalores de un sistema que son distintos y de signo opuesto, ver Figura 3-6.



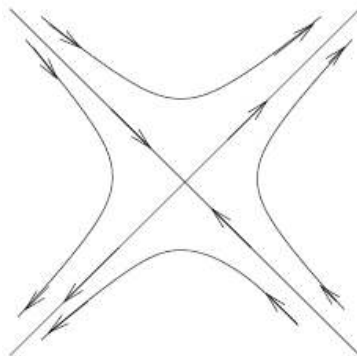
**Figura 3-3** Nodo estable



**Figura 3-4** Foco inestable



**Figura 3-5** Centro



**Figura 3-6** Punto silla



Si se tiene un sistema dinámico lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , es fácil conocer que tipo de punto fijo presenta dicho sistema; simplemente se calculan los eigenvalores  $\lambda$  a partir de la ecuación característica del sistema  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$  y se analiza la relación que hay entre los eigenvalores.

Por otro lado, el análisis de los puntos fijos de un sistema no lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  se puede hacer linealizando el sistema alrededor de cada uno de los puntos fijos y analizando cada sistema linealizado por separado [11].

Sea  $\mathbf{x}^*$  un punto fijo de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , la linealización  $\mathbf{F}_L(\mathbf{x})$  de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es

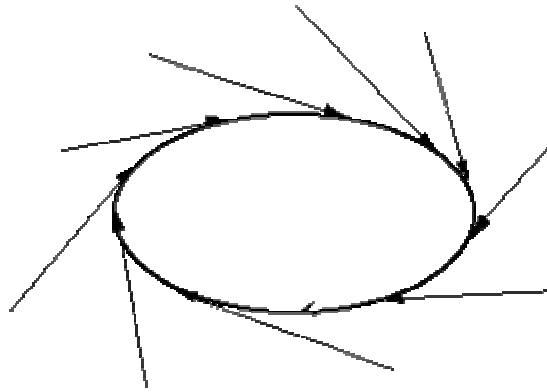
$$\mathbf{F}_L(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (3.6)$$

Existe un teorema debido a Henry Poincaré que dice que si el punto fijo del sistema linealizado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_L(\mathbf{x})$  es nodo, punto silla o foco, se puede garantizar que el sistema no lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  tiene el mismo tipo de punto fijo y con la misma estabilidad. Este teorema no aplica a casos en que el punto fijo sea un nodo estrella o un centro, debido a que este tipo de punto es frontera y pequeños términos no lineales ignorados en la linealización lo puede afectar y cambiar el tipo de punto fijo que éste es. Sin embargo, en lo referente a la estabilidad, los nodos estrella no cambian su estabilidad con la linealización, mientras que los centros sí. Esto último se debe a que los centros son resultado de eigenvalores con parte real igual a cero, y la linealización los puede mover hacia un área estable o inestable.

### 3.2.2 Ciclos Límite

Un ciclo límite es una trayectoria aislada cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y por lo tanto las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite.

Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo, entonces éste es estable. El ciclo es inestable si las trayectorias vecinas se alejan del ciclo; existen casos extraños donde se dice que el ciclo es semiestable y se da cuando algunas trayectorias se alejan del ciclo y otras tienden a él.



**Figura 3-7 Ciclo límite estable**

Los ciclos límite sólo pueden ocurrir en sistemas no lineales; es imposible que sucedan en sistemas lineales. Aunque un sistema lineal puede tener orbitas cerradas, éstas no son aisladas y corresponden a la dinámica causada por un punto fijo tipo centro.

### **3.2.2.1 Teorema de Poincaré-Bendixson**

El teorema de Poincaré-Bendixson es uno de los resultados más importantes que ha surgido en el análisis de sistemas no lineales. En resumidas cuentas este teorema dice que las posibilidades en el plano fase (espacio fase de un sistema bidimensional) son muy limitadas: si una trayectoria está confinada a una región cerrada y limitada que no contiene puntos fijos, entonces la trayectoria debe aproximarse a una órbita cerrada eventualmente (ciclo límite) [11].

Este teorema no aplica para sistemas tridimensionales o de mayor dimensión, cuyas órbitas pueden vagar sin patrón fijo por siempre en dentro de una región limitada sin converger a un punto fijo u órbita cerrada. En algunos casos, las trayectorias son atraídas a un *atractor*

*extraño*: un conjunto fractal cuyo movimiento es aperiódico y sensible a las condiciones iniciales del sistema. A este tipo de comportamiento se le conoce como caos, y se presenta para sistemas de orden  $n \geq 3$ .

### 3.2.3 Atractor Extraño

Un *atractor extraño* es aquel que tiene un movimiento aperiódico y es muy sensible a condiciones iniciales. En muchas ocasiones surge cuando diferentes ciclos límite y puntos fijos tipo silla se encuentran en el sistema. Bajo ciertas condiciones dichos repulsores enviarán la trayectoria a infinito; sin embargo puede haber situaciones que la trayectoria se quede viajando de repulsor a repulsor, sin tender a infinito, haciendo una órbita aperiódica, ver Figura 3-8.

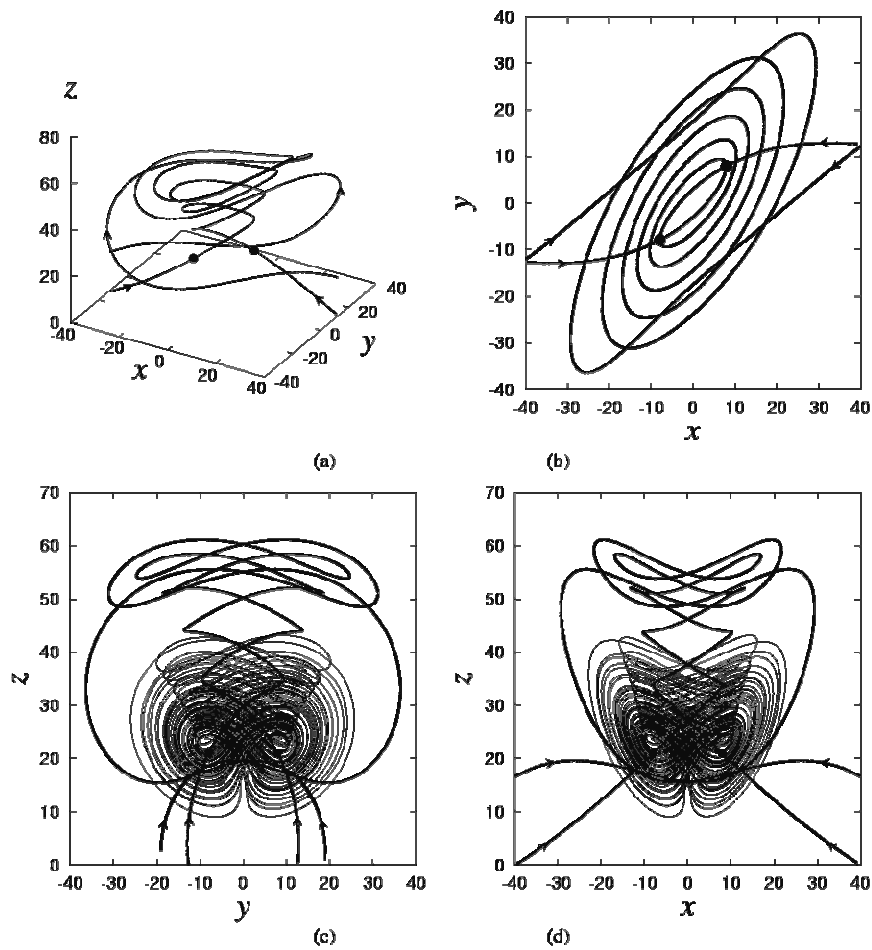


Figura 3-8 Atractor caótico en: (a) espacio fase, (b) plano xy, (c) plano yz, (d) plano xz

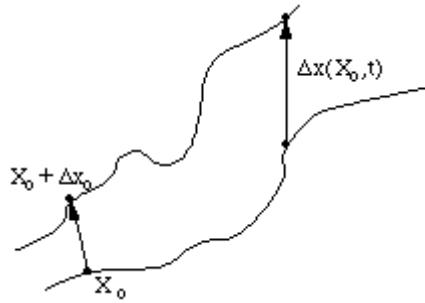
### 3.3 CAOS

Caos es un comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinístico que presenta sensibilidad a condiciones iniciales [11]. Un sistema presenta caos cuando tiene un atractor extraño, el cual hace que la trayectoria del estado del sistema no se estabilice en puntos fijos o ciclos límite ni diverja a infinito; como resultado la trayectoria se mantendrá moviéndose conforme  $t \rightarrow \infty$  de forma aperiódica. A pesar de comportarse aperiódicamente, el caos no es aleatorio, es determinístico: si se conocen las condiciones iniciales del sistema y los parámetros de éste se puede determinar la evolución de una trayectoria. Otra característica importante de un sistema caótico es que ligeras variaciones entre trayectoria y trayectoria hacen que éstas evolucionen de forma muy distinta; a esta característica se le llama dependencia a condiciones iniciales.

#### 3.3.1 Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov son cantidades que dan la tasa de divergencia exponencial de trayectorias con condiciones iniciales perturbadas. Por lo general el término de exponente de Lyapunov se refiere al más grande de los exponentes de Lyapunov de un sistema, ya que es éste el que determina la predictibilidad de un sistema.

Numéricamente el significado del exponente de Lyapunov  $\lambda$  es que si dos trayectorias cualesquiera estaban originalmente distanciadas  $|\Delta \mathbf{x}_0|$ , entonces al transcurrir del tiempo  $t$  estarán separadas en promedio  $\Delta \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = e^{\lambda t} |\Delta \mathbf{x}_0|$ , ver Figura 3-9.



**Figura 3-9 Divergencia entre trayectorias caóticas**

Es importante resaltar que el número de exponentes de Lyapunov depende de las dimensiones del espacio fase. En un sistema tridimensional hay, por lo tanto, tres exponentes. Para que un sistema sea caótico al menos uno de los exponentes debe ser positivo (esto hace que exista un horizonte de predictabilidad finito), y la suma de todos ellos debe ser negativa, para que exista un atractor estable. Por otro lado, si la suma no es negativa el sistema tiende al azar, y si todos los exponentes cero o negativos los sistemas son lineales (predictibles).

### 3.3.2 Sistemas caóticos de tirón

Existen diferentes sistemas que pueden presentar caos. Dichos sistemas tienen en común ser de dimensión 3 o mayor, tener una no linealidad (o más); sin embargo pueden ser muy diversos en su estructura y complejidad. En 1996, Gottlieb concluyó que la función más sencilla que presenta caos es la función de tirón [12]. La función de tirón es aquella de la forma:

$$\ddot{x} = F(\ddot{x}, \dot{x}, x), \quad (3.7)$$

donde  $x$  es el desplazamiento,  $\dot{x}$  es la velocidad,  $\ddot{x}$  es la aceleración y  $\ddot{\ddot{x}}$  es el tirón.

En 1999, Linz y Sprott encontraron diversos atractores caóticos para el sistema de tirón general:

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = f(x), \quad (3.8)$$

donde la función  $f(x)$  es no lineal y puede ser lineal por partes; algunos ejemplos de  $f(x)$  son:

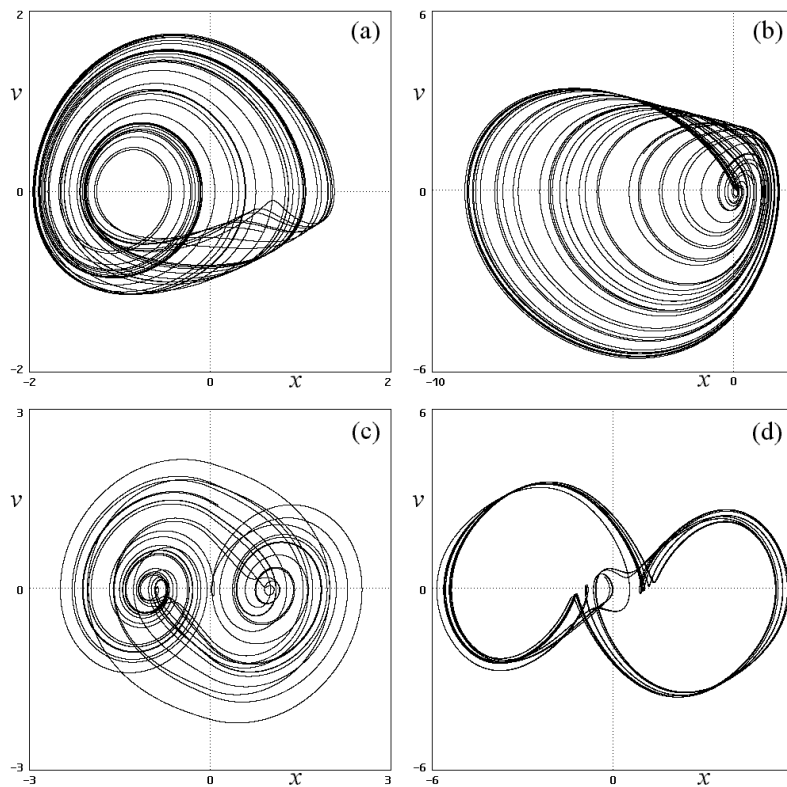
$$f(x) = \pm(b|x| - c), \quad (3.9)$$

$$f(x) = \pm b \left( \frac{x^2}{c} - c \right), \quad (3.10)$$

$$f(x) = \pm(bx - \text{sgn}(x)), \quad (3.11)$$

$$f(x) = -b \max(x, 0) + c. \quad (3.12)$$

Dependiendo de la función  $f(x)$  que se seleccione se obtienen atractores diferentes. La Figura 3-10 (a), (b), (c), y (d) muestra los atractores caóticos correspondientes a sistemas de tirón con las funciones  $f(x)$  expresadas en (3.9), (3.10), (3.12) y (3.11), respectivamente.



**Figura 3-10** Atractores caóticos de sistemas de tirón

### 3.3.2.1 Condiciones para caos de los sistemas de tirón

No todo sistema de tirón presenta caos, dependiendo del valor de los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ , y de la función no lineal  $f(x)$  se obtienen diversos comportamientos algunos de los cuales son caóticos. Las ecuaciones (3.9), (3.10), (3.12) y (3.11) son algunos ejemplos de funciones que pueden lograr caos en los sistemas de tirón para algunos valores de  $b$  y  $c$ .

En [13] se reportan las condiciones que el sistema de tirón debe cumplir para presentar un comportamiento caótico:

- Si  $f(x)$  es continua debe tener un cero en  $x = x_0$ .
- Si  $(x_0, 0, 0)$  es un punto de equilibrio y  $f_L = \dot{f}(x_0)$  la linealización de  $f(x)$  alrededor de dicho punto, una condición necesaria y suficiente para la estabilidad del punto  $(x_0, 0, 0)$  es que  $\beta > 0$  y que  $-\beta\gamma < f_L < 0$ . Por lo tanto, para que el sistema se comporte caóticamente se necesita que  $f_L > 0$  o que  $f_L < -\beta\gamma$ .

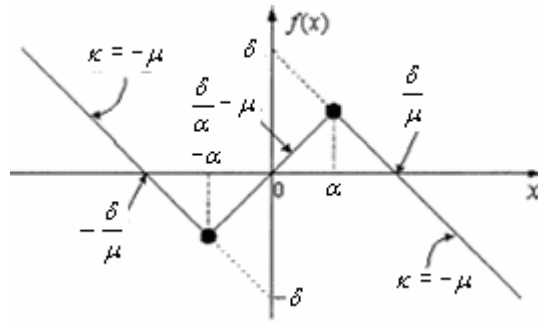
Una función lineal por partes que cumple las características antes mencionadas es la función triangular que está descrita por:

$$f(x) = \frac{\delta}{2\alpha} (|x + \alpha| - |x - \alpha|) - \mu x, \quad (3.13)$$

o de forma alternativa:

$$f(x) = \begin{cases} -\mu x - \delta & x < -\alpha \\ \left(\frac{\delta}{\alpha} - \mu\right)x & -\alpha \leq x \leq \alpha, \\ -\mu x + \delta & x > \alpha \end{cases} \quad (3.14)$$

donde  $\delta > 0$ ,  $\mu \in [0.8, 1.2]$  y  $\alpha \in [0, \delta/\mu]$ . La Figura 3-11 muestra la gráfica de la función de transferencia triangular.



**Figura 3-11 Función de transferencia triangular**

Si se hace  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = \ddot{x}$ , y se usa la función de la ecuación (3.13), se tiene que el sistema de tirón con función triangular está descrito por el sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\gamma & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\delta}{2\alpha} (|x_1 + \alpha| - |x_1 - \alpha|) - \mu x_1 \right). \quad (3.15)$$

Si se linealiza el sistema (3.15) se obtiene:

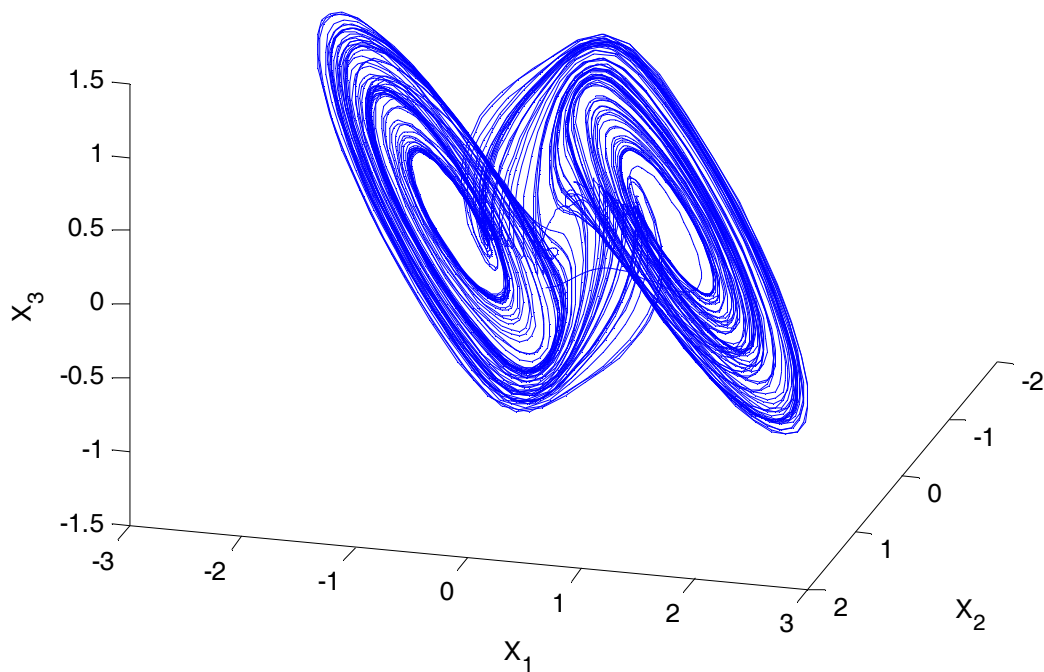
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \kappa & -\gamma & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

donde  $\kappa$  puede tomar dos valores diferentes dependiendo del punto fijo alrededor del cual se linealiza la función. Los valores posibles son  $\kappa = \delta/\alpha - \mu$  para punto fijo  $\mathbf{z}^+ = (0, 0, 0)$  y  $\kappa = -\mu$  para los puntos fijos  $\mathbf{z}_{1,2}^- = (\pm\delta/\mu, 0, 0)$ .

Por ejemplo, si  $\beta = 0.6$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 1$  y  $\alpha = 0.25$ , existen 3 puntos fijos:  $\mathbf{z}^+ = (0, 0, 0)$  y  $\mathbf{z}_{1,2}^- = (\pm 1, 0, 0)$ . Los eigenvalores del punto fijo  $\mathbf{z}^+$  son  $\lambda_1^+ = 1.0731$  y  $\lambda_{2,3}^+ = -0.8366 \pm i1.4476$ , por lo tanto éste es un punto fijo tipo silla. Los eigenvalores del punto fijo  $\mathbf{z}_1^-$  son  $\lambda_1^- = -0.8356$  y  $\lambda_{2,3}^- = 0.1178 \pm i1.0876$  y los de  $\mathbf{z}_2^-$  son  $\lambda_4^- = -0.8356$  y  $\lambda_{5,6}^- = 0.1178 \pm i1.0876$ , lo que significa que los puntos fijos  $\mathbf{z}_{1,2}^-$  son tipo silla.



Los eigenvalores  $\lambda_{1,2,3}^-$  mueven las trayectorias alrededor del punto fijo  $\mathbf{z}_1^-$ , mientras que los eigenvalores  $\lambda_{4,5,6}^-$  mueven las trayectorias alrededor del punto fijo  $\mathbf{z}_2^-$ . este comportamiento hace que se formen remolinos alrededor de los puntos silla  $\mathbf{z}_{1,2}^- = (\pm 1, 0, 0)$ . Por otro lado, los eigenvalores debidos a  $\mathbf{z}^+$  hacen que la trayectoria se aleje del punto fijo  $\mathbf{z}^+$  y cambie de remolino [13]. En conjunto se forma un atractor extraño el cual se muestra en la Figura 3-12.



**Figura 3-12** Espacio fase del atractor caótico del sistema de tirón.

Si se dejan fijos los valores  $\beta = 0.6$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 1$  la condición de obtener caos en el sistema de tirón queda en función de  $\alpha$ . La Figura 3-13 muestra el diagrama de bifurcación del sistema de tirón y el espectro de exponentes de Liapunov en función de  $\alpha$ . En ambas gráficas se puede ver que la región de  $\alpha$  en la que seguramente se encontrará un comportamiento caótico es  $\alpha \in [0, 0.3]$ .

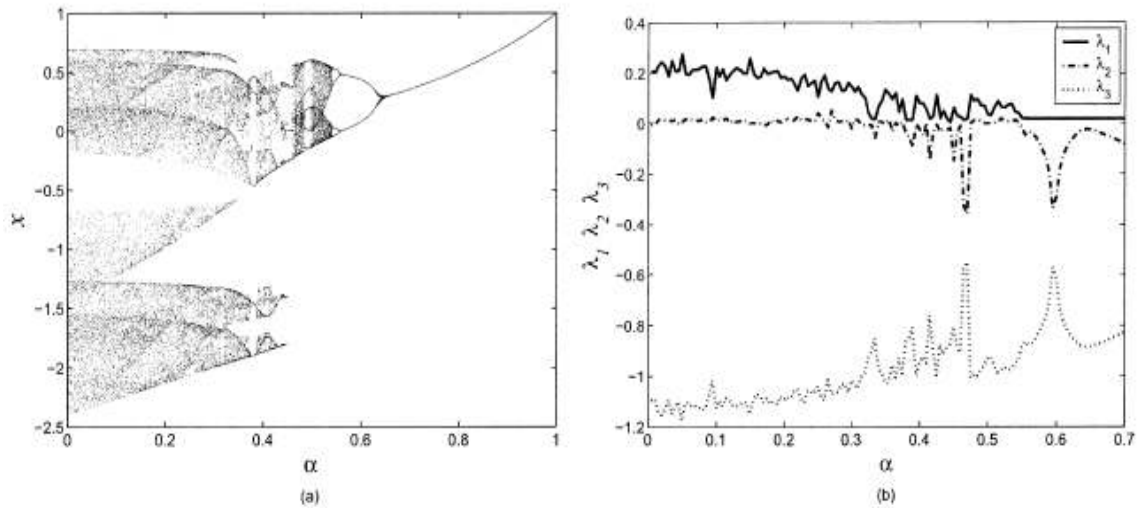


Figura 3-13 Diagrama de bifurcación (a) y de exponentes de Lyapunov (b) del sistema de tirón.

Se concluye que el sistema general:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\gamma & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\delta}{2\alpha} (|x_1 + \alpha| - |x_1 - \alpha|) - \mu x_1 \right), \quad (3.17)$$

con  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 1$  y  $\alpha \in [0, 0.3]$  presenta un comportamiento caótico, ya que bajo esas condiciones se obtiene un exponente de Lyapunov positivo.

Si se requiere escalar la amplitud de la trayectoria de un sistema, se puede aplicar la transformación lineal de escalamiento:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

donde  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  y  $\eta_3$  son factores de escalamiento de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , respectivamente.

Por otro lado, es posible hacer que el espectro en frecuencia de cada una de las variables de estado del sistema abarque un mayor o menor rango haciendo que las oscilaciones que realiza en el tiempo sucedan más rápidamente, lo anterior se puede lograr haciendo la transformación:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} x_1(\tau_1 t) \\ x_2(\tau_2 t) \\ x_3(\tau_3 t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \tau_1 \dot{x}_1(\tau_1 t) \\ \tau_2 \dot{x}_2(\tau_2 t) \\ \tau_3 \dot{x}_3(\tau_3 t) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

En suma, para escalar en magnitud y frecuencia al sistema general de tirón de la ecuación

(3.17) se realizan las siguientes sustituciones en su ecuación:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \frac{x_1}{\eta_1} & \dot{x}_1 &\rightarrow \frac{\dot{x}_1}{\tau_1 \eta_1} \\ x_2 &\rightarrow \frac{x_2}{\eta_2} & \dot{x}_2 &\rightarrow \frac{\dot{x}_2}{\tau_2 \eta_2}, \\ x_3 &\rightarrow \frac{x_3}{\eta_3} & \dot{x}_3 &\rightarrow \frac{\dot{x}_3}{\tau_3 \eta_3} \end{aligned} \quad (3.20)$$

El resultado de hacer las sustituciones (3.20) en (3.17) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \frac{\eta_1}{\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2 \frac{\eta_2}{\eta_3} \\ 0 & -\tau_3 \frac{\eta_3}{\eta_2} \gamma & -\tau_3 \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \left( \frac{\eta_3 \delta}{2\eta_1 \alpha} (|u + \eta_1 \alpha| - |u - \eta_1 \alpha|) - \frac{\eta_3}{\eta_1} \mu u \right), \quad (3.21)$$

donde  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\alpha \in [0, 0.3]$ ,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathbb{R}^+$ .