# Capítulo 5. Medición de la Distancia por Medio de Triangulación

## 5.1 Introducción

Hemos visto cómo medir la distancia de un objeto a una cámara cuando dicho objeto es captado por una sola cámara; sin embargo, cuando el objeto es captado por dos o más cámaras, entonces surge otra posibilidad de medir la distancia. Este es el segundo caso que se enunció en la sección 1.4 y el actual capítulo explica un procedimiento para evaluar la distancia hacia cualquiera de las dos cámaras o la distancia equivalente a la altura del triángulo que se forma con los vértices donde se encuentran posicionadas las cámaras y el objeto. El análisis se hará para el caso en el que se usan dos cámaras, no más, ya que son las necesarias para que funcione. Si son más de dos cámaras las que detectan un objeto, entonces se escogerían dos de ellas para trabajar.

## 5.2 Ley de los senos y triangulación

La ley de los senos, también conocida como fórmula de los senos o regla de los senos, es en trigonometría una afirmación que se aplica a cualquier triángulo, donde los lados del mismo son *a*, *b* y *c*, y los ángulos opuestos a esos lados son A, B y C. Si esto se cumple entonces la ley de los senos afirma que las siguientes cantidades son iguales:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R \qquad \textit{Ecuación 5.1}$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo en cuestión [20]. De cualquier forma, la ley de los senos siempre puede ser escrita como:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} \qquad \textit{Ecuación 5.2}$$

Para llegar a la ecuación 5.2 se parte de dibujar la altura *h* del triángulo con vértices A, B y C, partiendo de *C* hacia el lado que corta *c,* como se muestra en la Figura 5.1

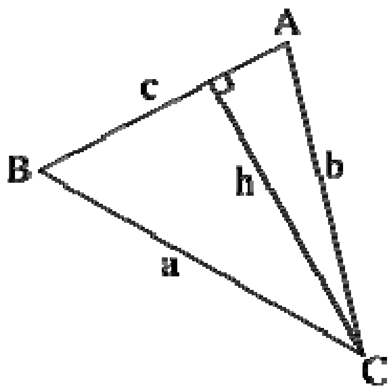


*Figura 5.1 Altura h del triángulo*

Esto equivale a cortar el triángulo en dos triángulos rectángulos. Al realizar esta acción, entonces es posible observar que:

$$senA = \frac{h}{b} \qquad \textit{Ecuación 5.3}$$

y

$$senB = \frac{h}{a} \qquad \textit{Ecuación 5.4}$$

Por lo tanto:

$$h = bsenA = asenB \qquad \textit{Ecuación 5.5}$$

y

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \qquad \textit{Ecuación 5.6}$$

Realizando el mismo procedimiento, pero trazando la altura entre el vértice *A* y el lado *a,* se obtiene la parte restante para llegar a la ecuación 5.2.

### 5.2.1 Triangulación y cálculo de distancias

En trigonometría y en geometría, la triangulación es el proceso de ubicar un punto determinado mediante la medición de los ángulos hacia éste desde los extremos de una línea fija (del lado opuesto de ese punto), en vez de hacer las mediciones directamente. El punto a ubicar puede ser visto también como el tercero de los vértices que forman un triángulo que tiene un lado y dos ángulos conocidos [21].

Las coordenadas o las distancias a un punto pueden ser encontradas calculando la longitud de un lado de un triángulo cuando se conocen el lado opuesto a dicho punto y los ángulos que se forman en las terminaciones de ese lado. Es aquí donde aparece el uso de la ley de los senos ya que a partir de la ecuación 6.2 se puede fácilmente deducir que:

$$a = \frac{c \cdot senA}{senC} \qquad \textit{Ecuación 5.7}$$

y

$$b = \frac{c \cdot senB}{senC} \qquad \textit{Ecuación 5.8}$$

Las ecuaciones 5.7 y 5.8 pueden ser utilizadas para calcular los lados a y b cuando se conoce la longitud *c* y los dos ángulos de los extremos de este lado, es decir los ángulos *A* y *B* Se nota que en ambas ecuaciones es necesario también saber el ángulo *C* en orden de aplicar la fórmula; sin embargo, al conocer los otros dos ángulos del triángulo y sabiendo que la suma de los ángulos interiores del mismo suman en total 180º, entonces es sencillo encontrar el ángulo *C:*

$$C = 180 - A - B$$ Ecuación 5.9

Además es posible que las fórmulas de las ecuaciones 5.7 y 5.8 dependan únicamente en los ángulos conocidos, sin necesidad de hacer el cálculo de *C.* Esto se basa en la identidad trigonométrica que dice que:

$$sen(\theta) = sen(180 - \theta)$$ *Ecuación 5.10*

De esta manera:

$$senC = sen(A + B)$$ *Ecuación 5.11*

y al sustituir la equivalencia de la ecuación 5.11 en cualquiera de las ecuaciones 5.7 ó 5.8, entonces las fórmulas ya sólo dependen de los ángulos *A* y *B*, y no de *C*.

Adicionalmente a las distancias *a* y *b,* también es posible calcular la altura *h* del triángulo haciendo uso de identidades. Véase la Figura 5.2. Para calcular *h* surge un sistema de dos ecuaciones:

$$h = b \cdot senA,$$ *Ecuación 5.12*

$$h = a \cdot senB \qquad \textit{Ecuación 5.13}$$

y resolviendo el sistema por igualación se llega al resultado:

$$h = \frac{c \cdot senA \cdot senB}{senC} \qquad \textit{Ecuación 5.14}$$

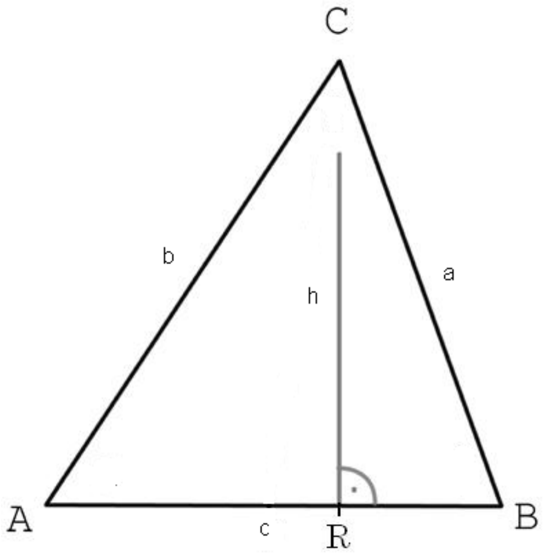


*Figura 5.2 Triángulo con altura h*

### 5.3 Uso de cámaras para triangulación y medición de distancias

Cuando un objeto es detectado por dos cámaras y además se conoce la posición de ambas entonces es posible medir la distancia entre éstas y el objeto, o la distancia correspondiente a la altura del triángulo que se forma con los tres vértices. El uso de esta técnica se presta perfectamente para el fin que se busca en esta tesis, ya que al conocer la ubicación de dos cámaras, es decir, sus coordenadas, entonces es posible medir la distancia que hay entre ellas. Además, medir los ángulos de giro que hay entre esta línea y el objeto no es una tarea complicada.

De esta manera justamente se conoce uno de los lados del triángulo y los dos ángulos correspondientes a los extremos de este lado pudiendo ciertamente aplicar las fórmulas de la triangulación para encontrar cualquier distancia restante.

De esta manera, sólo resta elegir desde cuál de las cámaras se desea saber la distancia al objeto ya que puede ser de cualquiera. O en su defecto, si se desea saber la distancia correspondiente a la altura del triángulo.

### 5.3.1 Algoritmo en MATLAB para el cálculo de distancias mediante triangulación

Como se puede intuir, este paso consiste únicamente de introducir todas las fórmulas finales a las que se llegaron en las secciones anteriores del presente capítulo para probar su funcionalidad y aplicarlas en un sistema autónomo en un futuro. En el Capítulo 6 se mostrarán algunas pruebas que se realizaron y se verá la efectividad del algoritmo. Para este caso se utilizó un sistema manual muy sencillo para comparar las distancias medidas físicamente con respecto a los cálculos arrojados por el programa. En el apéndice A se incluye el código de MATLAB que se escribió para ejecutar las fórmulas.